ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II)

Введение

Как известно (см., например, [1]), изучение линейчатой геометрии связывается с проективно-дифференциальной геометрией подмногообразий плюккеровой (или грассмановой) гиперквадрики пятимерного пространства.

В работах [2] и [3] ставится аналогичная задача для проективной теории семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства. В отличие от трехмерного случая, здесь прямые (или плоскости) отображаются в точки грассманова многообразия девятимерного пространства. Причем грассманово многообразие Ω (1,4) (или Ω (2,4)) является шестимерной поверхностью пятого порядка и имеет уравнения

$$\varphi_1(pp) \equiv \underline{12}\,\underline{34} - \underline{13}\,\underline{24} + \underline{14}\,\underline{23} = 0,$$

$$\varphi_2(pp) \equiv \underline{12}\,\underline{35} - \underline{13}\,\underline{25} + \underline{15}\,\underline{23} = 0,$$

$$\varphi_3(pp) \equiv \underline{12}\,\underline{45} - \underline{14}\,\underline{25} + \underline{15}\,\underline{24} = 0,$$

$$\varphi_4(pp) \equiv \underline{23}\,\underline{45} - \underline{24}\,\underline{35} + \underline{25}\,\underline{34} = 0,$$

$$\varphi_5(pp) \equiv \underline{13}\,\underline{45} - \underline{14}\,\underline{35} + \underline{15}\,\underline{34} = 0,$$

где $\underline{ik}$ — грассмановы (или плюккеровы) координаты прямой p (или дуальные грассмановы координаты плоскости). В [2] изучается теория линейных многообразий прямых и плоскостей четырехмерного пространства. Все рассматриваемые здесь задачи тесно связываются с алгебраической геометрией. В работе [3] рассматривается первая часть проективно-дифференциальной теории двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства.

Настоящая статья является продолжением работы [3]. Здесь рассматриваются дифференциальные окрестности более высокого порядка (до третьего) семейств прямых и плоскостей.

В § 1 с каждым лучом семейства связывается подвижной репер первого порядка и для выяснения его геометрического смысла перечисляются некоторые результаты из [3].

Во втором параграфе рассматривается дифференциальная окрестность второго порядка и с помощью девятимерного пространства доказывается ряд теорем. В частности, здесь найдена соприкасающаяся гиперповерхность Власова двупараметрического семейства прямых. Эта гиперповерхность способствует полной фиксации подвижного координатного репера.

В § 3 рассматривается соприкасающаяся гиперповерхность Власова для конгруэнции прямых четырехмерного пространства. Здесь эта гиперповерхность вырождается в гиперконус второго порядка. Далее рассматриваются такие двупараметрические семейства прямых, отображение которых в P_9 является картановым многообразием.

В § 4 рассматриваются точки и прямые соприкосновения линейчатых поверхностей, и они связываются с соприкасающейся гиперповерхностью Власова.

В пятом параграфе все полученные результаты по принципу двойственности четырехмерного пространства автоматически повторяются для двупараметрических семейств плоскостей. Здесь, в частности, получаются некоторые результаты из теории двумерных поверхностей четырехмерного пространства. При введении дуального (тангенциального) репера аналитический аппарат для двойственных образов остается без изменения. Этот факт показывает, что для изучения теории многообразий плоскостей пространства P_4 лучше пользоваться дуальным репером этого пространства.

К настоящему времени создана богатая теория в области исследования многомерных поверхностей n-мерного проективного пространства. Рассматривая теорию семейств m-мерных плоскостей с помощью теории проективно-дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия $\Omega(m, n)$, мы имеем возможность воспользоваться результатами теории многомерных поверхностей, с одной стороны, и теорией грассмановых многообразий алгебраической геометрии, с другой [5].

Работа выполнена методом внешних форм Картана [4].

§ 1. Выбор подвижного репера первого порядка

Как известно [3], двупараметрическое семейство прямых M_2, описанное ребром A_1A_2 подвижного репера A_i, определяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^5 = \alpha\omega_2^4, \quad \omega_2^5 = \alpha'\omega_1^3, \tag{1.1}$$

где ω_1^3 и ω_2^4 независимые формы семейства M_2. Формы ω_i^k определяют инфинитезимальное преобразование

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad (D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k])$$

репера A_i. Выбор (1.1) координатного репера означает: 1) касательные трехмерные подпространства линейчатых поверхностей $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_2^4 = 0$ являются соответственно подпространствами $A_1A_2A_4A_5$ и $A_1A_2A_3A_5$; 2) фокусы линейчатых поверхностей $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_2^4 = 0$ совпадают соответственно с точками A_2 и A_1; 3) касательные плоскости этих линейчатых поверхностей в фокальных точках совпадают соответственно с плоскостями $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$.

Мы здесь перечислим некоторые результаты из [3].

(I) Касательное трехмерное подпространство линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ семейства M_2 определяется точками

$$(A_1, A_2, A_3 + \alpha\lambda A_5, \lambda A_4 + \alpha' A_5). \tag{1.2}$$

(II) Касательные плоскости всех линейчатых поверхностей семейства M_2 в точке $A_1 + \rho A_2$ принадлежат одному трехмерному подпространству

$$(A_1, A_2, A_3 + \rho\alpha' A_5, \rho A_4 + \alpha A_5). \tag{1.3}$$

Таким образом, с каждой точкой луча A_1A_2 семейства M_2 связывается определенное трехмерное (касательное в этой точке) подпространство (1.3).

(III) Каждая линейчатая поверхность $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ семейства M_2 имеет единственную точку $A_1 + \rho A_2$ (фокус), определенную равенством $\alpha'\rho = \alpha\lambda$, в силу которого два подпространства (1.2) и (1.3) совпадают.

(IV) Однопараметрическое семейство всех касательных подпространств (1.2) (или (1.3)) образует некоторый касательный конус второго класса с уравнением

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3u_4 - \alpha\alpha'(u_5)^2 = 0, \tag{1.4}$$

где u_i — дуальные координаты трехмерного подпространства в P_4.

Дифференциал аналитической прямой $(A_1A_2) = \overline{12}$ в силу (1.1) напишется в виде

$$d\overline{12} = (\omega_1^1 + \omega_2^2)\overline{12} - \omega_1^3\overline{23} - \alpha\omega_2^4\overline{25} + \omega_2^4\overline{14} + \alpha'\omega_1^3\overline{15}, \; ((A_i A_k) = \overline{ik}). \tag{1.5}$$

Прямая $\overline{12}$ отображается в точку $\overline{12}$ грассманова многообразия Ω (1,4) девятимерного пространства. Когда прямая $\overline{12}$ описывает семейство M_2, то ее отображение в P_9 описывает двумерное подмногообразие m_2. Из (1.5) вытекает, что касательная плоскость подмногообразия m_2 определяется тремя точками

$$(\overline{12}, \overline{14} - \alpha\,\overline{25}, \overline{23} - \alpha'\,\overline{15}). \tag{1.6}$$

§ 2. Дифференциальная окрестность второго порядка

Внешнее дифференцирование системы (1.1) приводит к квадратичным уравнениям

$$[\omega_1^2 - \alpha\omega_5^4,\ \omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0,\quad [\omega_2^1 - \alpha'\omega_5^3,\ \omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0,$$

$$[\omega_3^5 - \alpha'\omega_1^2 - \alpha\alpha'\omega_5^4,\ \omega_1^3] + [\Delta\alpha\,\omega_2^4] = 0,\quad [\omega_4^5 - \alpha\omega_2^1 - \alpha\alpha'\omega_5^3,\ \omega_2^4] + [\Delta\alpha'\omega_1^3] = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\Delta\alpha = d\alpha + \alpha(\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 + \omega_5^5),\quad \Delta\alpha' = d\alpha' + \alpha'(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_5^5).$$

Алгебраическим разрешением (2.1) находим

$$\begin{gathered}\alpha\omega_5^4 - \omega_1^2 = b\omega_1^3 + a\omega_2^4,\quad \alpha'\omega_5^3 - \omega_2^1 = a'\omega_1^3 + b'\omega_2^4,\\ \omega_3^4 = c\omega_1^3 + b\omega_2^4,\qquad \omega_4^3 = b'\omega_1^3 + c'\omega_2^4,\\ \omega_3^5 - \alpha'\omega_1^2 - \alpha\alpha'\omega_5^4 = e\omega_1^3 + f\omega_2^4,\quad \omega_4^5 - \alpha\omega_2^1 - \alpha\alpha'\omega_5^3 = f'\omega_1^3 + e'\omega_2^4,\\ \Delta\alpha = f\omega_1^3 + g\omega_2^4,\qquad \Delta\alpha' = g'\omega_1^3 + f'\omega_2^4.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Соприкасающаяся гиперповерхность Власова 3-го порядка. Как известно, семейство M_2 представляется двумерным подмногообразием m_2 грассманова многообразия Ω (1.4). Дифференциальная окрестность первого порядка точки $\overline{12}$ лежит в касательной плоскости (1.6), а дифференциальная окрестность второго порядка лежит в пятимерном подпространстве

$$(\overline{12},\ \overline{23} - \alpha'\overline{15},\ \overline{14} - \alpha\overline{25},\ a'\overline{13} + g'\overline{15} - c\overline{24} - e\overline{25} + 2\alpha'\overline{35},\ b'\overline{13} +$$

$$+ f'\overline{15} - b\overline{24} - f\overline{25} + \overline{34},\ c'\overline{13} + e'\overline{15} - a\overline{24} - g\overline{25} - 2\alpha\overline{45}). \tag{2.3}$$

Пусть точка $\overline{34}$ находится на плоскости (2.3). Тогда будем иметь

$$b = b' = f = f' = 0. \tag{2.4}$$

Известно, что каждое пятимерное подпространство пересекается с грассмановым многообразием по некоторой двумерной поверхности, представляющей линейное двупараметрическое семейство прямых четырехмерного пространства. Это семейство образует некоторую гиперповерхность третьего порядка, названную нами *гиперповерхностью Власова* [2]. В этой же работе доказывается, что поверхность Власова есть геометрическое место всех прямых, пересекающих четыре фиксированные плоскости в общем положении.

Пусть две из этих плоскостей совпадают с гранями $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_5$. Тогда в силу (2.3) будем иметь

$$a = a' = c = c' = 0. \tag{2.5}$$

Теперь уравнения семейства M_2 напишутся в виде

$$\begin{gathered}\omega_1^2=\alpha\omega_5^4,\quad \omega_2^1=\alpha'\omega_5^3,\quad \omega_3^4=0,\quad \omega_4^3=0,\\ \omega_3^5-2\alpha\alpha'\omega_5^4=e\omega_1^3,\quad \omega_4^5-2\alpha\alpha'\omega_5^3=e'\omega_2^4,\quad \Delta\alpha=g\omega_2^4,\quad \Delta\alpha'=g'\omega_1^3.\end{gathered}\tag{2.6}$$

В силу этих уравнений подвижной репер полностью фиксируется. Такая фиксация репера не нарушает общности двупараметрического семейства прямых M_2.

Действительно, внешний дифференциал системы (2.6) имеет вид

$$\begin{gathered}[2\alpha\omega_5^2-g\omega_5^4,\ \omega_2^4]+[\omega_3^2\,\omega_1^3]=0,\quad [2\alpha'\omega_5^1-g'\omega_5^3,\ \omega_1^3]+[\omega_4^1\,\omega_2^4]=0,\\ [\omega_3^2\,\omega_2^4]+e\,[\omega_1^3\,\omega_5^4]=0,\qquad [\omega_4^1\,\omega_1^3]+e'\,[\omega_2^4\,\omega_5^3]=0,\\ [\Delta e-2\alpha g'\omega_5^4-\alpha'\omega_3^2,\ \omega_1^3]+[2\alpha\alpha'\omega_5^2-e\alpha\omega_5^3-\alpha\omega_3^1,\ \omega_2^4]=0,\\ [\Delta e'-2\alpha'g\omega_5^3-\alpha\omega_4^1,\ \omega_2^4]+[2\alpha\alpha'\omega_5^1-e'\alpha'\omega_5^4-\alpha'\omega_4^2,\ \omega_1^3]=0,\\ [\Delta g\omega_2^4]-[\alpha\omega_3^1+\alpha e\omega_5^3+\alpha'g\omega_5^4,\ \omega_1^3]=0,\\ [\Delta g'\omega_1^3]-[\alpha'\omega_4^2+\alpha'e'\omega_5^4+\alpha g'\omega_5^3,\ \omega_2^4]=0,\end{gathered}\tag{2.7}$$

где

$$\Delta e=de+e\,(\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_5^5),\quad \Delta e'=de'+e'\,(\omega_2^2-2\omega_4^4+\omega_5^5),$$

$$\Delta g=dg+g\,(2\omega_2^2-2\omega_4^4-\omega_1^1+\omega_5^5)+2\alpha\,(\omega_4^2-\alpha\omega_5^1-e'\omega_5^4),$$

$$\Delta g'=dg'+g'\,(2\omega_1^1-2\omega_3^3-\omega_2^2+\omega_5^5)+2\alpha'\,(\omega_3^1-\alpha'\omega_5^2-e\omega_5^3).$$

Эта система определяет многообразие M_2 с произволом четырех функций двух аргументов, т. е. произвол семейства не уменьшается.

Пятимерное подпространство после этих упрощений напишется в виде

$$\overline{(12},\ \overline{23}-\alpha'\,\overline{15},\ \overline{14}-\alpha\,\overline{25},\ g'\,\overline{15}-e\,\overline{25}+2\alpha'\,\overline{35},\ \overline{34},\ e'\,\overline{15}-g\overline{25}-2\alpha\,\overline{45}).\tag{2.8}$$

Его пересечение с грассмановым многообразием представляет линейное двупараметрическое семейство прямых L_2 четырехмерного пространства [2]. Семейство прямых L_2 образует гиперповерхность Власова 3-го порядка, точечное уравнение которой легко получается из (2.8) и имеет вид

$$\begin{vmatrix} x^3 & -x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -x^5 & 0 & x^1 & \alpha' & 0 & -g' & -e'\\ 0 & x^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^2 & 0 & \alpha & e & g\\ 0 & -x^5 & x^3 & 0 & 0 & -2\alpha' & 0\\ 0 & 0 & x^4 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{vmatrix}=0.\tag{2.9}$$

Пять ассоциированных плоскостей конфигурации Власова одновременно пересекаются всеми лучами линейного многообразия L_2 [2]. Пусть a_{ik} являются дуальными грассмановыми координатами одной из этих плоскостей. Так как пересечение плоскости a_{ik} и прямой $\underline{ik}$ обеспечивается условием $a_{ik}\, \underline{ik}=0$ (см. [2]), кроме того числа a_{ik} удовлетворяют равенствам $\varphi_i(aa)=0$, то в силу (2.8) для a_{ik} получим пять решений. Два решения из них дают две плоскости $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_5$, а три другие решения представляют остальные плоскости конфигурации Власова. Координаты этих трех плоскостей удовлетворяют уравнениям

$$a_{24}=\alpha(\alpha')^2(a_{15})^3,\quad a_{25}=\alpha'(a_{15})^2,\quad a_{12}=a_{34}=0,\quad a_{23}=\alpha' a_{15},$$
$$a_{14}=\alpha\alpha'(a_{15})^2,\quad g'a_{15}-ea_{23}+2\alpha' a_{35}=0,\quad e'a_{15}-ga_{25}-2\alpha a_{45}=0, \tag{2.10}$$
$$\alpha^2\alpha' e(a_{15})^3-\alpha^2 g'(a_{15})^2+g\alpha' a_{15}-e'=0,$$

где принято $a_{13}=1$. На каждом луче семейства M_2 находятся пять точек, где плоскости конфигурации Власова пересекаются с лучом. Эти точки здесь называются *точками Власова*. Пять линейчатых поверхностей семейства M_2, у каждой из которых фокус (см. [3]) совпадает с точкой Власова, называются *линейчатыми поверхностями Власова*. Две из пяти линейчатых поверхностей Власова совпадают с поверхностями $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$.

Таким образом, *с каждым лучом двупараметрического семейства прямых связывается единственная соприкасающаяся гиперповерхность Власова третьего порядка, которая содержит все прямые дифференциальной окрестности второго порядка луча семейства.*

§ 3. Соприкасающаяся гиперквадрика конгруэнции прямых четырехмерного пространства

Конгруэнция прямых четырехмерного пространства является фокальным двупараметрическим семейством прямых. Она характеризуется условиями [3]

$$\alpha=0,\quad \alpha'=0. \tag{3.1}$$

В силу (3.1) из (2.2) получим $f=f'=g=g'=0$. Посредством выбора репера мы получим еще условия $b=b'=0$. После такого выбора репера все условия (2.5) уже нарушаются. Соприкасающаяся 5-плоскость (2.3) теперь имеет вид

$$(\overline{12},\ \overline{23},\ \overline{14},\ \overline{34},\ a'\,\overline{13},\ -c\,\overline{24}-e\,\overline{25},\ c'\,\overline{13}+e'\,\overline{15}-a\,\overline{24}) \tag{3.2}$$

и пересекается с грассмановым многообразием по двумерным подмногообразиям, представляющим частный случай линейного многообразия прямых L_2 четырехмерного пространства. Совокупность этих прямых образует гиперповерхность второго порядка

$$\begin{vmatrix} x^3 & 0 & a' & c' \\ 0 & -x^4 & c & a \\ 0 & -x^5 & e & 0 \\ x^5 & 0 & 0 & e' \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

и гиперплоскость $x^5=0$, т. е. в этом случае гиперповерхность Власова является приведенным многообразием. Гиперповерхность (3.3) является конусом второго порядка, вершина которого совпадает с лучом конгруэнции. Две фокальные плоскости конгруэнции являются образующими плоскостями для этого конуса. Конфигурация Власова в этом случае вырождается в совокупность всех плоскостей, инцидентных с лучом конгруэнции и принадлежащих касательному трехмерному пространству $A_1A_2A_3A_4$.

Таким образом, *с каждым лучом конгруэнции четырехмерного пространства связывается определенная соприкасающаяся гиперквадрика (конус) (3.3), которой принадлежат все прямые дифференциальной окрестности второго порядка.*

Картановы многообразия. Если отображение конгруэнции в девятимерном пространстве является картановым многообразием, т. е. его соприкасающаяся плоскость имеет размерность четыре, то из (3.2) получим

$$e=e'=0, \quad aa'-cc'=0, \tag{3.4}$$

откуда следует, что A_1A_2 описывает конгруэнцию W, принадлежащую трехмерному пространству $A_1A_2A_3A_4$. Таким образом, *отображение конгруэнции в девятимерном пространстве является картановым многообразием тогда и только тогда, когда конгруэнция является конгруэнцией W трехмерного подпространства.*

Из (2.3) следует, что существует (кроме конгруэнции) также другой класс двупараметрического семейства прямых, отображение которого в P_9 является картановым многообразием. Этот класс характеризуется условием

$$\alpha'=0, \quad a'=c=e=0.$$

В этом случае единственная сопряженная сеть картанова многообразия является самосопряженной сетью с уравнением $\omega_2^4=0$.

Пересечение соприкасающейся 5-плоскости с касательной 6-плоскостью грассманова многообразия. Касательная 6-плоскость грассманова многообразия в точке $\overline{12}$ определяется точками

$$(\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}). \tag{3.5}$$

В общем случае эта плоскость пересекается с соприкасающейся 5-плоскостью (2.8) по касательной 2-плоскости (1.6). Размерность пересечения равна трем только при $\alpha'=0$ (или $\alpha=0$) и равна четырем только при $\alpha=\alpha'=0$. Соприкасающаяся 5-плоскость (2.8) не может целиком находиться в шестимерном касательном подпространстве (3.5). Таким образом, соприкасающаяся 5-плоскость отображения m_2 двупараметрического семейства прямых четырехмерного пространства пересекается с касательной 6-плоскостью грассманова многообразия в общем случае только по касательной к m_2 2-плоскостью (1.6). Максимальная размерность этого пересечения равна четырем и соответствует случаю, когда m_2 является отображением конгруэнции.

§ 4. Точки и прямые соприкосновения линейчатых поверхностей

Каждая тройка прямых в общем расположении пересекается единственной четвертой прямой четырехмерного пространства. Следовательно, существует единственная прямая, пересекающая три бесконечно близких луча общей линейчатой поверхности четырехмерного пространства. Естественно эту прямую назвать *прямой соприкосновения*, а точку пересечения ее с лучом линейчатой поверхности —*точкой соприкосновения.*

Подсчитывая положение точки соприкосновения линейчатой поверхности Власова $\omega_2^4=0$, мы заметим, что она совпадает с точкой A_1*. Имея в виду, что все плоскости в конфигурации Власова равноправны [2], будем иметь теорему: *Точка соприкосновения каждой линейчатой поверхности Власова двупараметрического семейства прямых совпадает с фокусом той же линейчатой поверхности.*

Линейчатые поверхности Власова этим свойством не характеризуются. Требование, чтобы точка соприкосновения совпала с фокусом линейчатой поверхности двупараметрического семейства прямых, приводит к дифференциальному уравнению. Следовательно, через каждый луч двупараметрического семейства прямых проходит ∞^1 линейчатых поверхностей, у которых фокусы совпадают с точками соприкосновения.

Прямые соприкосновения всех линейчатых поверхностей, проходящих через данный луч, образуют некоторую линейчатую поверхность, названную здесь линейчатой поверхностью соприкосновения двупараметрического семейства.

§ 5. Двойственность

Все полученные результаты, согласно принципу двойственности (точка $\longleftrightarrow$ гиперплоскость, прямая $\longleftrightarrow$ плоскость) четырехмерного пространства, можно автоматически повторить для двупараметрического семейства плоскостей π_2 с помощью введения дуального репера. Аналитический аппарат при этом остается без изменения.

---

* Прямая соприкосновения находится в „инволюции“ с $\overline{12}$, $d\,\overline{12}\,(mod\ \omega_2^4)$ и $d^2\,\overline{12}\,(mod\ \omega_2^4)$, из которых получается шесть условий, однозначно определяющих эту прямую.

1) Произвольная точка пространства выражается через вершины репера в виде

$$M = x^i A_i.$$

2) Инфинитезимальные перемещения репера пишутся в виде

$$dA_i = \omega_i^k A_k,$$

где

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k].$$

3) Двупараметрическое семейство прямых, описанное лучом A_1A_2, определяется уравнениями

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^5 = \alpha\omega_2^4, \quad \omega_2^5 = \alpha'\omega_1^3$$

относительно репера первого порядка.

1) Произвольная гиперплоскость пространства выражается через грани (гиперплоскости) репера в виде

$$m = X^i a_i$$

2) Инфинитезимальные перемещения репера пишутся в виде

$$da_i = \Omega_i^k a_k,$$

где

$$D\Omega_i^k = [\Omega_i^j \Omega_j^k].$$

3) Двупараметрическое семейство плоскостей, описанное плоскостью a_1a_2, определяется уравнениями

$$\Omega_1^4 = \Omega_2^3 = 0, \quad \Omega_1^5 = \alpha\Omega_2^4, \quad \Omega_2^5 = \alpha'\Omega_1^3$$

относительно репера первого порядка.

Геометрический смысл такого выбора подвижного репера для ∞^2 семейства плоскостей выявляется также по принципу двойственности. Именно: (I) Фокусы однопараметрических семейств плоскостей $\Omega_1^3 = 0$ и $\Omega_2^4 = 0$ совпадают соответственно с точками $(a_1a_2a_4a_5)$ и $(a_1a_2a_3a_5)$; (II) Касательные трехмерные подпространства (см. [3]) семейств $\Omega_1^3 = 0$, $\Omega_2^4 = 0$ совпадают соответственно с подпространствами a_2 и a_1; (III) Фокальные прямые этих семейств в их касательных подпространствах (см. [3]) совпадают соответственно с прямыми $(a_1a_2a_4)$ и $(a_1a_2a_3)$.

Как известно [2], гиперповерхность Власова третьего порядка является геометрическим местом всех прямых, пересекающих четыре плоскости в общем расположении. Дуальная „гиперповерхность" Власова третьего класса есть геометрическое место всех плоскостей, пересекающих четыре прямые в общем расположении. Так как двупараметрическое семейство прямых обладает соприкасающейся поверхностью Власова, то результат, двойственный этому, можно формулировать в виде следующей теоремы: *С каждой плоскостью двупараметрического семейства плоскостей связывается единственная соприкасающаяся дуальная гиперповерхность Власова, которая содержит все плоскости дифференциальной окрестности второго порядка данной плоскости семейства.*

Пусть плоскость a_3a_4 является образующей плоскостью, а ребра $a_1a_3a_5$ и $a_2a_4a_5$—направляющими прямыми для дуальной гиперповерхности Власова. Тогда двупараметрическое семейство плоскостей определится линейными уравнениями

$$\Omega_1^2 = \alpha\Omega_5^4, \quad \Omega_2^1 = \alpha'\Omega_5^3, \quad \Omega_3^4 = 0, \quad \Omega_4^3 = 0,$$

$$\Omega_3^5 - 2\alpha\alpha'\Omega_5^4 = E\Omega_1^3, \quad \Omega_4^5 - 2\alpha\alpha'\Omega_5^3 = E'\Omega_2^4,$$

$$\Delta\alpha = G\Omega_2^4, \quad \Delta\alpha' = G'\Omega_1^3.$$

Эта система определяет двупараметрическое семейство плоскостей с произволом четырех функций от двух аргументов. Следовательно, выбор дуального репера не нарушает общности этого семейства. Относительно этого репера дуальное (тангенциальное) уравнение гиперповерхности Власова запишется в виде

$$\begin{vmatrix} X^3 & -X^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -X^5 & 0 & X^1 & \alpha' & 0 & -G' & -E' \\ 0 & X^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 & 0 & \alpha & E & G \\ 0 & -X^3 & X^3 & 0 & 0 & -2\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & X^4 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Так как с каждой четверкой направляющих прямых ассоциируется пятая прямая и все пять прямых равноправны в дуальной конфигурации Власова, то с каждой плоскостью ∞^2 семейства связываются пять с ней пересекающихся *прямых Власова* и, следовательно, *пять трехмерных подпространств Власова*.

Известно [3], что с каждым ∞^1 семейством плоскостей $\Omega_2^4 = \lambda\Omega_1^3$ двупараметрического семейства связывается единственное подпространство $a_1 + \rho a_2$, называемое касательной гиперплоскостью ∞^1 семейства, которое определяется уравнением $\alpha'\rho = \alpha\lambda$ и обладает тем свойством, что фокус ∞^2 семейства плоскостей в этом подпространстве совпадает с фокальной точкой данного ∞^1 семейства плоскостей. Согласно этому, пять трехмерных подпространств Власова определяют пять *однопараметрических семейств плоскостей Власова*, проходящих через данную плоскость ∞^2 семейства плоскостей.

Соприкасающаяся дуальная гиперквадрика двумерной поверхности пространства P_4. В работе [3] была доказана теорема: *двойственный образ конгруэнции прямых в P_4 является многообразием всех касательных плоскостей некоторой двумерной поверхности и наоборот.* Следовательно, результаты теории конгруэнций в P_4 можно перевести по принципу двойственности в теорию двумерных поверхностей того же пространства. В п. 3 мы доказали, что с каждым лучом конгруэнции связывается определенная соприкасающаяся гиперквадрика (конус) (3.3), которой принадлежат все прямые дифференциальной окрестности второго порядка. Двойственный результат сформулируется следующим образом: *с каждой точкой двумерной поверхности пространства P_4 связывается определенная соприкасающаяся „гиперквадрика" с уравнением*

$$\begin{vmatrix} X^3 & 0 & A' & C' \\ 0 & -X^4 & C & A \\ 0 & -X^5 & E & 0 \\ X^3 & 0 & 0 & E' \end{vmatrix} = 0,$$

которой принадлежат все касательные плоскости дифференциальной окрестности второго порядка данной точки поверхности.

Если вдоль каждой (проходящей через данную точку двумерной поверхности) линии взять три бесконечно близкие точки, то три касательные плоскости в этих точках определяют единственную четвертую плоскость, пересекающуюся с каждой из них по прямой. Любопытно, что *эта четвертая плоскость совпадает с соприкасающейся плоскостью данной линии.* Соприкасающаяся плоскость с данной плоскостью ∞^1 семейства образует некоторое трехмерное подпространство, называемое *гиперплоскостью соприкосновения.*

Если конгруэнция принадлежит трехмерному подпространству, то ее действительный образ представляет ∞^2 *плоскостей, проходящих через фиксированную точку*, т. е. в этом случае поверхность сжимается в одну точку. Такое семейство плоскостей обладает всеми свойствами, двойственными свойствам конгруэнций трехмерного подпространства.

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 IV 1961

Ս. Ե. Կարապետյան

ՔԱՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՊԱՐԱՄԵՏՐԱՆՈՑ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ (II)

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[2] աշխատության մեջ տրված է քառաչափ տարածության ուղիղների և հարթությունների ընտանիքի գծային տեսությունը, որը հնարավորություն է տալիս անցնելու նույն էլեմենտների բոլոր հնարավոր ընտանիքների պրոյեկտիվ-դիֆերենցիալ երկրաչափությանը։ [3] աշխատության մեջ տրված է նույն տարածության ուղիղների և հարթությունների երկպարամետրանոց ընտանիքների նախնական տեսությունը։

Այս աշխատությունը հանդիսանում է [3]-ի շարունակությունը և նվիրված է ուղիղների երկպարամետրանոց ընտանիքների ավելի բարձր կարգի

դիֆերենցիալ շրջապատի ուսումնասիրությանը։ Ստացված արդյունքները երկվության սկզբունքի համաձայն, կրկնվում են հարթությունների երկպարամետրանոց ընտանիքների համար։

Աշխատության մեջ այդ ընտանիքների տեսությունը բերված է իննաչափ տարածության գրասմանյան բազմաձևության ենթաբազմաձևությունների պրոյեկտիվ-դիֆերենցիալ (կետային) երկրաչափությանը։ Այս մոտեցումը հնարավորություն է տալիս օգտվելու հանրահաշվական երկրաչափության հարուստ տեսությունից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян С. Е.* Сопряженные многообразия и их приложения. ДАН СССР, 133, № 5, 1960.
2. *Карапетян С. Е.* Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 1, 1962.
3. *Карапетян С. Е.* Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 2, 1962.
4. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. *Ходж В.* и *Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. ИЛ, т. I, II, М., 1954.