

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Об изгибе длинных упругих пластинок, движущихся
в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью

Исследование напряженного и деформированного состояний тонкой упругой шарнирно-закрепленной по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки постоянной толщины, движущейся с постоянной сверхзвуковой скоростью в газовой среде, учитывая поршневую теорию А. А. Ильюшина [1], рассмотрено в работе [2].

Вопросам устойчивости процессов деформирования сплошных тел, движущихся в газе, посвящены некоторые работы (см. [3]).

В настоящей статье используется метод малого параметра* для приближенного решения задачи изгиба защемленной по краям длинной и узкой пластинки произвольной симметричной формы, движущейся с постоянной сверхзвуковой скоростью в газовой среде и наклоненной под углом α по направлению движения.

Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра λ , введенного в уравнение контура области. Исследован вопрос об асимптотической сходимости этого ряда.

§ 1. Постановка задачи

Как известно, задача о нахождении прогибов пластинки, изгибающейся под действием перпендикулярных к ее плоскости сил, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (1.1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

при определенных граничных условиях.

* В 1932 году Дунканом [4] был предложен метод решения задачи кручения и изгиба изотропных стержней, основанный на разложении искомой функции по степеням малого параметра. В дальнейшем этот метод математически обоснован Д. Ю. Павловым [5, 6]. В работах [7—9] обобщен метод, развитый в работах [5, 6]. Я. Л. Луинд [10] распространил метод малого параметра на задачи об изгибе длинных защемленных пластин.

Здесь $w(x, y)$ — прогиб пластинки, h — толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона материала пластинки, E — модуль Юнга материала пластинки.

В рассматриваемом случае $q(x, y)$ — аэроэстатическая нагрузка на пластинку, подсчитанная по формуле А. А. Ильюшина [1]

$$q(x, y) = \frac{p_0 \alpha}{c_0} c \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.2)$$

Здесь p_0 — давление газа на бесконечности, α — показатель политропы газа, c_0 — скорость звука в газе на бесконечности, α — угол между плоскостью пластинки и направлением движения.

Для случая защемленной по краям пластинки на границе имеем условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

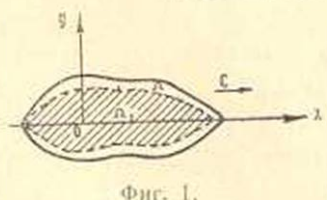
§ 2. Метод малого параметра для рассматриваемой задачи

Допустим, что область Ω ограничена кривыми (фиг. 1)

$$y = \pm \varphi(x). \quad (2.1)$$

Обозначим через Ω_1 область, целиком лежащую в Ω и ограниченную кривыми

$$y = \pm \lambda \varphi(x) \quad (0 < \lambda < 1). \quad (2.2)$$



Фиг. 1.

Краевая задача для области Ω_1 имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + A \frac{\partial w}{\partial x} = B,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

при

$$y = \pm \lambda \varphi(x),$$

где

$$A = -\frac{p_0 \alpha}{c_0 D} c, \quad B = -A \alpha.$$

Каждому значению параметра λ отвечает некоторое единственное, регулярное в области Ω_1 решение $w = w(x, y; \lambda)$ краевой задачи (2.3).

Сделаем замену переменных

$$x = x, \quad y = \lambda \eta. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) приведет к виду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + A \frac{\partial w}{\partial x} = B, \quad (2.5)$$

а краевые условия примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad (2.6)$$

при $y = \pm \lambda \varphi(x),$

т. е. $\eta = \pm \varphi(x).$

Решение краевой задачи (2.5), (2.6) ищем в виде ряда

$$w(x, \eta; \lambda) = w_0(x, \eta) + \lambda w_1(x, \eta) + \lambda^2 w_2(x, \eta) + \dots \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в уравнение (2.5) и умножив на λ^4 , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} (w_0 + \lambda w_1 + \dots) + 2\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \eta^2} (w_0 + \lambda w_1 + \dots) + \\ & + \lambda^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} (w_0 + \lambda w_1 + \dots) + \lambda^4 A \frac{\partial}{\partial x} (w_0 + \lambda w_1 + \dots) = \lambda^4 B. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Потребовав тождественного удовлетворения последнего уравнения по λ , получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w_0}{\partial \eta^4} = 0, \\ & \frac{\partial^4 w_1}{\partial \eta^4} = 0, \\ & \frac{\partial^4 w_2}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \eta^2} = 0, \\ & \frac{\partial^4 w_3}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial \eta^2} = 0, \\ & \frac{\partial^4 w_4}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + A \frac{\partial w_0}{\partial x} = B, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{\partial^4 w_{k+1}}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{k+2}}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + A \frac{\partial w_k}{\partial x} = 0, \\ & (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для того, чтобы ряд (2.7) удовлетворял граничным условиям (2.6), достаточно, чтобы этим граничным условиям удовлетворяла каждая из функций $w_k(x, \eta)$.

§ 3. Решение системы уравнений (2.9)

Из первых четырех уравнений системы (2.9) и граничных условий (2.6) получаем

$$w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 0. \quad (3.1)$$

Пятое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^4 w_4}{\partial \eta^4} = B. \quad (3.2)$$

Решив это уравнение при граничных условиях (2.6), находим

$$w_4(x, \eta) = \frac{B}{24} (\eta^2 - \varphi^2)^2.$$

Из шестого уравнения системы (2.9) и граничных условий (2.6) видно, что

$$w_3 = 0.$$

Легко видеть, что все $w_{2n+1} = 0$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Для определения $w_6(x, \eta)$ получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w_6}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 w_4}{\partial x^2 \partial \eta^2} = 0.$$

Решив его, получим

$$w_6(x, \eta) = \frac{B}{72} (\varphi^2)'' (\eta^2 - \varphi^2)^2. \quad (3.3)$$

Для $w_8(x, \eta)$ получаем выражение

$$\begin{aligned} w_8(x, \eta) = & \frac{B}{6 \cdot 6!} (\eta^6 - \varphi^6) [(\varphi^2)' - 11 (\varphi^2)^{IV}] + \\ & + \frac{B}{3 \cdot 4!} (\eta^4 - \varphi^4) \left[((\varphi^2)')^2 + 2 (\varphi^2)' (\varphi^2)''' + \varphi^2 (\varphi^2)^{IV} - \frac{1}{8} (\varphi^4)^{IV} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} (\varphi^4)' \right] - \frac{B}{2!} \varphi^2 (\eta^2 - \varphi^2) \left\{ \frac{\varphi^2}{6!} [(\varphi^2)' - 11 (\varphi^2)^{IV}] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3 \cdot 3!} \left[((\varphi^2)')^2 + 2 (\varphi^2)' (\varphi^2)''' + \varphi^2 (\varphi^2)^{IV} - \frac{1}{8} (\varphi^4)^{IV} - \frac{1}{8} (\varphi^4)' \right] \right\}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Таким образом, для прогиба пластинки $w(x, \eta; \lambda)$ получаем выражение с точностью порядка λ^{10}

$$\begin{aligned} w(x, \eta; \lambda) = & \lambda^4 \frac{B}{24} (\eta^2 - \varphi^2)^2 + \lambda^6 \frac{B}{72} (\varphi^2)'' (\eta^2 - \varphi^2)^2 + \\ & + \lambda^8 \left\{ \frac{B}{6 \cdot 6!} (\eta^6 - \varphi^6) [(\varphi^2)' - 11 (\varphi^2)^{IV}] + \frac{B}{3 \cdot 4!} (\eta^4 - \varphi^4) \left[((\varphi^2)')^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 (\varphi^2)' (\varphi^2)''' + \varphi^2 (\varphi^2)^{IV} - \frac{1}{8} (\varphi^4)^{IV} - \frac{1}{8} (\varphi^4)' \right] - \right. \\ & \left. - \frac{B}{2!} \varphi^2 (\eta^2 - \varphi^2) \left[\frac{\varphi^2}{6!} [(\varphi^2)' - 11 (\varphi^2)^{IV}] + \frac{1}{3 \cdot 3!} \left[((\varphi^2)')^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 (\varphi^2)' (\varphi^2)''' + \varphi^2 (\varphi^2)^{IV} - \frac{1}{8} (\varphi^4)^{IV} - \frac{1}{8} (\varphi^4)' \right] \right\} + O(\lambda^{10}). \quad (3.6) \end{aligned}$$

В дальнейшем, при рассмотрении конкретных случаев, для простоты в формуле (3.6) будем учитывать только первые два члена, т. е.

$$w(x, \eta; \lambda) = \lambda^4 \frac{B}{24} (\eta^2 - \varphi^2)^2 + \lambda^6 \frac{B}{72} (\varphi^2)'' (\eta^2 - \varphi^2)^2 + O(\lambda^8). \quad (3.7)$$

Для изгибающих моментов, перерезывающих сил и аэростатической нагрузки соответственно получим

$$M_x = \lambda^4 \frac{B(-D)}{6} \left\{ \frac{1}{2} [(\varphi^2)'' - (\varphi^2)'' (\eta^2 - \varphi^2)] + \nu (3\eta^2 - \varphi^2) \right\} + \\ + \lambda^6 \frac{B(-D)}{18} \left\{ \frac{1}{2} (\eta^2 - \varphi^2) \left[\frac{(\varphi^2)^{IV}}{2} - (\eta^2 - \varphi^2) - 2(\varphi^2)''' (\varphi^2)' - (\varphi^2)''^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\varphi^2)'' (\varphi^2)'' + \nu (\varphi^2)'' (3\eta^2 - \varphi^2) \right\} + O(\lambda^8), \quad (3.8)$$

$$Q_x = \lambda^4 \frac{B(-D)}{6} \left\{ \frac{1}{2} [3(\varphi^2)'' (\varphi^2)' - (\varphi^2)''' (\eta^2 - \varphi^2)] - (\varphi^2)' \right\} + \\ + \lambda^6 \frac{B(-D)}{9} \left\{ \frac{1}{4} (\eta^2 - \varphi^2) \left[\frac{(\varphi^2)^{IV}}{2} (\eta^2 - \varphi^2) - 3(\varphi^2)^{IV} (\varphi^2)' - \right. \right. \\ \left. - 4(\varphi^2)''' (\varphi^2)'' \right] + 3(\varphi^2)' [(\varphi^2)''' (\varphi^2)' + (\varphi^2)''^2] + \\ \left. + (3\eta^2 - \varphi^2) \left[\frac{(\varphi^2)'''}{2} - (\varphi^2)' (\varphi^2)'' \right] \right\} + O(\lambda^8), \quad (3.9)$$

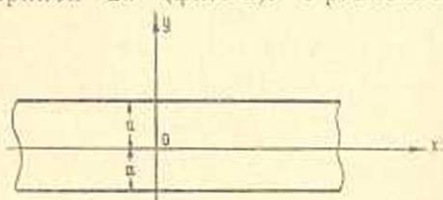
$$q(x, \eta) = BD - \lambda^4 \frac{B^2 D}{12\alpha} (\varphi^2)' (\eta^2 - \varphi^2) + \\ + \lambda^6 \frac{B^2 D}{36\alpha} \left\{ (\eta^2 - \varphi^2)^2 \left[\frac{(\varphi^2)'''}{2} - (\varphi^2)' (\varphi^2)'' \right] \right\} + O(\lambda^8), \quad (3.10)$$

§ 4. Частные случаи

1. *Бесконечная полоса.* Исследуется действие аэроэстатической нагрузки на бесконечную полосу шириной $2a$ (фиг. 2). Уравнение бесконечной полосы будет

$$y = \pm \lambda a \quad \text{или} \quad \eta = \pm a.$$

Легко видеть, что все w_k , кроме w_1 , обращаются в нуль. Тогда из (3.7) получаем точное решение краевой задачи (2.3)



Фиг. 2.

$$w = \frac{B}{24} (y^2 - a^2)^2. \quad (4.1)$$

Изгибающие моменты, перерезывающие силы и аэроэстатическая нагрузка определяются по формулам (3.8) — (3.10)

$$M_x = (-D) \frac{B}{6} (3y^2 - a^2),$$

$$Q_x = 0,$$

$$q(x, y) = \frac{P_0 x}{c_0} c.$$

2. Удлиненная треугольная пластинка (фиг. 3). В качестве малого параметра естественно принять отношение $\frac{b}{a} = \lambda$.

Уравнения линий OA и OB можно представить в виде

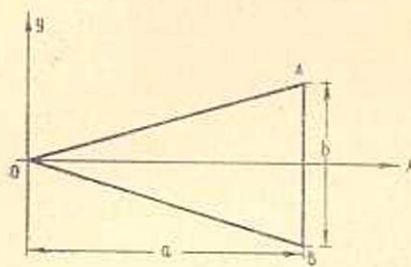
$$y = \pm \lambda \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{x}{2}.$$

Из (3.7) получаем

$$w(x, \eta) = \lambda^4 \frac{B}{24} \left(\eta^2 - \frac{x^2}{4} \right)^2 + \lambda^6 \frac{B}{144} \left(\eta^2 - \frac{x^2}{4} \right)^2 + O(\lambda^8).$$



Фиг. 3.

Из (3.8)–(3.10) находим

$$\begin{aligned} M_x = & \lambda^4 \frac{B(-D)}{24} \left[- \left(\eta^2 - \frac{3x^2}{4} \right) + \right. \\ & \left. + \nu (12\eta^2 - x^2) \right] + \\ & + \lambda^6 \frac{B(-D)}{144} \left[- \left(\eta^2 - \frac{3x^2}{4} \right) + \right. \\ & \left. + \nu (12\eta^2 - x^2) \right] + O(\lambda^8), \end{aligned}$$

$$Q_x = \lambda^4 \frac{B(-D)}{48} (3x - 4) + \lambda^6 \frac{B(-D)}{144} [x(-12\eta^2 + x^2 + 6)] + O(\lambda^8),$$

$$q(x, \eta) = BD - \lambda^4 \frac{B^2 D}{96a} [x(4\eta^2 - x^2)] - \lambda^6 \frac{B^2 D}{768a} [x(4\eta^2 - x^2)^2] + O(\lambda^8).$$

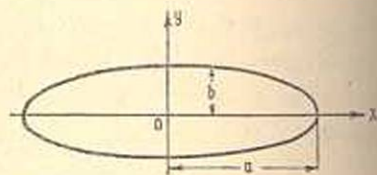
3. Эллиптическая пластинка (фиг. 4). Уравнение контура имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

или

$$y = \pm \lambda \varphi(x),$$

где



Фиг. 4.

$$\varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \lambda = \frac{b}{a}.$$

Из (3.7) получаем

$$w = \lambda^4 \frac{B}{12} (\eta^2 + x^2 - a^2)^2 - \lambda^6 \frac{B}{12} (\eta^2 + x^2 - a^2)^2 + O(\lambda^8).$$

Из (3.8)–(3.10) получаем

$$M_x = \lambda^4 \frac{B(-D)}{6} [(3 + \nu)x^2 + (3\nu + 1)\eta^2 - (1 + \nu)a^2] -$$

$$-\lambda^6 \frac{B(-D)}{9} [(3+\nu)x^3 + (3\nu+1)\eta^2 - (1+\nu)a^2] + O(\lambda^8),$$

$$Q_x = \lambda^4 \frac{2B(-D)}{3} x - \lambda^6 \frac{2B(-D)}{3} x (3\eta^2 + x^2 - a^2 + 6) + O(\lambda^8),$$

$$q(x, \eta) = BD + \lambda^4 \frac{B^2 D}{6x} x (\eta^2 + x^2 - a^2) - \lambda^6 \frac{B^2 D}{9x} x (\eta^2 + x^2 - a^2)^2 + O(\lambda^8).$$

4. Авиационный профиль (фиг. 5). Уравнение контура есть

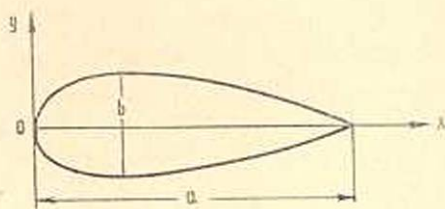
$$y = \pm \lambda \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{a}} \sqrt{x} (a-x), \quad \lambda = \frac{b}{a},$$

$$\varphi^2 = c_1 x (a-x)^2, \quad c_1 = \frac{27}{16a}.$$

Из (3.7) находим выражение для прогиба



Фиг. 5.

$$\begin{aligned} w = & \lambda^4 \frac{B}{24} \left[\eta^2 - \right. \\ & \left. - \frac{27}{16a} (a^2 x - 2ax^2 + x^3) \right]^2 + \\ & + \lambda^6 \frac{B}{64} \frac{3}{a} (-2a + 3x) \left[\eta^2 - \frac{27}{16a} (a^2 x - 2ax^2 + x^3) \right]^2 + O(\lambda^8). \end{aligned}$$

Из (3.8)–(3.9) имеем

$$\begin{aligned} M_x = & \lambda^4 \frac{B(-D)}{6} \left\{ \frac{1}{2} [c_1^2 (a^2 - 4ax + 3x^2)^2 - 2c_1 (-2a + 3x) \times \right. \\ & \times (\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3))] + \nu [3\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3)] \Big\} + \\ & + \lambda^6 \frac{B(-D)}{18} \{ [\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3)] 2c_1^2 (-7a^2 + 24ax - 18x^2) + \\ & + 6c_1 \eta^2 (-2a + 3x) + c_1^3 (1 + 2\nu) (-2a + 3x) (a^2 - 4ax + 3x^2)^2 \} + O(\lambda^8). \\ Q_x = & \lambda^4 \frac{B(-D)}{6} c_1 \left\{ 3c_1 (-2a^3 + 11a^2 x - 18ax^2 + 9x^3) - \right. \\ & - 3[\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3)] - \frac{1}{2} (a^2 - 4ax + 3x^2) \Big\} + \\ & + \lambda^6 \frac{B(-D)}{9} c_1 \{ 12c_1 (3x - 2a) [\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3)] + \\ & + 6c_1^2 (11a^4 - 80a^3 x + 204a^2 x^2 - 216ax^3 + 81x^4) + \\ & + [3\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3)] [3\eta^2 - 2c_1 (-2a^3 + 11a^2 x - \\ & - 18ax^2 + 9x^3)] \} + O(\lambda^8), \end{aligned}$$

$$q(x, \eta) = BD - \lambda^4 \frac{B^2 D}{12\alpha} c_1 [\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3)] (a^2 - 4ax + 3x^2) + \\ + \lambda^6 \frac{B^2 D}{36\alpha} c_1 \{ [\eta^2 - c_1 (a^2 x - 2ax^2 + x^3)]^2 \times \\ \times [3 - 2c_1 (-2a^3 + 11a^2 x - 18ax^2 + 9x^3)] \} + O(\lambda^8).$$

Как видно из рассмотренных примеров, вопрос о сходимости ряда (3.6) является существенным.

Исследуем асимптотическую сходимость ряда (2.7), который является более общим.

§ 5. Доказательство асимптотической сходимости ряда (2.7)

Прежде чем перейти к доказательству асимптотической сходимости решения, предварительно докажем одну теорему и одну лемму.

С целью доказательства асимптотической сходимости ряда (2.7) распространим основную теорему о дифференциальных неравенствах акад. С. А. Чаплыгина [11] на уравнение (2.7).

Теорема. Дано в области D уравнение

$$L_4(w) - B = 0, \quad (5.1)$$

где

$$L_4 = \nabla^4 + A \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad B > 0.$$

Дана некоторая функция $v(x, y)$, которая внутри области D имеет конечные, непрерывные частные производные по x и по y первого, второго и третьего порядков и конечные четвертые частные производные по x и по y , а на границах области

$$v|_{\Gamma} = w|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{\Gamma}. \quad (5.2)$$

Функция $v(x, y)$ будет верхней границей интеграла для внутренних точек области, если результат ее подстановки в уравнение (5.1) всюду положителен, т. е.

$$L_4(v) - B > 0. \quad (5.3)$$

Доказательство. Из (5.1) и (5.3) получается неравенство

$$L_4(v - w) > 0. \quad (5.4)$$

Составим скалярное произведение

$$((v - w), L_4(v - w)) = \iint_D (v - w) L_4(v - w) d\Omega = J_1 + 2J_2 + J_3 + J_4, \quad (5.5)$$

где

$$J_1 = \iint_{\Omega} (v-w) \frac{\partial^4 (v-w)}{\partial x^4} d\Omega, \quad J_2 = \iint_{\Omega} (v-w) \frac{\partial^4 (v-w)}{\partial x^2 \partial y^2} d\Omega, \quad (5.6)$$

$$J_3 = \iint_{\Omega} (v-w) \frac{\partial^4 (v-w)}{\partial y^4} d\Omega, \quad J_4 = A \iint_{\Omega} (v-w) \frac{\partial (v-w)}{\partial x} d\Omega.$$

Преобразуем эти интегралы. Для этого применим вторую формулу Грина. Тогда

$$J_1 = \iint_{\Omega} \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x^3} \frac{\partial (v-w)}{\partial x} d\Omega + \int_S (v-w) \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x^3} \cos(\hat{\nu}, \hat{x}) dS,$$

или, еще раз применив формулу Грина,

$$J_1 = \int_S (v-w) \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x^3} \cos(\hat{\nu}, \hat{x}) dS + \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x^2} d\Omega - \\ - \int_S \frac{\partial (v-w)}{\partial x} \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x^2} \cos(\hat{\nu}, \hat{x}) dS. \quad (5.7)$$

Здесь $(\hat{\nu}, \hat{x})$ — угол между осью Ox и внешней нормалью данного замкнутого контура (S).

Контурные интегралы, стоящие в выражении (5.7), суть нули по условию (5.2). Следовательно, выражение (5.7) примет вид

$$J_1 = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x^2} \right]^2 d\Omega. \quad (5.8)$$

Таким же способом находим

$$J_2 = - \iint_{\Omega} \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial (v-w)}{\partial x} d\Omega + \int_S (v-w) \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x \partial y^2} \cos(\hat{\nu}, \hat{x}) dS = \\ = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (v-w)}{\partial y^2} d\Omega + \int_S (v-w) \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x \partial y^2} \cos(\hat{\nu}, \hat{x}) dS - \\ - \int_S \frac{\partial (v-w)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 (v-w)}{\partial x \partial y^2} \cos(\hat{\nu}, \hat{y}) dS,$$

или, учитывая (5.2), окончательно будем иметь

$$J_2 = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (v-w)}{\partial y^2} d\Omega, \quad (5.9)$$

$$J_3 = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 (v-w)}{\partial y^2} \right]^2 d\Omega, \quad (5.10)$$

$$J_4 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int \frac{\partial}{\partial x} [(v-w)^2] d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v-w)^2 \cos(\widehat{v}, x) dS = 0. \quad (5.11)$$

Учитывая (5.8)–(5.11), выражение (5.5) можно представить в виде

$$((v-w), L_4(v-w)) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (v-w)}{\partial y^2} \right]^2 d\Omega > 0. \quad (5.12)$$

Итак, скалярное произведение (5.5) существенно положительно. Учитывая (5.4) находим, что $v-w$ не может быть всюду отрицательной. Таким образом, относительно функции $v-w$ можем сделать два предположения: 1) или $v-w > 0$ внутри области, 2) или область разбивается на части, из которых в некоторых частях имеет место $v-w > 0$, а в других частях имеет место $v-w < 0$. Нетрудно видеть, что второе предположение приводит к противоречию. Таким образом находим

$$v-w > 0$$

или

$$w < v.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается, что для u — нижней границы интеграла имеет место следующее неравенство для внутренних точек области D

$$u < w.$$

Итак, получается

$$u < w < v.$$

Лемма. Если $w(x, y)$ удовлетворяет внутри области D уравнению

$$L_4(w) = B,$$

а на границе (Γ) условиям

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{\Gamma} = 0,$$

то для любой функции $F(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$L_4(F) = f(x, y)$$

в области $D_1 \subset D$ и удовлетворяющей на границе области D_1 условиям

$$F|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}|_{\Gamma_1} = 0,$$

имеем $|F(x, y)| < |w(x, y)|$ внутри и на границе D_1 , если только $|f(x, y)| < B$ в этой области и на ее границе.

Доказательство. На основании доказанной выше теоремы имеем $w > 0$ внутри D , а значит и на границе D_1 .

Построим вспомогательную функцию $\Phi(x, y)$ следующим образом

$$1) \quad L_4(\Phi) - B = 0,$$

$$2) \quad \Phi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\bigg|_{\Gamma_1} = 0.$$

Легко заметить, что

$\Phi(x, y) < w(x, y)$ внутри и на границе D_1 . Введем новую функцию следующим образом

$$\Phi_1(x, y) = F(x, y) - \Phi(x, y).$$

Очевидно, что

$$\Phi_1(x, y)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\bigg|_{\Gamma_1} = 0$$

и

$$L_4(\Phi_1) = f(x, y) - B < 0.$$

Еще раз применив теорему, находим

$$\Phi_1(x, y) < 0 \text{ внутри } D_1.$$

Это значит, что

$$F(x, y) < \Phi(x, y) < w(x, y)$$

или

$$F(x, y) < w(x, y).$$

Аналогично получается

$$F(x, y) > -w(x, y).$$

Следовательно $|F(x, y)| < |w(x, y)|$ внутри и на границе D_1 .

Теперь докажем асимптотическую сходимость ряда (2.7). Для этой цели изучим решение нашей задачи как функцию λ .

Составим разность

$$p_n(x, y; \lambda) = w(x, y; \lambda) - \sum_{k=0}^n \lambda^k w_k(x, y). \quad (5.13)$$

Применим оператор L_4 для $p_n(x, y; \lambda)$

$$L_4(p_n) = L_4(w) - \sum_{k=0}^n \lambda^k L_4(w_k). \quad (5.14)$$

Учитывая (5.1), из (5.14) находим

$$L_4(p_n) = B - \sum_{k=0}^n \lambda^k \left(\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} + A \frac{\partial w_k}{\partial x} \right). \quad (5.15)$$

Разложив развернутую сумму по степеням λ и пользуясь (2.9), для (5.15) получим

$$L_4(p_n) = -\lambda^{n-3} \left(\frac{\partial^4 w_{n-3}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial x^2 \partial y^2} + A \frac{\partial w_{n-3}}{\partial x} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda^{n-2} \left(\frac{\partial^4 w_{n-2}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^2 \partial \eta^2} + A \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda^{n-1} \left(\frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial x^4} + A \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} \right) - \\
& - \lambda^n \left(\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} + A \frac{\partial w_n}{\partial x} \right) = g_n(x, \eta; \lambda).
\end{aligned} \quad (5.16)$$

Оценим выражение (5.16).

$$\begin{aligned}
|g_n(x, \eta; \lambda)| \leq & \lambda^{n-3} \left[\left| \frac{\partial^4 w_{n-3}}{\partial x^4} \right| + 2 \left| \frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta^2} \right| + \left| A \frac{\partial w_{n-3}}{\partial x} \right| + \right. \\
& + \lambda^{n-2} \left[\left| \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x^2} \right| + 2 \left| \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^2 \partial \eta^2} \right| + \left| A \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x} \right| \right] + \\
& + \lambda^{n-1} \left[\left| \frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial x^4} \right| + \left| A \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} \right| \right] + \lambda^n \left[\left| \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} \right| + \left| A \frac{\partial w_n}{\partial x} \right| \right].
\end{aligned} \quad (5.17)$$

Выражения $\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial \eta^2} \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)$ и $A \frac{\partial w_k}{\partial x}$ суть регулярные, внутри и на границе D_1 , функции аргумента x и просто многочлены аргумента η . Тогда, введя в области D обозначения

$$\begin{aligned}
r_n &= \max_D \left| A \frac{\partial w_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)}{\partial x} \right|, \quad p_n = \max_D \left| \frac{\partial^4 w_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)}{\partial x^4} \right|, \\
q_n &= \max_D \left| \frac{\partial^4 w_n \left(x, \frac{y}{\lambda} \right)}{\partial x^2 \partial y^2} \right|,
\end{aligned}$$

для функции $g_n(x, \eta; \lambda)$ в области D_1 будем иметь следующую оценку

$$\begin{aligned}
|g_n(x, \eta; \lambda)| \leq & \lambda^{n-3} (p_{n-3} + 2q_{n-1} + r_{n-3}) + \lambda^{n-2} (p_{n-2} + 2q_n + r_{n-2}) + \\
& + \lambda^{n-1} (p_{n-1} + r_{n-1}) + \lambda^n (p_n + r_n) = g_n^*(\lambda).
\end{aligned} \quad (5.18)$$

Имея в виду граничные условия для $w(x, y)$ и выражение (5.13), получим

$$\left. \begin{aligned} p_n(x, y; \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial p_n}{\partial l} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на границе области } D_1,$$

где l — внутренняя нормаль к контуру Γ_1 .

Введем новую функцию следующим образом

$$p_n^*(x, y; \lambda) = \frac{B}{g_n^*(\lambda)} p_n(x, y; \lambda). \quad (5.19)$$

Составим

$$R_n^* = L_4(p_n^*),$$

Очевидно, подобно (5.16), будем иметь

$$|R_n^*| = \frac{B}{g_n^*} |g_n(x, y; \lambda)| \leq \frac{B}{g_n^*} g_n^* = B. \quad (5.20)$$

Таким образом, определение функции $\varphi_n^*(x, y; \lambda)$ сводится к решению следующей краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} L_4(\varphi_n^*) &= R_n^*(x, y; \lambda) \text{ в } D_1 \subset D, \\ \varphi_n^*|_{\Gamma_1} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial x}|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial y}|_{\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Очевидно, что условия леммы удовлетворены. Следовательно,

$$|\varphi_n^*| < |w(x, y)|$$

или, учитывая (5.19), будем иметь

$$|\varphi_n(x, y; \lambda)| < \frac{g_n^*(\lambda)}{B} |w(x, y)|. \quad (5.22)$$

Пусть бесконечная полоса шириной $2a$ содержит внутри себя область D . Легко видеть, что можно подобрать бесконечную полосу шириной $2\lambda a$, которая будет содержать область D_1 . Тогда, согласно (4.1), прогиб для D_1 будет удовлетворять неравенству

$$|w| = \frac{B}{24} (y^2 - \lambda^2 a^2)^2 \leq \frac{B\lambda^4 a^4}{24}. \quad (5.23)$$

Итак, при помощи (5.23) из (5.22) окончательно находим

$$|\varphi_n(x, y; \lambda)| < \frac{g_n^*(\lambda)}{B} \cdot \frac{B\lambda^4 a^4}{24},$$

или

$$|\varphi_n(x, y; \lambda)| < \frac{a^4 \lambda^{n+1}}{24} [(p_{n-3} + 2q_{n-1} + r_{n-3}) + \\ + \lambda(p_{n-2} + 2q_n + r_{n-2}) + \lambda^2(p_{n-1} + r_{n-1}) + \lambda^3(p_n + r_n)], \quad n \geq 4. \quad (5.24)$$

Таким образом, полученная оценка (5.24) решает вопрос об асимптотической сходимости (в смысле Пуанкаре) ряда (2.7), так как из нее следует, что при любом значении n

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi_n(x, y; \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(x, y; \lambda)}{\lambda^n} = 0.$$

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Получено 16 XI 1961

Վ. Ս. Մարգարյան

ԳԱԶՈՒՄ ԳԵՐՋԱՅՆԱՅԻՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՍՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ
ՇԱՐԺՎՈՂ ԵՐԿԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ
Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գազում գերձայնային հաստատուն արագությամբ շարժվող երկու հա-
կադիր եզրերում հոդակապա-ամրակցված առաձգական, բարակ ուղղանկյուն
թիթեղի լարվածային և զեֆորմացիոն վիճակների ուսումնասիրությունը ըստ
Ա. Ա. Իլյուշինի տեսության [1] դիտարկված է [2] աշխատության մեջ:

Գազում շարժվող հոծ մարմինների զեֆորմացիոն պրոցեսի կառու-
թյան հարցերին նվիրված են մի շարք աշխատություններ (տես [3]):

Ներկա աշխատության մեջ դիտարկված է գազում գերձայնային հաս-
տատուն արագությամբ շարժվող կամայական սիմետրիկ տեսքի, եզրերում
ամրակցված, երկար ու նեղ թիթեղների ծածան խնդիրների մոտավոր լու-
ծումները՝ կիրառելով փոքր պարամետրի եղանակը:

Լուծումը ներկայացված է շարքով ըստ փոքր պարամետրի:

Հետազոտված է լուծման ասիմպտոտիկ զուգամիտությունը (ըստ Պու-
անկարենի):

Որպես առաջադրվող մեթոդի կիրառություն դիտարկված են մի քանի
կոնկրետ խնդիրներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 20, вып. 6, 1956.
2. Власов Б. Ф. Об изгибе прямоугольной упругой пластинки, движущейся в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью. Известия АН СССР, отделение техни-
ческих наук, № 12, 1958.
3. Мовчан А. А. Вопросы устойчивости процессов деформирования сплошных тел. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-мате-
матических наук. 1961.
4. Duncanson W. I. Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes. R. & M., № 1444, 1932.
5. Паков Д. Ю. Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных
производных для длинных и узких областей. Известия АН СССР, серия мате-
матическая, № 1, М., 1937.
6. Паков Д. Ю. Об одном методе решения краевых задач дифференциальных урав-
нений в частных производных. ДАН, новая серия, т. III (VIII), № 12 (62),
1935, 63—66.
7. Саркисян В. С. Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным
профилем. Известия АН АрмССР, серия физико-математических наук, 12,
№ 2, 1959.
8. Саркисян В. С. Кручение анизотропных призматических стержней с сечением в
виде удлиненного профиля. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14,
№ 2, 1961.
9. Саркисян В. С. Изгиб анизотропных призматических стержней удлиненных сим-
метричных профилей. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 4,
1961.
10. Луиз Я. Л. Изгиб длинных зашпеченных пластин. ПММ, 7, 1943.
11. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциаль-
ных уравнений. Госиздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1950.