ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

Обобщенно регулярно монотонные функции

Определение 1. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ принадлежит классу обобщенно регулярно монотонных функций при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, короче — классу R_γ на множестве M, $0 \overline{\in} M$, если там существует последовательность функций

$$\varphi(t) = \varphi_0(t), \quad \varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{|t|^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} \right)', \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n < \cdots \tag{2}$$

и удовлетворяются условия

$$(-1)^k \varphi_k(t) \geqslant 0. \tag{3}$$

В качестве множества M рассматривается промежуток $(0, u]$ и соответствующий класс обобщенно монотонных функций обозначается через

$$R_\gamma(0, u].$$

Определение 2. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ на промежутке $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$T_\gamma \ (T_\gamma(0, u]),$$

если она разлагается в сходящийся на $(0, u]$ квазистепенной ряд

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right), \tag{4}$$

где

$$0 < t \leqslant u, \quad a_0 = \varphi(u),$$

$$a_k = \frac{(-1)^k u^{\gamma_{k-1}+1} \varphi_k(u)}{\prod_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

последовательность $\{\gamma_\nu\}$ определена в (2),

$$\omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

простой контур C здесь и впредь в аналогичных случаях охватывает окрестности всех полюсов подынтегральной функции.

Определение 3. Условимся говорить, что функция

$$\varphi(t) \in AT_\gamma(0, u],$$

если она в промежутке $(0, u]$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд (4).

В работах [1], [2] получены достаточные условия, а в [3] — необходимое и достаточное условие принадлежности функции $\varphi(t)$ классу $T_\gamma(0, u]$.

В настоящей работе дается аналитическая (квазианалитическая) характеристика функций класса $R_\gamma(0, u]$, классифицируются функции $\varphi(t) \in R_\gamma(0, u]$ в зависимости от быстроты роста последовательности $\{\gamma_\nu\}$, а также приводится необходимое и достаточное условие принадлежности функции классу $AT_\gamma(0, u]$ в терминах функций класса $R_\gamma(0, u]$.

§ 1. Аналитическая (квазианалитическая) характеристика функций класса $R_\gamma(0, u]$

Предварительно сформулируем два вспомогательных предложения, первое из которых доказано в [4] (в лемме 1 теоремы 1).

Лемма 1. *Для всяких $\theta_1, \theta>0$ справедливо равенство*

$$\omega_n(\theta_1, \gamma)=\omega_n(\theta, \alpha), \tag{1.1}$$

где

$$\alpha_\nu=\gamma_\nu \frac{\ln \theta_1}{\ln \theta}, \qquad \nu=0, 1, 2, \ldots .$$

Лемма 2. *Для всякого $0<t\leqslant u$ и последовательностей чисел $\{\alpha_\nu\}$, $\{\gamma_\nu\}$, где $\alpha_0=\gamma_0=0$, $0<\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\cdots$, $\alpha_\nu\geqslant\gamma_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство*

$$\frac{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)}{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)}\leqslant\left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1+\frac{r}{\alpha_\nu}}{1+\frac{r}{\gamma_\nu}}, \tag{1.2}$$

где $r>0$ — произвольное число.

Для доказательства леммы поступаем так, как это сделано в [4], т. е. представляем $\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)$ обобщенной формулой Тейлора при последовательности $\{\alpha_\nu\}$.

Будем иметь

$$\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=a_n\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \alpha\right)+$$

$$+\int\limits_u^t dt_0\,\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\,u^z t_0^{-z-\alpha_n-1}\,dz\,\times$$

$$\times\frac{(-1)^n t_0^{\alpha_n}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha_\nu)},$$

где контуры C и C' охватывают соответственно окрестности полюсов подинтегральных функций.

Заметим далее, что

$$a_n=u^{\alpha_{n-1}+1}\varphi_n(u)_\alpha\prod_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^{-1}.$$

Здесь $\varphi_n(t)_\alpha$ представляет n-ую обобщенную производную функции $\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)$ по t при последовательности $\{\alpha_\nu\}$.

Получаем

$$a_n=\frac{(-1)^n\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\zeta+\alpha_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\,\frac{d\zeta}{\zeta+\gamma_\nu}=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}.$$

Это значит, что

$$\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\,\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \alpha\right)+$$

$$+\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\int\limits_u^t dt_0\,\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\,u^z t_0^{-z-1}\,dz\,\frac{(-1)^n\prod\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha_\nu)},$$

или

$$\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\,\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \alpha\right)+\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\int\limits_t^u\omega_n\left(\frac{t}{t_0},\ \alpha\right)I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}\,dt_0, \quad (1.3)$$

где

$$I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\left(\frac{t_0}{u}\right)^{-z}dz.$$

Из теоремы 3 работы [5] следует, что при $0 < t_0 < u$

$$I_n\left(\frac{t_0}{u}\right) > 0.$$

Используя последнее неравенство из (1.3) получаем

$$\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) < \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\,\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)\left[1+\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0\right]. \tag{1.4}$$

Заметим теперь, что для произвольного $r > 0$ имеем

$$\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0 = \int_t^u t_0^{-r}\,dt_0\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}u^z t_0^{-z+r-1}dz \leqslant$$

$$\leqslant t^{-r}\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}u^z\,\frac{t_0^{-z+r}\Big|_{t_0=t}^{u}}{-z+r}dz =$$

$$= t^{-r}\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}t^r}{z-r}\,dz - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}.$$

После замены $z - r = z'$ получим

$$\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0 \leqslant \frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+r+\alpha_\nu}{z+r+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z-r}}{z}\,dz - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} =$$

$$= \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+r+\alpha_\nu}{z+r+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}dz}{z} - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}.$$

Таким образом получаем, что

$$\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0 \leqslant \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} I_n^*\left(\frac{t}{u}\right) - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}, \tag{1.5}$$

где

$$I_n^*\left(\frac{t}{u}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+r+\alpha_\nu}{z+r+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}}{z}\,dz,$$

причем

$$\frac{\partial I_n^*\left(\frac{t_0}{u}\right)}{\partial t_0} = -I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1} < 0.$$

Следовательно,

$$I_n^*\left(\frac{t_0}{u}\right) < I_n^*(0) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu}, \tag{1.6}$$

где $0 < t_0 < u$.

Из (1.4) в силу (1.5) и (1.6) получаем

$$\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)\left[1 + \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} I_n^*\left(\frac{t}{u}\right) - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\right] <$$

$$< \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)\left\{\left(\frac{t}{u}\right)^{-r} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu} - \left[\left(\frac{t}{u}\right)^{-r} - 1\right]\right\} <$$

$$< \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right),$$

т. е.

$$\frac{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)}{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)} < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}.$$

Этим лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Всякая функция*

$$\varphi(t) \in R_\gamma(0, u],$$

принадлежит также классу

$$T_\gamma(0, u],$$

если только последовательность чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots$$

удовлетворяет еще условию

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty. \tag{1.7}$$

Теорема будет доказана, если покажем, что в представлении

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_k^*\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) + R_n(u, t), \tag{1.8}$$

где

$$a_0 = \varphi(u), \quad a_k = u^{\gamma_{k-1}+1} \varphi_k(u), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\omega_k^*\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)},$$

остаточный член

$$R_n(u, t) = \int_u^t \varphi_n(t_0)\, t_0^{\gamma_{n-1}} (-1)^{n-1} \omega_{n-1}^*\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right) dt_0$$

при $t \in (0, u]$ и $n \to \infty$ стремится к нулю.

С этой целью заметим, что для всякого $0 < x < t < u$ имеем

$$0 \leqslant R_n(u, t) = \int_t^u (-1)^n \varphi_n(t_0)\, t_0^{\gamma_{n-1}} \omega_{n-1}^*\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right) dt_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t_0 \in [t, u]} \frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0}, \gamma\right)} \int_t^u (-1)^n \varphi_n(t_0)\, t_0^{\gamma_{n-1}} \omega_{n-1}^*\left(\frac{x}{t_0}, \gamma\right) dt_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t_0 \in [t, u]} \frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0}, \gamma\right)} \int_x^u (-1)^n \varphi_n(t_0)\, t_0^{\gamma_{n-1}} \omega_{n-1}^*\left(\frac{x}{t_0}, \gamma\right) dt_0$$

или

$$0 \leqslant R_n(u, t) \leqslant \sup_{t_0 \in [t, u]} \frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0}, \gamma\right)} R_n(u, x), \tag{1.9}$$

но

$$0 \leqslant R_n(u, x) \leqslant \sup_{t \in [x, u]} \varphi(t) = \varphi(x),$$

так как

$$0 \leqslant R_n(u, x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_k^*\left(\frac{x}{u}, \gamma\right),$$

где

$$a_k \geqslant 0, \quad \omega_k^*\left(\frac{x}{u}, \gamma\right) \geqslant 0.$$

Это значит, что дальнейшая оценка $R_n(u, t)$ сводится к оценке

$$\frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0}, \gamma\right)} = \frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \alpha\right)},$$

где

$$\alpha_\nu = \gamma_\nu \frac{\ln \frac{t_0}{x}}{\ln \frac{t_0}{t}}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, получаем

$$0 < R_n(u, t) \leqslant \varphi(x) \sup_{t_0 \in [t, u]} \frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \alpha\right)}, \tag{1.10}$$

или, в силу леммы 2,

$$0 \leqslant R_n(u, t) < \varphi(x) \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{1 + \frac{r}{\alpha_\nu}}{1 + \frac{r}{\gamma_\nu}} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}. \tag{1.10'}$$

Нам теперь остается заметить, что в силу расходимости ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu}$$

$\lim_{n \to \infty} R_n(u, t) = 0$ для всякого $t \in (0, u]$.

Следствие теоремы 1. *Всякая функция*

$$\varphi(t) \in R_\gamma(0, u]$$

принадлежит также классу $AT_\gamma(0, u]$, если только последовательность чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots$$

удовлетворяет еще условию

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty.$$

§ 2. Классы функций $R_\gamma(0, u]$

Рассмотрим последовательности чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots, \quad 0 = \gamma'_0 < \gamma'_1 < \gamma'_2 < \cdots, \tag{2.1}$$

где

$$\gamma'_\nu \geqslant \gamma_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

и построенные на $(0, u]$ по этим последовательностям классы функций R_γ и $R_{\gamma'}$.

Ниже будет доказана теорема включения для этих классов функций.

Нам понадобится следующий, приведенный в [4], результат.

Для последовательностей (2.1) и для всякого $0<\theta<1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{m}(\zeta+\gamma_\nu')}{\prod_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\theta^{-\zeta}d\zeta \geqslant 0,$$

где m и n — произвольные целые положительные числа.

Теорема 2. *Пусть заданы определенные в* (2.1) *последовательности чисел* $\{\gamma_\nu\}$ *и* $\{\gamma_\nu'\}$ *и соответствующие им классы функций*

$$R_\gamma(0, u] \quad и \quad R_{\gamma'}(0, u].$$

Тогда

$$R_\gamma(0, u]\subset R_{\gamma'}(0, u]. \tag{2.2}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(t)\in R_\gamma(0, u]. \tag{2.3}$$

Представим $\varphi(t)$ обобщенной формулой Тейлора для последовательности чисел $\{\gamma_\nu\}$ в окрестности точки u.

Будем иметь

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)+R_n(u, t, \gamma), \quad t\in(0, u]$$

или

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\frac{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}+$$

$$+\int_t^u(-1)^n\varphi_n(t_0)\,dt_0\,\frac{t_0^{\gamma_{n-1}}}{2\pi i}\int_C\frac{t_0^{\zeta}t^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu)}. \tag{2.4}$$

Теперь последнее тождество обобщенно продифференцируем при последовательности $\{\gamma_\nu'\}$.

Для всякого $0<\mu<n-2$ имеем

$$\varphi_{\mu+1}(t)_{\gamma'}=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k\frac{(-1)^{\mu}\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C\frac{t^{-\gamma_\mu'-1}\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}\prod_{\nu=1}^{\mu}(\zeta+\gamma_\nu')}{\prod_{\nu=1}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta+$$

$$+\int_t^u (-1)^n \varphi_n(t_0)\,dt_0\,\frac{(-1)^\mu t_0^{\gamma_{n-1}} t^{-\gamma'_\mu-1}}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{\mu}(\zeta+\gamma'_\nu)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\,d\zeta.$$

Зная, что $(-1)^k a_k \geqslant 0$,

$$I_{k\mu}\left(\frac{t}{u}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{\mu}(\zeta+\gamma'_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta \geqslant 0,$$

заключаем, что

$$\varphi_\mu(t)_{\gamma'}=(-1)^\mu F(t), \tag{2.5}$$

где

$$F(t)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k I_{k\mu}\left(\frac{t}{u}\right) t^{-\gamma'_\mu-1}+$$

$$+\,t^{-\gamma'_\mu-1}\int_t^u (-1)^n \varphi_n(t_0)\, t_0^{\gamma_{n-1}} I_{n\mu}\left(\frac{t}{t_0}\right) dt_0. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) в силу произвольности n следует, что

$$(-1)^\mu \varphi_\mu(t)_{\gamma'} \geqslant 0, \quad \mu=0, 1, 2, \ldots .$$

Что касается последнего утверждения теоремы, то оно следует из того факта, что при $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty$ всякая функция класса $R_\gamma(0, u]$ в то же время является функцией класса $C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu,\ \varkappa\right\}}$ (см. [1], стр. 59), а для классов функций $C_{\left\{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu,\ \varkappa\right\}}$ и $C_{\left\{\prod_1^n \gamma'_\nu,\ \varkappa\right\}}$ в условиях нашей теоремы, в работе [1] доказано, что вообще говоря

$$C_{\left\{\prod_1^n \gamma'_\nu,\ \varkappa\right\}} \overline{\subset} C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu,\ \varkappa\right\}}.$$

Этим теорема доказана.

§ 3. Функции класса $AT_\gamma(0, u]$

Из следствия теоремы 1 настоящей работы следует, что

$$R_\gamma(0, u] \subset AT_\gamma(0, u],$$

поэтому возникает вопрос установления взаимосвязи классов функций $R_\gamma(0, u]$ и $AT_\gamma(0, u]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция $\varphi(t)$ принадлежала классу функций*

$$AT_{\gamma}(0, u],$$

где

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3<\cdots<\gamma_n<\cdots$$

необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух функций класса $R_{\gamma}(0, u]$.

Доказательство. *Необходимость* условия теоремы будет доказана, если покажем, что абсолютно сходящийся ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \quad t\in(0, u] \tag{3.1}$$

можно в $(0, u]$ почленно дифференцировать в любое число раз, в результате чего не нарушится равномерная и абсолютная сходимость получаемого ряда.

С этой целью, полагая, что после μ кратного обобщенного дифференцирования ряда (3.1) при последовательности $\{\gamma_\nu\}$ получен абсолютно и равномерно сходящийся на $(0, u]$ ряд

$$(-1)^{\mu} t^{-\gamma_{\mu-1}-1} \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}, \tag{3.1'}$$

покажем, что таким свойством обладает и ряд, получаемый после $(\mu+1)$ кратного дифференцирования (3.1) при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, т. е. ряд

$$(-1)^{\mu+1} t^{-\gamma_{\mu}-1} u^{\gamma_{\mu+1}} \sum_{n=\mu+1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)} =$$

$$=\prod_{\nu=1}^{\mu}\gamma_\nu (-1)^{\mu+1} t^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1} \sum_{n=\mu+1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}. \tag{3.1''}$$

Имеем

$$\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})} =$$

$$= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} a_n \prod_{\nu=\mu+2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}} \omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right),$$

где

$$\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}.$$

Рассмотрим

$$\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)\right|=$$

$$=\frac{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}{\gamma_{\mu+1}}\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)\right|\times$$

$$\times\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)}, \tag{3.2}$$

где $0<t_1<t\leqslant u$, и оценим сверху

$$\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)}=\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)}\cdot\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}, \tag{3.3}$$

где $0<t_1<t'<t<u$.

Согласно лемме 1 параграфа 1 имеем

$$\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)}\leqslant\left(\frac{t'}{u}\right)^{-r}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{1+\frac{r}{\alpha_\nu-\alpha_\mu}}{1+\frac{r}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\cdot\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}. \tag{3.3'}$$

Для оценки сверху

$$\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}$$

имеем

$$\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=-\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\cdot\frac{\omega'_{n,\,\mu}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\left(\frac{t}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1}}$$

или

$$\frac{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)}{\left(\frac{t}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}}\geqslant\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\int\limits_t^u\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\frac{dt}{u}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\omega_{n,\mu}\left(\frac{t'}{u},\gamma\right)\geqslant\left(\frac{t'}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\int\limits_{t'}^{t}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\frac{dt}{u}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{t'}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\frac{t-t'}{u}$$

или

$$0\leqslant\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t'}{u},\gamma\right)}\leqslant\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\cdot\frac{u}{(t-t')\left(\frac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}}. \tag{3.4}$$

Из (3.3) в силу (3.3′) и (3.4) будем иметь

$$\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\gamma\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{1+\frac{r}{\alpha_\nu-\alpha_\mu}}{1+\frac{r}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\frac{u}{(t-t')\left(\frac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}}, \tag{3.5}$$

где $0<t_1<t'<t<u$.

Из (3.2), в силу (3.5), получаем, что

$$\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}{\gamma_\mu}\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\gamma\right)\right|\cdot\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\times$$

$$\times\left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{1+\dfrac{r}{\alpha_\nu-\alpha_\mu}}{1+\dfrac{r}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\cdot\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\cdot\frac{u}{\left(\dfrac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}(t-t')}$$

или

$$\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\frac{\gamma_\mu^{-1}}{t-t'}\prod_{\nu=\mu+2}^{p}\frac{1+\dfrac{r}{\alpha_\nu-\alpha_\mu}}{1+\dfrac{r}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\cdot\frac{u}{\left(\dfrac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}}\times$$

$$\times\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\gamma\right)\right|. \tag{3.6}$$

При достаточно большом p мы можем взять t (а следовательно t') сколь угодно близким к t_1.

Неравенство (3.6) показывает, что при достаточно большом p и $t>t_1$ будем иметь

$$\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — число сколь угодно малое.

Из (3.1''), в силу последнего неравенства, следует, что ряд

$$\varphi_{\mu+1}(t)=\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu(-1)^{\mu+1}t^{-\gamma_\mu-1}\sum_{n=\mu+1}^{\infty}a_n\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\left(\dfrac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}$$

сходится абсолютно в области $t\in(0,u]$ и равномерно в каждой ее замкнутой части.

Для завершения доказательства необходимости условия теоремы нам остается записать

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|+a_n}{2}\omega_n\left(\frac{t}{u},\gamma\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|-a_n}{2}\omega_n\left(\frac{t}{u},\gamma\right)$$

и заметить, что оба эти ряда можно почленно дифференцировать любое число раз, причем их суммы $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ суть обобщенно регулярно монотонные функции при последовательности $\{\gamma_\nu\}$.

Достаточность условия теоремы следует из того факта, что всякая обобщенно регулярно монотонная функция $\varphi(t)$ $(\varphi(t) \in R_\gamma(0, u])$ в то же время является функцией класса

$$AT_\gamma(0, u].$$

Этим теорема 3 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 X 1961

Հ. Վ. Բադալյան

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Սահմանում: Պայմանավորվենք ասել, որ $\varphi(t)$ ֆունկցիան M բազմության վրա $0 \in M$ պատկանում է ընդհանրացրած ռեգուլյար մոնոտոն ֆունկցիաների դասին ըստ թվերի $\{\gamma_\nu\}$ հաջորդականության, եթե գոյություն ունի ֆունկցիաների

$$\varphi(t) = \varphi_0(t), \quad \varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{|t|^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right)', \quad k = 1, 2, \ldots,$$

(որտեղ $0 = \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_n \leq \cdots$) հաջորդականությունը և բավարարում են

$$(-1)^k \varphi_k(t) \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad t \in M$$

պայմանները:

Հոդվածում տրվում է ֆունկցիաների վերը նշված դասի քվազիանալիտիկ բնութագիրը: Ապացուցվում է թեորեմա այն մասին, թե ե՞րբ թվերի այս կամ այն հաջորդականության համար կառուցված ֆունկցիաների դասերից մեկն ընդգրկվում է մյուսի մեջ: Ապացուցվում է թեորեմա ֆունկցիաները բացարձակ զուգամետ քվազիաստիճանային շարքերի վերլուծության վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бадалян Г. В.* Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций. Известия АН АрмССР, **6**, № 5—6, 1953.
2. *Бадалян Г. В.* Условие разложимости функций в квазистепенной ряд в основном промежутке. ДАН СССР, **136**, № 1, 1961.
3. *Бадалян Г. В.* О критерии разложимости функций в квазистепенной ряд. Известия АН СССР (сдана в печать).
4. *Бадалян Г. В.* Условие разложимости функций в квазистепенной ряд вне основного промежутка. Известия АН СССР, серия математическая (находится в печати).
5. *Бадалян Г. В.* A_γ — абсолютно монотонные функции. Известия АН АрмССР, серия физико-математических наук, **14**, № 4, 1961.