

К. Б. Санджиева

Применение приближенного метода к расчету оболочек

Для расчета пологих призматических оболочек в случае безмоментного напряженного состояния возьмем систему уравнений (см. [1], стр. 220)

$$\begin{aligned} \mu \Delta u_s + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_s} - \mu \frac{\partial A}{\partial x_s} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} - \mu \frac{\partial A}{\partial x_s} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} - \\ - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_s} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + Y_s = 0 \quad (s = 1, 2), \\ \Delta u_3 - \frac{\partial A}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{\mu} Y_3 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора смещения,

$$A = \lg a = \lg \frac{2}{h^+ - h^-}.$$

$2h = h^+ - h^-$ — толщина оболочки,

$$Q = \frac{\partial u_s}{\partial x_s}, \quad Y_i = \frac{a}{2} \left(Q_i^+ + Q_i^- + \frac{2\rho}{a} x_i \right), \quad (2)$$

X_i — компоненты массовых сил, ρ — плотность среды, Q_i^+ и Q_i^- обозначают проекции на ось OX_i сил \vec{Q}^+ и \vec{Q}^- , приложенных к верхней и нижней поверхностям оболочки.

Пусть $X_1 = X_2 = 0$. Тогда существует такая функция $\varphi(x, y)$ (см. [1], стр. 222) называемая функцией напряжения, которая удовлетворяет равенствам

$$2h \cdot X_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad 2h \cdot X_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad 2h \cdot X_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где X_{ij} — компоненты тензора напряжений, и дифференциальному уравнению

$$L_4 = a \Delta \Delta \varphi + 2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} + 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\
 & + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,
 \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \int_0^x f_2 ds + c_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_0^y f_1 ds + c_2, \quad (5)$$

где c_1 и c_2 — действительные постоянные, а

$$f_i = 2h \cdot X_{in} - 2h (X_{in} \cos(n, x) + X_{in} \cos(n, y)) \quad (i=1, 2)$$

заданные функции на границе L области G (проекция оболочки на плоскость xOy), n — внешняя нормаль.

Из равенств [5] следует необходимость выполнения условий

$$\int_L f_1 ds = 0, \quad \int_L f_2 ds = 0, \quad \int_L (x f_2 - y f_1) ds = 0.$$

Причем из (4) видно, что можно положить

$$c_1 = c_2 = 0, \quad \varphi(0, 0) = 0. \quad (6)$$

Заметим, что в случае пластинки постоянной толщины ($a = \text{const}$) уравнение (4) превращается в бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta \varphi = 0.$$

Таким образом, если решать уравнение (4) нашим методом, то нулевое приближение будет соответствовать пластинке постоянной толщины.

Ниже, в § 1, указывается способ решения уравнения второго порядка и уравнения (4), а в § 2 дается применение этого способа к расчету оболочек.

§ 1. Решение краевых задач для уравнений второго и четвертого порядков

1. Пусть имеем уравнение

$$\Delta u + \beta \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u \right) = 0, \quad (1.1)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — аналитические функции переменных x, y в области G . В качестве области G всюду будем брать единичный круг.

Задача Д: Найти решение уравнения (1.1) по граничному условию

$$u(x, y)|_r = f(s). \quad (1.2)$$

Запишем уравнение (1.1) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \beta \left(A(z, \bar{z}) \frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \bar{z}) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + C(z, \bar{z}) u \right) = 0.$$

Здесь β — вещественный параметр, который, в частности, может быть равен единице.

$$A(z, \bar{z}) = \frac{1}{4} \left[a \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + ib \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) \right],$$

$$B(z, \bar{z}) = \frac{1}{4} \left[a \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) - ib \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) \right],$$

$$C(z, \bar{z}) = \frac{1}{4} c \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right).$$

Общее представление решений уравнения (1.1) (см. [2])

$$u(x, y) = \alpha G(0, 0, z, \bar{z}) + \operatorname{Re} \int_0^z \Phi(t) G(t, 0, z, \bar{z}) dt, \quad (1.3)$$

где α — любая вещественная постоянная, $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная в G функция. Функция Римана $G(t, \tau, z, \bar{z})$ определяется из уравнения

$$G(t, \tau, z, \bar{z}) - \beta \int_{\bar{\tau}}^{\bar{z}} B(\xi, \bar{z}) G(t, \tau, \xi, \bar{z}) d\bar{\xi} - \beta \int_{\tau}^z A(z, \zeta) G(t, \tau, z, \zeta) d\zeta + \\ + \beta \int_{\tau}^z d\zeta \int_{\bar{\tau}}^{\bar{z}} C(\xi, \zeta) G(t, \tau, \xi, \zeta) d\bar{\xi} = 1.$$

Методом последовательных приближений находим

$$G(t, \tau, z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k g_k(t, \tau, z, \bar{z}), \quad (1.4)$$

причем $g_0(t, \tau, z, \bar{z}) = 1$. Данный ряд всегда сходится абсолютно и равномерно.

Будем искать решение задачи D в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k u_k(x, y), \quad (1.5)$$

где $u_k(x, y)$ — некоторые аналитические от x и y функции, которые определим ниже.

Так как

$$\alpha = u(0, 0), \quad \Phi(z) = \frac{\partial}{\partial z} u \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i} \right) + B(z, 0) u \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i} \right)$$

то

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k a_k, \quad \Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Phi_k(z). \quad (1.5)$$

Подставив (1.5) и (1.6) в равенство (1.3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра β , получим

$$u_0(x, y) = a_0 + \operatorname{Re} \int_0^z \Phi_0(t) dt,$$

$$u_n(x, y) = a_n + \operatorname{Re} \int_0^z \Phi_n(t) dt + \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left[a_{n-k} g_k(0, 0, z, \bar{z}) + \int_0^z \Phi_{n-k}(t) g_k(t, 0, z, \bar{z}) dt \right] \quad (1.7)$$

($n=1, 2, \dots$)

Возьмем для $u_n(x, y)$ следующие граничные условия

$$u_n(x, y)|_{\Gamma} = f(s), \quad u_n(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

Таким образом, получили ряд задач для аналитических функций.

Задача А. Найти голоморфную в области G функцию $\Phi_n(z)$ по граничному условию

$$\operatorname{Re} [a_n + \psi_0(z)]_{\Gamma} = f_n(s),$$

где

$$\psi_0(z) = \int_0^z \Phi_n(t) dt, \quad f_0(s) = f(s),$$

$$f_n(s) = \left[- \sum_{k=1}^n \left(a_{n-k} g_k(0, 0, z, \bar{z}) + \operatorname{Re} \int_0^z \Phi_{n-k}(t) g_k(t, 0, z, \bar{z}) dt \right) \right]_{\Gamma}$$

По формуле Шварца имеем

$$a_n + \psi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(s) \frac{e^{iz} + z}{e^{is} - z} ds + ic.$$

Так как $\psi_0(0) = 0$, то получаем

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(s) ds, \quad c = 0,$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(s) \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(s) ds. \quad (1.8)$$

Вычислим $\Phi_n(z)$ и из (1.7) найдем $u_n(x, y)$.

Теперь докажем сходимость ряда (1.5). Для простоты изложения за коэффициенты уравнения (1.1) возьмем полиномы (в общем случае доказательство аналогичное).

Тогда $g_k(t, 0, z, \bar{z})$ будут также полиномами, степень которых возрастает вместе с k .

Пусть

$$g_k(t, 0, z, \bar{z}) = \sum_{i+j+m \leq n_k} a_{ijm}^{(k)} z^i \bar{z}^j t^m.$$

Обозначим

$$\|g_k\| = \sum_{i+j+m \leq n_k} |a_{ijm}^{(k)}| = L_k.$$

Пусть $D = 2A + B + 2C$, где A, B, C суть суммы модулей коэффициентов полиномов $A(z, \bar{z})$, $B(z, \bar{z})$ и $C(z, \bar{z})$.

Тогда имеем, что

$$L_k \leq \frac{D^k}{k!}. \quad (1.9)$$

За граничную функцию также возьмем полином

$$f(s) = \sum_{-M}^M \delta_k e^{iks} \quad (\delta_k = \bar{\delta}_{-k}).$$

Введем

$$M_1 = \sum_{-M}^M |\delta_k|.$$

Из формулы (1.8) находим

$$a_0 = \delta_0, \quad \Phi_0(z) = 2 \sum_{k=1}^M \delta_k \cdot k \cdot z^{k-1}.$$

Для определения $a_1, \Phi_1(z)$ сначала находим

$$\begin{aligned} f_1(x, y) = & -\delta_0 \sum_{ijm}^{n_1} a_{ijm}^{(1)} z^i \bar{z}^j - 2\operatorname{Re} \int_0^{\bar{z}} \left(\sum_{k=1}^M k \delta_k t^{k-1} \right) \times \\ & \times \left(\sum_{ijm}^{n_1} a_{ijm}^{(1)} z^i \bar{z}^j t^m \right) dt = \sum_{i+j \leq n_1 + M} d_{ij}^{(1)} z^i \bar{z}^j. \end{aligned}$$

Легко видеть, что справедлива следующая оценка

$$\sum |d_{ij}^{(1)}| \leq 2M_1 L_1.$$

Отсюда

$$\Phi_1(z) = 2 \sum_{j=0}^{M+n_1} d_{ij}^{(1)} i z^{i-1}.$$

Аналогично вычисляем

$$f_2(x, y) = \sum_{i+j \leq n_1+n_2+M} d_{ij}^{(2)} z^i \bar{z}^j,$$

$$\sum |d_{ij}^{(2)}| \leq 2^2 M_1 L_1^2 + 2 M_1 L_1.$$

Пусть все $L_k < L$. Из (1.9) следует, что такое L существует. Тогда имеем следующие оценки

$$|u_0(x, y)| \leq 3M_1, \quad |u_1(x, y)| \leq 6M_1 L,$$

$$|f_2(x, y)| \leq \sum |d_{ij}^{(2)}| \leq 2LM_1(2L+1), \quad |u_2(x, y)| \leq 6M_1 L(2L+1),$$

$$|u_n(x, y)| \leq 6LM_1(2L+1)^{n-1}.$$

Составляем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k 6LM_1(2L+1)^{k-1}$. Он является мажорантой для ряда (1.5). Отсюда получаем, что при $\beta(2L+1) < 1$ ряд (1.5) сходится абсолютно и равномерно и сумма его есть решение задачи Д.

Если $D < 1$, то $L_k \leq D^k$, тогда аналогично находим, что при условии $3\beta D < 1$ ряд (1.5) является решением задачи Д и имеет место оценка

$$|u(x, y)| \leq 3M_1 + 2M_1 \sum_{k=1}^{\infty} (3\beta D)^k = 3M_1 + \frac{6M_1 D}{1-3\beta D} \beta.$$

Так как при $3\beta D < 1$ для любой $f(s)$ вида $\sum_{-M}^M \delta_k e^{ikx}$ задача Д имеет решение, то следовательно она будет иметь решение для любой один раз непрерывно дифференцируемой функции $f(s)$. Отсюда следует следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Д при $\beta D < \frac{1}{3}$ всегда имеет решение и притом единственное.*

Единственность решения задачи Д следует из того, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(s)$ она разрешима (см. [2]).

Если мы будем брать приближения в виде

$$U_m(x, y) = \sum_{k=0}^m u_k(x, y),$$

то можем оценить остаток ряда (1.5)

$$|u(x, y) - U_m(x, y)| = \sigma_m < \frac{2M_1(3\beta D)^m}{1-3\beta D}.$$

Отсюда видно, что с увеличением m значения $U_m(x, y)$ будут отличаться от истинного $u(x, y)$ как угодно мало.

2. Рассмотрим уравнение

$$\Delta \Delta \varphi + \beta \left(a(x, y) \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} + c(x, y) \Delta \varphi \right) = 0, \quad (1.10)$$

Обозначив $\Delta \varphi = u$, получим уравнение (1.1). Тогда решение уравнения (1.10) примет вид

$$\varphi(x, y) = \int_0^z dt \int_0^{\bar{z}} u(t, \tau) d\tau + \gamma(z) + \overline{\gamma(\bar{z})},$$

где $\gamma(z)$ — любая функция, голоморфная в области G .

Задача С. Найти в области G решение уравнения (1.10) по граничным условиям.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\Gamma} = f_1(s), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{\Gamma} = f_2(s), \quad \varphi(0, 0) = 0,$$

где $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — заданные действительные непрерывные функции, имеющие непрерывные производные по дуге до второго порядка включительно.

Для однозначности $\varphi(x, y)$ должно выполняться условие

$$\int_0^{2\pi} (-f_1(s) \sin s + f_2(s) \cos s) ds = 0.$$

Находим решение $\varphi(x, y)$ в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varphi_k(x, y). \quad (1.11)$$

Тогда функции $\varphi_k(x, y)$ определяются из следующих равенств

$$\begin{aligned} \varphi_k(x, y) = a_k z \bar{z} + \operatorname{Re} \left[z \int_0^z dt \int_0^{\bar{z}} \Phi_k(\tau) d\tau \right] - \int_0^z Q_k(t, \bar{z}) dt + \\ + \gamma_k(z) + \overline{\gamma_k(\bar{z})}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$Q_k(z, \bar{z}) = - \int_0^{\bar{z}} d\tau \left[\sum_{n=1}^k \alpha_{k-n} g_n(0, 0, z, \tau) + \operatorname{Re} \int_0^z \Phi_{k-n}(\hat{s}) g_n(\hat{s}, 0, \tau, \tau) d\hat{s} \right],$$

$$\Phi_k(z) = P'_k(z), \quad a_k = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [P'_k(z)]_{z=0},$$

(1.13)

$$2 \frac{d\gamma_k}{dz} = S_k(z) + S_k(0) - \frac{1}{z} \int_0^z P'_k(t) dt,$$

причем

$$P_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Q_k(t, \bar{t}) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t},$$

$$S_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Q_k(t, \bar{t}) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t},$$

($k=1, 2, \dots$)

$$P_0(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\bar{z}} (f_1(s) + if_2(s)) \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds,$$

$$S_0(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\bar{z}} (f_1(s) - if_2(s)) \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds.$$

Аналогично предыдущему доказывается, что ряд (1.11) абсолютно и равномерно сходится и является решением задачи С при условии $\beta D < \frac{1}{3}$ для любых дважды непрерывно дифференцируемых граничных функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$.

Следовательно имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Задача С при условии $\beta D < \frac{1}{3}$ всегда имеет решение и притом единственное.*

3. Рассмотрим более общее уравнение четвертого порядка

$$\Delta \Delta \varphi + \beta \left(a \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + g \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \varphi \right) = 0 \quad (1.14)$$

с аналитическими коэффициентами в области G .

Его можем записать в комплексной форме

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{m=0}^2 \frac{\partial^{k+m} B_{km} \varphi}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} = 0, \quad B_{22} = 1, \quad B_{km} = B_{km}(z, \bar{z}).$$

Используем общее представление решений (см. [2])

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ G_0(z, 0, z, \bar{z}) X(z) - \int_0^{\bar{z}} X(t) \frac{\partial}{\partial t} G_0(t, 0, z, \bar{z}) dt - \right. \\ \left. - \int_0^{\bar{z}} \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, 0, z, \bar{z}) dt \right\},$$

где $X(z)$ и $\Phi(z)$ — произвольные голоморфные в G функции, причем

$$X(0) = \overline{X(0)}, \quad \Phi(0) = \overline{\Phi(0)}.$$

Функции $G_0(t, \tau, z, \bar{z})$ и $G_1(t, \tau, z, \bar{z})$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} G_k(t, \tau, z, \bar{z}) &= \beta \int_0^z K_1(\bar{z}, z, \xi) G_k(t, \tau, \xi, \bar{z}) d\xi - \\ &= \beta \int_0^{\bar{z}} K_2(z, \bar{z}, \zeta) G_k(t, \tau, z, \zeta) d\zeta - \\ &= \beta \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} K(z, \bar{z}, \xi, \zeta) G_k(t, \tau, \xi, \zeta) d\zeta = \frac{(z-t)^k (\bar{z}-\tau)^k}{k! k!} \quad (k=0, 1). \end{aligned}$$

Ядра этих интегральных уравнений выражаются через коэффициенты следующим образом

$$K_1(z, \bar{z}, t) = -[(z-t)B_{02}(t, \bar{z}) - B_{12}(t, \bar{z})],$$

$$K_2(\bar{z}, z, \tau) = -[(\bar{z}-\tau)B_{20}(z, \tau) + B_{21}(z, \tau)],$$

$$K(z, \bar{z}, t, \tau) = - \sum_{k=0}^1 \sum_{m=0}^1 \frac{(z-t)^{1-k} (\bar{z}-\tau)^{1-m}}{(1-k)! (1-m)!} B_{km}(t, \tau).$$

Получаем

$$G_i(t, \tau, z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k g_{ik}(t, \tau, z, \bar{z}) \quad (i=0, 1),$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{10} = (z-t)(\bar{z}-\tau).$$

Решив задачу С находим ряд (1.11).

Функции $\varphi_k(x, y)$ определяются из равенств

$$\varphi_n(x, y) = \operatorname{Re} \{ X_n(z) + \bar{z} \psi_n(z) \} - Q_n(x, y), \quad (1.15)$$

где

$$\psi_n(z) = \int_0^z \Phi_n(t) dt,$$

$$\begin{aligned} Q_n(x, y) &= - \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left\{ g_{0k}(z, 0, z, \bar{z}) X_{n-k}(z) - \right. \\ &= \left. \int_0^z X_{n-k}(t) \frac{\partial}{\partial t} g_{0k}(t, 0, z, \bar{z}) dt - \int_0^z \Phi_{n-k}(t) \frac{\partial}{\partial t} g_{1k}(t, 0, z, \bar{z}) dt \right\}, \\ \Phi_n(z) &= P'_n(z) - \frac{1}{2} P'_n(0), \end{aligned}$$

$$X_n(z) = \int_0^z \left(S_n(t) + S_n(0) - \frac{P'_n - P'_n(0)}{t} \right) dt,$$

причем

$$P'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{Q'_n(t)} \frac{t+z}{t-z} dt,$$

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C Q'_n(t) \frac{t+z}{t-z} dt,$$

а функции $P'_0(z)$ и $S_0(z)$ те же, что и в (1.13).

Пусть $2A + B + 2C = D$, где через A , B и C соответственно обозначены суммы модулей коэффициентов выражений

$$3B_{02}(z, 0) + B_{12}(z, 0) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (3B_{02}(z, \bar{z}) + B_{12}(z, \bar{z})),$$

$$3B_{20}(0, \bar{z}) + B_{21}(0, \bar{z}) + \frac{\partial}{\partial z} (3B_{20}(z, \bar{z}) + B_{21}(z, \bar{z})),$$

$$9B_{00}(z, \bar{z}) + 3B_{01}(z, \bar{z}) + 3B_{10}(z, \bar{z}) + B_{11}(z, \bar{z}).$$

Тогда аналогично доказывается, что ряд (1.11) при условии $\beta D < \frac{1}{17}$ является решением задачи C для уравнения (1.14) и притом единственным.

§ 2. Применение приближенного метода к расчету оболочек

Пусть $Oxyz$ — декартова система координат. Будем считать условно ось Oz вертикальной. Рассмотрим упругое тело, ограниченное сверху и снизу соответственно поверхностями $z = h^+(x, y)$ и $z = h^-(x, y)$, а с боковой стороны цилиндром с вертикальными образующими. Основанием цилиндра служит единичный круг с центром в точке O .

1. *Цилиндрическая оболочка.* Примем, что $z = h^+(x, y)$ и $z = h^-(x, y)$ — плоскости, расположенные симметрично относительно плоскости xOy . Проекция оболочки на плоскость xOz имеет вид (фиг. 1)

$$2h = h^+ - h^- = h_0 + 2x \operatorname{tg} \theta.$$

Тогда

$$a(x) = \frac{2}{h_0 + 2x \operatorname{tg} \theta} \approx \frac{2}{h_0} \left(1 - \frac{2x \operatorname{tg} \theta}{h_0} \right).$$

Угол θ считаем достаточно малым, поэтому при подстановке $a(x)$ в уравнение (4), пренебрегая членами, содержащими $\operatorname{tg}^2 \theta, \operatorname{tg}^3 \theta, \dots$, получим

$$\Delta \Delta \varphi - x^2 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = 0, \quad x^2 = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta}{h_0}. \quad (2.1)$$

Задача 1. Оболочка нагружена постоянной нормальной силой P . Край оболочки защемлен. Массовые силы отсутствуют.

В этом случае из (2) имеем

$$Y_1 = Y_2 = 0, \quad Y_3 = -\frac{a(x)}{2} P.$$

Следовательно, третье уравнение системы (1) примет вид

$$\Delta u_3 + \frac{x^2}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{P}{\mu} \frac{1}{h_0} \left(1 - \frac{x^2}{2} x \right) = 0.$$

Находим частное решение неоднородной системы (1)

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 0, \quad u_3^* = \frac{P}{\mu h_0} \left(\frac{4}{x^2} x - \frac{x^2}{2} \right).$$

Теперь найдем общее решение однородной системы (1). Для уравнения (2.1) из (5) имеем граничные условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x, y) \equiv 0.$$

Так как оболочка защемлена, то получаем

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Имеем

$$u_3(x, y) = v(x, y) + u_3^*(x, y), \quad (2.2)$$

где $v(x, y)$ решение уравнения

$$\Delta v + \frac{x^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Находим граничное условие для $v(x, y)$

$$v(x, y) \Big|_{\Gamma} = -u_3^*(x, y) \Big|_{\Gamma} = -\frac{P}{\mu h_0} \left(\frac{4}{x^2} \cos s - \frac{\cos^2 s}{2} \right).$$

Функция Римана уравнения (2.3) имеет разложение по параметру

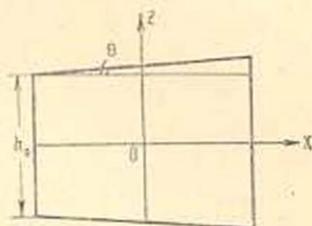
$$G(t, \tau, z, \bar{z}) = 1 + \beta A_1 + \beta^2 A_2 + \beta^3 A_3 + \dots,$$

где

$$A_n = \frac{C_n^0}{n!} a^n + \frac{C_n^1}{(n-1)!} a^{n-1} b + \frac{C_n^2}{(n-2)! 2!} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{C_n^4}{n!} b^n,$$

$a = z - t$, $b = \bar{z} - \tau$, C_n^k — биномиальные коэффициенты.

По формулам (1.8) последовательно вычисляем



Фиг. 1.

$$a_0 = \frac{P}{4\mu h_0}, \quad \Phi_0(z) = -\frac{2P}{\mu h_0} \left(\frac{2}{\alpha^2} - \frac{z}{4} \right),$$

$$v_0(x, y) = \frac{P}{4\mu h_0} - \frac{2P}{\mu h_0} \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\alpha^2} z - \frac{1}{8} z^2 \right),$$

$$f_1(x, y) = -\frac{P}{4\mu h_0} (z + \bar{z}) +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{2P}{\mu h_0} \left\{ \frac{2}{\alpha^2} \left(\frac{z^2}{2} + z\bar{z} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{z^3}{6} + \frac{\bar{z}z^3}{2} \right) \right\},$$

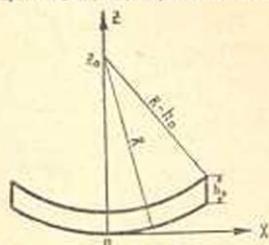
$$a_1 = \frac{4P}{\mu h_0 \alpha^2}, \quad \Phi_1(z) = -\frac{P}{2\mu h_0} + \frac{2P}{\mu h_0} \left\{ \frac{2}{\alpha^2} z - \frac{1}{4} \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

$$v_1(x, y) = \frac{4P}{\mu h_0 \alpha^2} + \operatorname{Re} \left\{ -\frac{4}{\alpha^2} z\bar{z} + \frac{\bar{z}z^2}{4} - \frac{z}{4} \right\} \frac{P}{\mu h_0},$$

$$V_1(x, y) = v_0(x, y) + \beta v_1(x, y).$$

Подставив вместо $v(x, y)$ в формулу (2.2) $V_0(x, y)$, $V_1(x, y)$, ... получаем соответственно нулевое, первое и т. д. приближения иско- мой функции $u_3(x, y)$.

2. *Круговая цилиндрическая оболочка.* Пусть $z = h^+(x, y)$ и $z = h^-(x, y)$ — боковые поверхности цилиндров, основания которых являются концентрическими окружностями с центром в точке z_0 . Проек- ция оболочки на плоскость изображена на фиг. 2.



Фиг. 2.

Приближенно имеем (см. [1], стр. 230)

$$\alpha(x) = \frac{2}{h^+ - h^-} \approx \frac{2}{h_0} \left(1 - \frac{x^2}{R(R - h_0)} \right).$$

Запишем уравнение, которое исполь- зуется для расчета данной оболочки

$$\Delta \Delta \varphi - \frac{4}{R(R - h_0)} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = 0, \quad (2.4)$$

или в комплексной форме

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} - \beta \left[(1 + \alpha) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2} \right) + 2(1 - \alpha) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \right] = 0,$$

где

$$\beta = \frac{1}{4R(R - h_0)}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}.$$

Функции $G_0(t, \tau, z, \bar{z})$ и $G_1(t, \tau, z, \bar{z})$ определяем из интегральных уравнений

$$G_k(t, \tau, z, \bar{z}) - \beta(1 + \alpha) \int_{\bar{z}}^z (\bar{z} - \xi) G_k(t, \tau, \xi, \bar{z}) d\xi -$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta(1+\alpha) \int_{\bar{z}}^{\bar{z}} (z-\zeta) G_k(t, \tau, z, \zeta) d\zeta - \\
 & -2\beta(1-\alpha) \int_{\bar{z}}^{\bar{z}} d\bar{z} \int_{\bar{z}}^{\bar{z}} G_k(t, \tau, \bar{z}, \zeta) d\zeta = \frac{(z-t)^k (\bar{z}-\tau)^k}{k! k!} \quad (k=0, 1), \\
 & g_{00} = 1, \quad g_{10} = (z-t)(\bar{z}-\tau), \\
 & g_{01} = (1+\alpha)(z-t)(\bar{z}-z-t) + (1+\alpha)(\bar{z}-\tau)(z-\bar{z}-\tau) + \\
 & \quad + 2(1-\alpha)(z-t)(\bar{z}-\tau), \\
 & g_{11} = 2(1-\alpha) \frac{(z-t)^2 (\bar{z}-\tau)^2}{4} + \frac{(1+\alpha)}{3} \operatorname{Re}(\bar{z}-\tau)(z-t)(3\bar{z}\bar{z} + \\
 & \quad + t^2 - 2z^2 + tz - 3\bar{z}t).
 \end{aligned}$$

Задача 2. Оболочка сжата продольной постоянной нормальной силой P .

В данном случае на контуре $r=1$ имеем

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -2hP \cos s = -h_0 \left(1 + \frac{\cos^2 s}{R(R-h_0)} \right) P \cos s, \\
 f_2 &= -2hP \sin s = -h_0 \left(1 + \frac{\cos^2 s}{R(R-h_0)} \right) P \sin s, \\
 f_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Для решения уравнения (2.4) по формулам (5) находим граничные условия

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= h_0 P + \frac{h_0 P}{3R(R-h_0)} - \frac{h_0 P}{2} (e^{is} + e^{-is}) - \frac{h_0 P}{24R(R-h_0)} (e^{is} + e^{-is})^2, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{h_0 P i}{2} (e^{is} - e^{-is}) + \frac{Ph_0 i}{2R(R-h_0)} (e^{is} - e^{-is}) + \\
 & \quad + \frac{Ph_0 i}{24R(R-h_0)} (e^{is} - e^{-is})^2.
 \end{aligned}$$

По формулам (1.15) последовательно вычисляем

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(z) &= -\frac{h_0 P}{2} \left[1 + \frac{1}{2R(R-h_0)} + \frac{z^2}{2R(R-h_0)} \right], \\
 X_0(z) &= \left(h_0 P + \frac{h_0 P}{3R(R-h_0)} \right) z + \frac{Ph_0}{4R(R-h_0)} z^2.
 \end{aligned}$$

Тогда имеем нулевое приближение

$$U_0 = \varphi_0(x, y) = Ph_0 \operatorname{Re} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3R(R-h_0)} \right) z + \frac{z^2}{4R(R-h_0)} \right\}$$

$$-\frac{\bar{z}}{2} \left(z + \frac{z}{2R(R-h_0)} + \frac{z^2}{6R(R-h_0)} \right)$$

Далее, вычислив $Q_1(x, y)$, $\Phi_1(z)$, $X_1(z)$, получим

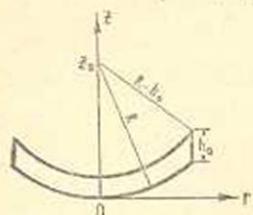
$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) = & \frac{2z}{12} [3 - 9x + 2z(18 + z)] + \frac{\bar{z}^2 z^2}{8} [3x - 1 - 2z(5 + z)] + \\ & + \frac{\beta(1+z)}{9} \bar{z}^3 z^3 + \frac{\beta(1+5z)}{24} \operatorname{Re}(z^2 + \bar{z}^2 z^4) + \frac{\beta}{12} (5+z) \operatorname{Re} z \bar{z}^3, \\ \beta = & \frac{1}{4R(R-h_0)}, \end{aligned}$$

откуда находим первое приближение

$$U_1(x, y) = \varphi_0(x, y) + \beta \varphi_1(x, y).$$

Подставив вместо $\varphi(x, y)$ в формулу (3) $U_0(x, y)$, $U_1(x, y)$ соответственно получим нулевое, первое приближение компонентов тензора напряжений.

3. *Сферическая оболочка.* Пусть $z = h^+(x, y)$ и $z = h^-(x, y)$ концентрические сферы с центром в точке z_0 (см. фиг. 3).



Фиг. 3.

Тогда уравнения этих поверхностей можно записать в виде

$$h^+ = z_0 - \sqrt{(R-h_0)^2 - r^2},$$

$$h^- = z_0 - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

R считаем достаточно большим. Тогда приближенно (см. [1], стр. 225)

$$h^+ - h^- \approx h_0 \left(1 + \frac{r^2}{R(R-h_0)} \right),$$

$$a(r) = \frac{2}{h^+ - h^-} \approx \frac{2}{h_0} \left(1 - \frac{r^2}{R(R-h_0)} \right).$$

Уравнение для функции напряжения имеет вид

$$\Delta \Delta \varphi - \frac{4\mu}{(\lambda + 2\mu) R^2} \Delta \varphi = 0. \quad (2.5)$$

Сначала для сферической оболочки решим рассмотренную выше задачу 2. В этом случае на контуре имеем

$$f_1 = -h_0 P \cos s,$$

$$f_2 = -h_0 P \sin s,$$

$$f_3 = 0.$$

Для функции $\varphi(x, y)$ из (5) получим граничные условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -h_0 P \cos s + h_0 P = -\frac{h_0 P}{2} (e^{is} + e^{-is}) + h_0 P,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -h_0 P \sin s = -\frac{ih_0 P}{2} (e^{is} - e^{-is}).$$

Введем обозначение $\frac{4\mu}{(r+2a)R^2} = \alpha^2$.

Используя формулы (см. § 2, [3]), получаем

$$4\varphi(x, y) = \int_0^{\bar{z}} dt \int_0^{\bar{z}} dz \left[\beta J_0(\alpha i \sqrt{t\bar{z}}) + \operatorname{Re} \int_0^{\bar{z}} \Phi(\bar{z}) J_0(\alpha i \sqrt{\bar{z}(t-\bar{z})}) dz \right] + \gamma(z) + \overline{\gamma(z)},$$

где

$$\beta = -\frac{h_0 P}{M_1}, \quad M_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k!)^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}.$$

Так как все $\Phi_n(z) = Q_n^{(n-2)}(z) = 0$, то

$$\Phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(z) \equiv 0,$$

$$\gamma(z) = -\frac{h_0 P}{2} z + c$$

и окончательно имеем

$$4\varphi(x, y) = \beta \int_0^{\bar{z}} dt \int_0^{\bar{z}} J_0(\alpha i \sqrt{t\bar{z}}) dz + h_0 P x + c.$$

По формулам (3) находим

$$X_{11} = \frac{1}{2h} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\beta}{4} \int_0^{\bar{z}} dt \int_0^{\bar{z}} J_0(\alpha i \sqrt{t\bar{z}}) dz \right],$$

$$X_{12} = -\frac{1}{2h} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\beta}{4} \int_0^{\bar{z}} dt \int_0^{\bar{z}} J_0(\alpha i \sqrt{t\bar{z}}) dz \right],$$

$$X_{22} = \frac{1}{2h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\beta}{4} \int_0^{\bar{z}} dt \int_0^{\bar{z}} J_0(\alpha i \sqrt{t\bar{z}}) dz \right].$$

Таким образом, мы нашли решение задачи 2 в явной форме.

Задача 3. Край оболочки зашпелен, оболочка находится под действием только собственного веса.

В данном случае из формулы (2) находим

$$Y_1 = Y_2 = 0, \quad Y_3 = -\rho^2 g.$$

Третье уравнение системы (1) принимает вид

$$\Delta u_3 + \frac{2x}{R(R-h_0)} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{2y}{R(R-h_0)} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\rho^2 g}{\mu} = 0, \quad (2.6)$$

где ρ — плотность среды.

Легко проверить, что функция

$$u_3^*(x, y) = \frac{\rho}{2\mu} \int e^{-\frac{x^2}{R(R-h_0)}} \left[\int_0^x e^{\frac{t^2}{R(R-h_0)}} dt \right] dx + \\ + \frac{\rho}{2\mu} \int e^{-\frac{y^2}{R(R-h_0)}} \left[\int_0^y e^{\frac{t^2}{R(R-h_0)}} dt \right] dy$$

является частным решением уравнения (2.6). Следовательно $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=u_3^*$ будут частными решениями системы (1).

Найдем общее решение однородной системы (1). Для уравнения (2.5) из (5), (6) получаем $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\Gamma} = 0$.

Следовательно $u_1 = u_2 = 0$, так как $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ на Γ . Тогда имеем

$$u_3(x, y) = v(x, y) + u_3^*(x, y), \quad (2.7)$$

где $v(x, y)$ — решение однородного уравнения (2.6). Запишем его в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} + \beta \left[z \frac{\partial v}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right] = 0, \quad \beta = \frac{1}{R(R-h_0)}. \quad (2.8)$$

Находим граничное условие для $v(x, y)$

$$v(x, y) \Big|_{\Gamma} = -u_3^*(x, y) \Big|_{\Gamma} = -\frac{\rho^2 g}{4\mu} + \frac{\rho^2 g \beta}{48\mu} (\cos 4s + 3).$$

Функция Римана (2.8) определяется из интегрального уравнения

$$G(t, \tau, z, \bar{z}) - \beta \int_{\bar{z}}^{\bar{z}} \bar{z} G(t, \tau, \bar{z}, \bar{z}) d\bar{z} - \beta \int_{\bar{z}}^{\bar{z}} z G(t, \tau, z, \bar{z}) dz = 1,$$

$$G(t, \tau, z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k g_k(t, \tau, z, \bar{z}),$$

$$g_0 = 1, \quad g_1 = \bar{z}(z-t) + z(\bar{z}-\tau),$$

$$g_2 = \bar{z}^2 \frac{(z-t)^2}{2} + z^2 \frac{(z-\tau)^2}{2} + \frac{\bar{z}(\bar{z}-\tau)}{2} (z^2 - t^2) + \frac{z(z-t)}{2} (\bar{z}^2 - \tau^2).$$

По формулам (1.8) последовательно находим

$$a_0 = -\frac{\rho^2 g}{4\mu} + \frac{\rho^2 g}{16\mu} \beta, \quad \Phi_0(z) = \frac{\rho^2 g \beta}{12\mu} z^3 = cz^3,$$

$$v_0(x, y) = a_0 + \frac{c}{4} \operatorname{Re} z^4,$$

$$v_1(x, y) = -2a_0 - \frac{3c}{10} \operatorname{Re} z^4 + 2a_0 z \bar{z} + \frac{3c}{10} \operatorname{Re} \bar{z} z^5,$$

$$v_2(x, y) = 2a_0 + \frac{4c}{25} \operatorname{Re} z^4 - 4a_0 z \bar{z} + 2a_0 z^2 \bar{z}^2 - \\ - \frac{9}{25} c \operatorname{Re} \bar{z} z^5 + \frac{c}{5} \operatorname{Re} z^2 \bar{z}^6.$$

Получим второе приближение

$$v_2(x, y) = v_0(x, y) + \frac{1}{3} v_1(x, y) + \frac{1}{9} v_2(x, y).$$

Подставив в формулу (2.7) найдем соответственно второе приближение искомой функции $u_2(x, y)$.

В заключение выражаю сердечную благодарность моему научному руководителю академику И. Н. Векуа за ценные советы и указания.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения АН СССР

Поступила 8 IX 1961

Կ. Ք. Սահյան

ՄՈՏԱՎՈՐ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԹԱՂԱՆԹԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՆԿԱՏՄԱՄԲ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ մեթոդը առավել էֆեկտիվ է սակավաթևք պրիզմալաձև թաղանթների համար, որոնց հավասարումները բնութագրվում են փոքր պարամետրի առկայությամբ:

Հոդվածում արվում են եզրային խնդրի լուծման կառուցման եղանակ կրկրորդ ու չորրորդ կարգերի հավասարումների լուծումների համար և լուծումների գնահատականներ: Տվյալ մեթոդով հաշվարկվում են անմոմենտ լարան վիճակում գտնվող բոլոր սակավաթևք պրիզմալաձև թաղանթները, որոնց մոտ

$$\alpha(x, y) = \frac{2}{h^+ - h^-}$$

($2h = h^+ - h^-$ թաղանթի հաստությունն է) ֆունկցիան անալիտիկ ֆունկցիա է x -ի և y -ի նկատմամբ: Որպես օրինակներ գտնված են տեղափոխման վեկտորի և լարումների տենզորի կոմպոնենտների մոտավոր արժեքները՝ սֆերիկ, գլանաձև ու շրջանային գլանաձև թաղանթների համար՝ սահմանում արված տվյալներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Труды Тбиз. математ. ин-та, 21, 1955.
2. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, 1948.
3. Санджаева К. Б. Приближенный метод решения краевой задачи для уравнения $\Delta \Delta z - k^2 \Delta z = 0$. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 14, 3, 1961.