

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. Киракосян

Квазистатическая задача тонкой безмоментной оболочки нулевой гауссовой кривизны в условиях нелинейной ползучести материала

1. Задачи безмоментной оболочки в условиях ползучести материала рассматривались Л. М. Качановым [1], И. И. Гольденблатом [2] и другими авторами.

В настоящей работе рассматривается квазистатическое равновесие тонкой безмоментной оболочки нулевой гауссовой кривизны и постоянной толщины h в условиях нелинейной ползучести материала под действием переменной во времени внешней нагрузки.

Предполагается, что

- а) девиаторы напряжений и деформаций имеют одинаковые направления в любой момент времени t ,
- в) материал несжимаем и соотношения ползучести имеют вид [3, 4]

$$\Psi[\varepsilon_i(t)] = K_0 \varepsilon_i^p(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_i(t)$, $\sigma_i(t)$ — интенсивности деформаций и напряжений, $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, $\Psi(\varepsilon_i)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную связь между напряжениями и деформациями, τ_1 — возраст материала, $K_0 > 0$ и $p < 1$ — физические постоянные, определяемые из опыта при испытании на простую ползучесть.

Статические и геометрические уравнения оболочки в рассматриваемом случае имеют вид [5]

$$\begin{aligned} (A = 1, R_1 = \infty, R_2 = R) \\ \frac{\partial(BT_1)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + BX = 0, \\ \frac{\partial(BS)}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + BY = 0, \\ \frac{T_2}{R} + Z = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

* Для упрощения записи обозначения всех аргументов часто будем опускать, оставляя только необходимые.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} u - \frac{w}{R}, \\ 2\gamma_{12} = \omega &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + B \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{B} \right),\end{aligned}\quad (1.3)$$

где α, β — ортогональные криволинейные координатные линии, совпадающие с линиями кривизны срединной поверхности оболочки; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы; R_1 и R_2 — радиусы главных кривизн; X, Y, Z — соответственно проекции внешней нагрузки на направления координатных линий α, β и по внутренней нормали срединной поверхности; u, v и w — перемещения по направлениям α, β и по нормали; T_1, T_2, S — тангенциальные силы; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ — деформации срединной поверхности.

Интегрируя уравнения (1.2), для T_1, T_2 и S получим

$$\begin{aligned}T_1 &= -\frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B^2} \int_{\beta_1}^{\beta} B \frac{\partial(RZ)}{\partial \beta} - B^2 Y \right] d\alpha \Big|_{\beta_1} d\beta - \\ &\quad - \frac{1}{B} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(\frac{\partial B}{\partial z} RZ + BX \right) d\alpha + \frac{C_1(\beta, t)}{B}, \\ T_2 &= -RZ, \\ S &= \frac{1}{B^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left[B \frac{\partial(RZ)}{\partial \beta} - B^2 Y \right] d\alpha + \frac{C_2(\beta, t)}{B^2},\end{aligned}\quad (1.4)$$

где C_1 и C_2 — произвольные функции интегрирования.

В силу принятых предположений будем иметь

$$\begin{aligned}K_0 h \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_1 &= [T_1(t) - T(t)] - \int_{\alpha_1}^{\alpha} [T_1(\tau) - T(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ K_0 h \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_2 &= [T_2(t) - T(t)] - \int_{\alpha_1}^{\alpha} [T_2(\tau) - T(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ K_0 h \gamma_{12}^{-1} \gamma_{12} &= S(t) - \int_{\alpha_1}^{\alpha} S(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau,\end{aligned}\quad (1.5)$$

где

$$T = \frac{\sigma}{3} h = \frac{T_1 + T_2}{3}, \quad (1.6)$$

σ — линейный инвариант тензора напряжений [6].

Из интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.5), с учетом (1.6), следует

$$\begin{aligned} T_1 &= K_0 h \left[\varepsilon_1^{n-1} (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \int_{\tau_1}^t \varepsilon_1^{n-1} (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) R(t, \tau) d\tau \right], \\ T_2 &= K_0 h \left[\varepsilon_2^{n-1} (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + \int_{\tau_1}^t \varepsilon_2^{n-1} (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) R(t, \tau) d\tau \right], \\ S &= K_0 h \left[\varepsilon_1^{n-1} \gamma_{12} + \int_{\tau_1}^t \varepsilon_1^{n-1} \gamma_{12} R(t, \tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра релаксации, т. е. ядра $\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$. После простых преобразований, из равенств (1.7) получим

$$\frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} = \frac{\Phi(T_1)}{\Phi(T_2)}, \quad \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\gamma_{12}} = \frac{\Phi(T_1)}{\Phi(S)}, \quad (1.8)$$

где

$$\Phi[x(t)] = x(t) - \int_{\tau_1}^t x(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.9)$$

В силу (1.8) справедливы соотношения

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 F_1, \quad \text{где } F_1 = \frac{\Phi(T_1) - 2\Phi(T_2)}{\Phi(T_2) - 2\Phi(T_1)}, \quad (1.10)$$

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 F_2, \quad \text{где } F_2 = \frac{3\Phi(S)}{2\Phi(T_1) - \Phi(T_2)}. \quad (1.11)$$

Далее, решая первое уравнение (1.7) и учитывая, что [6]

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \gamma_{12}^2}, \quad (1.12)$$

получим

$$\varepsilon_1 = \left\{ \frac{1}{3K_0 h} [2\Phi(T_1) - \Phi(T_2)] \varphi^{1-n} \right\}^{\frac{1}{n}}, \quad (1.13)$$

где

$$\varphi = \sqrt{1 + F_1 + F_1^2 + F_2^2}. \quad (1.14)$$

Из (1.3), (1.10), (1.11) и (1.13) для перемещений точек срединной поверхности оболочки будем иметь

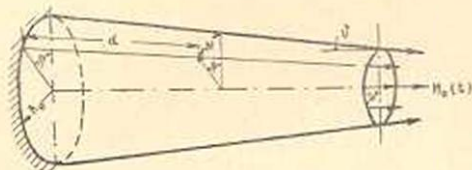
$$u = \left(\frac{1}{3K_0 h} \right)^{\frac{1}{n}} \int_{\tau_1}^t [2\Phi(T_1) - \Phi(T_2)] \varphi^{1-n} \frac{1}{\tau^n} d\tau + C_3(\beta, t), \quad (1.15)$$

$$v = B \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left[\frac{2\varepsilon_1 F_2}{B} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right] d\alpha + BC_4(\beta, t), \quad (1.16)$$

$$w = R \left[\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - \varepsilon_1 F_1 \right]. \quad (1.17)$$

Произвольные функции интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 определяются из граничных условий.

2. Рассмотрим свободную от поверхностных нагрузок ($X=Y=Z=0$) круговую усеченно-коническую оболочку, один конец которой зашпелен, а на другом конце дано перемещение по образующей.



Фиг. 1.

Положение произвольной точки M на срединной поверхности оболочки будет определяться расстоянием точки M до зашпеленного конца по образующей (α) и угловой координатой (β) (фиг. 1).

Коэффициенты первой квадратичной формы будут

$$A = 1, \quad B = R = \left(R_0 - \frac{R_0 - r_0}{l} \alpha \right) \frac{1}{\cos \vartheta} \quad (2.1)$$

(R_0 и r_0 — радиусы концевых сечений, ϑ — угол конусности). Граничные условия задачи таковы

$$\begin{aligned} u|_{\alpha=0} &= 0, & u|_{\alpha=l} &= u_0(t), \\ v|_{\alpha=0} &= 0, & v|_{\alpha=l} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

(l — длина конуса по образующей).

В силу осесимметричности задачи и условий (2.2) имеем

$$T_z - S = 0. \quad (2.3)$$

Из (1.4), (1.10), (1.11) и (1.14) получим

$$T_1 = \frac{C_1(t)}{R(\alpha)}, \quad F_1 = -\frac{1}{2}, \quad F_2 = 0, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.4)$$

Интегрируя (1.15), получим

$$u = \frac{A_1 [\Phi(C_1)]^{\frac{1}{\mu}}}{\left(R_0 - \frac{R_0 - r_0}{l} \alpha \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}} + C_2(t), \quad (2.5)$$

где

$$A_1 = \left(\frac{2}{3K_0 h} \right)^{\frac{1}{\mu}} \frac{\mu l}{(1-\mu)(R_0 - r_0)} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{1-\mu}{2\mu}} \frac{1}{(\cos \vartheta)^{\frac{1}{\mu}}}. \quad (2.6)$$

Удовлетворив граничным условиям (2.2), получим

$$\Phi(C_1) = A_2^{\frac{\mu}{1-\mu}} u_0^{\frac{\mu}{1-\mu}}(t), \quad C_2(t) = -\frac{A_2}{R_0^{\frac{\mu}{1-\mu}}} u_0(t), \quad (2.7)$$

где

$$A_2 = \frac{(R_0 r_0)^{\frac{1-\mu}{\mu}}}{A_1 \left(R_0^{\frac{1-\mu}{\mu}} - r_0^{\frac{1-\mu}{\mu}} \right)}, \quad A_3 = A_1 A_2. \quad (2.8)$$

Внеся (2.7) в (2.5) для u окончательно будем иметь

$$u = A_3 \left[\frac{1}{\left(R_0 - \frac{R_0 - r_0}{l} \alpha \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}} - \frac{1}{R_0^{\frac{1-\mu}{\mu}}} \right] u_0(t). \quad (2.9)$$

Из (1.17) для нормального перемещения имеем

$$w = A_3 \frac{R_0 - r_0}{\mu l} \left[\frac{1 - 3\mu}{2 \left(R_0 - \frac{R_0 - r_0}{l} \alpha \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}} + \frac{\mu}{R_0^{\frac{1-\mu}{\mu}}} \right] u_0(t). \quad (2.10)$$

Для усилия T_1 , из (2.4) с учетом (1.9) и (2.7) будем иметь

$$T_1(\alpha, t) = \frac{A_2^{\frac{\mu}{1-\mu}}}{R_0 - \frac{R_0 - r_0}{l} \alpha} \left[u_0^{\frac{\mu}{1-\mu}}(t) + \int_{t_1}^t u_0^{\frac{\mu}{1-\mu}}(\tau) R(t, \tau) d\tau \right]. \quad (2.11)$$

В частном случае, когда

$$u_0(t) = u_0 = \text{const} \quad (2.12)$$

получится задача о релаксации напряжений. Момент времени t_1 , когда T_1 обращается в нуль, определится из условия

$$1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau = 0. \quad (2.13)$$

3. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиуса R и длины l , со следующими условиями на ее границах

$$\left. \begin{aligned} X &= X(t), \\ Y &= 0, \\ Z &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ на срединной поверхности,} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} u \Big|_{\alpha=0} &= v \Big|_{\alpha=0} = 0 \\ u \Big|_{\alpha=l} &= v \Big|_{\alpha=l} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ на краях.} \quad (3.2)$$

Из (1.4), (3.1) и (3.2) имеем

$$T_z = S = 0, \quad v = 0. \quad (3.3)$$

Так как материал оболочки имеет одинаковые физико-механические свойства на растяжение и сжатие, то в любой момент времени опорные реакции будут

$$-\frac{X(t)l}{2}. \quad (3.4)$$

Следовательно

$$T_1(z, t) = X(t) \left(\frac{l}{2} - z \right). \quad (3.5)$$

Из (1.15), с учетом (3.5), получим

$$u = -A_1 [\Phi(X)]^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{l}{2} - z \right)^{\frac{1+\mu}{\mu}} + C(t), \quad (3.6)$$

где

$$A_1 = \left(\frac{2}{3K_0 h} \right)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{1-\mu}{2\mu}}, \quad (3.7)$$

$C(t)$ определяется из (3.2)

$$C(t) = A_1 [\Phi(X)]^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{l}{2} \right)^{\frac{1+\mu}{\mu}}. \quad (3.8)$$

Внеся (3.8) в (3.6) окончательно получим

$$u(z, t) = A_1 [\Phi(X)]^{\frac{1}{\mu}} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^{\frac{1+\mu}{\mu}} - \left(\frac{l}{2} - z \right)^{\frac{1+\mu}{\mu}} \right]. \quad (3.9)$$

Прогибы определяются по (1.17)

$$w(z, t) = \frac{A_1 R}{2} \frac{1+\mu}{\mu} [\Phi(X)]^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{l}{2} - z \right)^{\frac{1}{\mu}}. \quad (3.10)$$

На фиг. 2 показана картина деформаций оболочки.

Ереванский государственный
университет

Поступила 14 VII 1961

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

**ՈՋ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԵՆԹԱՐԿՎՈՂ ՋՐՈՅԱԿԱՆ ԳԱՌԻՍՅԱՆ
ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՅՈՂ ԲԱՐԱԿ ԱՆՄՈՍԵՆՏ ՔԱՂԱՆՔԻ
ՔՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ ԽՆԳԻՐԸ**

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է բարակ, անմոմենտ, զրոյական զատարան կորույթուն ունեցող թաղանթի քվադրատառիկ հավասարակշռությունը մասնակից կախված բևեռի ազդեցության տակ

Որպես մասնավոր դեպքեր դիտարկվում են կոնտինյան և դիսկոնտինյան թափանցանքը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Ползучесть и несущая способность оболочек. Госстройиздат, М., 1960.
3. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 23, в. 5, 1959.
4. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, М., 1950.