ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ-մաթեմ. գիտություններ XV, № 2, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. Мовсисян

Об осесимметрично-нагруженной анизотропной цилиндрической оболочке

В работе [1] нами получены разрешающее уравнение и решение некоторых конкретных задач цилиндрической оболочки вращения, когда материал оболочки имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности оболочки (в частности, оболочка будет таковой, когда материал ортотропен, но главные направления упругости не совпадают с линиями кривизны оболочки). В [1] установлено, что несмотря на полную симметрию задачи, в отличие от изотропных и ортотропных оболочек (когда главные направления упругости совпадают с координатными линиями), в данном случае появляются перемещение, направленное по направляющим цилиндра, а также сдвигающее и перерезывающее усилие и крутящий момент, т. е. оболочка претерпевает деформации кручения и сдвига.

В зависимости от угла, составляемого главными направлениями упругости с координатными линиями, будем получать различные значения прогибов, собственных частот, критических усилий и т. д. Очень важно нахождение того значения угла, при котором прогиб будет наименьшим, а критическое усилие — наибольшим. Сказанное в равной степени относится и к конструктивно-анизотропным оболочкам, т. е. к оболочкам, подкрепленным стрингерами и шпангоутами.

В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи статики и динамики анизотропной оболочки с одновременным выявлением того расположения материала оболочки при котором он используется наилучшим образом.

1. Рассмотрим оболочку с радиусом кривизны r. Положение какой-либо точки оболочки будем определять безразмерной координатой x, т. е. отношением длины образующей к радиусу оболочки.

Считаем, что оболочка нагружена нормально приложенной поверхностной нагрузкой.

Уравнения движения элемента оболочки будут иметь вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial x} + rN_2 = 0. \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} - N_2 = 0, \qquad \frac{\partial G_1}{\partial x} - rN_1 = 0,$$

$$T_2 + \frac{\partial N_1}{\partial x} - rh\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + rZ(x, t) = 0, \qquad S_1 + S_2 + \frac{H_2}{r} = 0.$$

Здесь h — толщина оболочки, ρ — плотность материала.

В уравнениях движения элемента, как это делается обычно, пренебрегли инерционными силами, соответствующими перемещениям u и v, оставляя открытым вопрос погрешности.

Имеется также следующая связь между усилиями и перемещениями [1, 2]

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{h}{r}\left[B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - B_{12}w + B_{16}\frac{\partial v}{\partial x}\right],\\
T_2 &= \frac{h}{r}\left[B_{12}\frac{\partial u}{\partial x} - B_{22}w + B_{26}\frac{\partial v}{\partial x}\right],\\
S_1 &= -S_2 = \frac{h}{r}\left[B_{16}\frac{\partial u}{\partial x} - B_{26}w + B_{66}\frac{\partial v}{\partial x}\right],\\
G_1 &= -\frac{h^3}{12r^2}\left[B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B_{16}\frac{\partial v}{\partial x}\right],\\
G_2 &= -\frac{h^3}{12r^2}\left[B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B_{26}\frac{\partial v}{\partial x}\right],\\
H_1 &= -H_2 = \frac{h^3}{12r^2}\left[B_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B_{66}\frac{\partial v}{\partial x}\right].
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) получаем следующие уравнения движения в перемещениях

$$\begin{aligned}
&B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - B_{12}\frac{\partial w}{\partial x} = 0,\\
&B_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - B_{26}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h^2}{12r^2}B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0,\\
&B_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{26}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{h^2}{6r^2}B_{16}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - B_{22}w -\\
&\quad - \frac{h^2}{12r^2}B_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - r^2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{r^2}{h}Z(x, t) = 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Приняв

$$\begin{aligned}
u &= \frac{B_{12}B_{66} - B_{16}B_{26}}{B_{11}B_{66} - B_{16}^2}\int w\,dx + \frac{h^2}{12r^2}\,\frac{B_{16}^2}{B_{11}B_{66} - B_{16}^2}\frac{\partial w}{\partial x} + ax + b,\\
v &= \frac{B_{11}B_{26} - B_{16}B_{12}}{B_{11}B_{66} - B_{16}^2}\int w\,dx - \frac{h^2}{12r^2}\,\frac{B_{11}B_{16}}{B_{11}B_{66} - B_{16}^2}\frac{\partial w}{\partial x} + cx + d.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где a, b, c и d — произвольные постоянные, тождественно удовлетворим первым двум уравнениям (1.3), а из третьего получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2m\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+nw+\frac{12r^4\rho}{h^2B_{11}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{12r^2}{h^2B_{11}}\left(\frac{r^2}{h}Z+B_{12}a+B_{26}c\right), \quad (1.5)$$

где

$$m=\frac{3}{2}\,\frac{B_{16}(B_{11}B_{26}-B_{12}B_{16})}{B_{11}(B_{11}B_{66}-B_{16}^2)},$$
$$n=\frac{12r^2}{h^2}\,\frac{\Omega}{B_{11}(B_{11}B_{66}-B_{16}^2)}, \quad (1.6)$$

$$\Omega=(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)\,B_{66}+2B_{12}B_{16}B_{26}-B_{22}B_{16}^2+B_{11}B_{26}^2.$$

Относительно знака m ничего определенного нельзя сказать, он может быть и положительным и отрицательным, а n всегда положителен. Последнее получается из условия, что потенциальная энергия деформации — положительная квадратичная форма.

Уравнение (1.5) можно рассматривать как уравнение изгиба балки на упругом основании, на которой кроме поперечной нагрузки действует еще продольное усилие.

Рассмотрим конкретные задачи. Для простоты все рассмотренные здесь задачи имеют шарнирно-опертые краевые условия. Без затруднений можно получить решения задач с другими условиями на концах.

2. Пусть оболочка несет произвольное внешнее давление $Z=q(x)$, не зависящее от времени. Уравнение равновесия такой оболочки будет

$$\frac{d^4 w}{dx^4}+2m\frac{d^2 w}{dx^2}+nw=\frac{12r^2}{h^2B_{11}}\left(\frac{r^2}{h}q(x)+B_{12}\cdot a+B_{26}\cdot c\right). \quad (2.1)$$

По условию на краях имеем следующие условия

$$T_1=G_1=v=w=0 \quad \text{при} \quad x=0 \text{ и } x=l/r. \quad (2.2)$$

Выражение T_1 из (1.2) при (1.4) принимает следующий вид

$$T_1=\frac{h}{r}(B_{11}\cdot a+B_{16}\cdot c). \quad (2.3)$$

Чтобы удовлетворить условию $T_1=0$ при $x=0$ и $x=l/r$, надо положить $a=c=0$.

Остальным условиям (2.2) удовлетворим, выбрав w в виде

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\cdot\sin\frac{k\pi r}{l}x, \quad (2.4)$$

где l — длина оболочки, f_k — неизвестные постоянные.

Разложив $q(x)$ в ряд, получим

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \sin\frac{k\pi r}{l} x,$$

$$q_k = \frac{2r}{l}\int_0^{\frac{l}{r}} q(x)\cdot\sin\frac{k\pi r}{l} x\cdot dx. \tag{2.5}$$

Подставив (2.4) и (2.5) в (2.1), для неизвестных f_k получим

$$f_k = \frac{12r^4}{h^3 B_{11}\left[\left(\frac{k\pi r}{l}\right)^4 - 2m\left(\frac{k\pi r}{l}\right)^2 + n\right]}\cdot q_k. \tag{2.6}$$

Имея (2.4) и (2.6), по формулам (1.2) и (1.4) можно получить выражения для всех расчетных величин.

В частности, если

$$q(x) = q_1\cdot\sin\frac{\pi r}{l} x \tag{2.7}$$

имеем

$$w = f_1\cdot\sin\frac{\pi r}{l} x,$$

$$f_1 = \frac{12r^4}{h^3 B_{11}\left[\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4 - 2m\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 + n\right]}\cdot q_1. \tag{2.8}$$

Как видно из (2.7), f_1 есть стрела прогиба оболочки.

Пусть оболочка изготовлена из ортотропного материала, главные направления упругости которого составляют угол φ с координатными линиями*. Если обозначить через B'_{ij} жесткости, когда главные направления упругости совпадают с координатными линиями и через B_{ij} — когда эти направления составляют угол φ с координатными линиями, то можно записать следующие зависимости между B'_{ij} и B_{ij} [3, 4]

$$\begin{aligned}
B_{11} &= B'_{11}\cos^4\varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66})\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi + B'_{22}\cdot\sin^4\varphi,\\
B_{22} &= B'_{11}\sin^4\varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66})\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi + B'_{22}\cdot\cos^4\varphi,\\
B_{12} &= B'_{12} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})]\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi,\\
B_{66} &= B'_{66} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})]\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi,\\
B_{16} &= \frac{1}{2}[B'_{22}\sin^2\varphi - B'_{11}\cos^2\varphi + (B'_{12} + 2B'_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi,\\
B_{26} &= \frac{1}{2}[B'_{22}\cos^2\varphi - B'_{11}\sin^2\varphi - (B'_{12} + 2B'_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

* Можно принять общий случай анизотропии, но из-за громоздкости получаемых формул здесь материал принимаем ортотропным.

Подставив (2.9) в (1.6) и (2.8), получим

$$f_1 = rq_1 \cdot F\left(B'_{ij}, \varphi, \frac{r}{h}, \frac{l}{r}\right), \tag{2.10}$$

где F—функция от жесткостей, угла φ и геометрических размеров оболочки. Вряд ли возможно в общем случае получение выражения φ, соответствующее наименьшему значению F. Приведем выражение F для конкретного материала и для некоторых значений φ.

Для стеклотекстолита КАСТ-В известны следующие упругие постоянные [5]

$$E_1 = 2{,}15 \cdot 10^5 \ кг/см^2; \quad E_2 = 1{,}23 \cdot 10^5 \ кг/см^2; \quad \nu_{12} = 0{,}19;$$
$$\nu_{21} = 0{,}11; \quad G = 0{,}207 \cdot 10^5 кг/см^2.$$

B_{ij} выражаются через эти коэффициенты известным образом [3, 4].

В таблице 1 приведены значения $F \cdot 10^5$ для некоторых значений углов φ при $\frac{r}{h} = 100$, $\frac{l}{r} = \pi$.

Таблица 1

φ	0°	30°	45°	60°	90°
$F \cdot 10^5$	0,812	1,009	1,759	0,877	0,465

Как видно из приведенной таблицы, прогиб оболочки из стеклотекстолита при нагрузке (2.7) получает наибольшее значение при угле поворота главного направления упругости относительно координатных линий, равном 45° и наименьшее значение — при угле, равном 90°.

3. Уравнение статической устойчивости рассматриваемой оболочки, когда на краях действуют постоянные продольные сжимающие усилия p, получим из (2.1), если заменить Z на $-p\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dx^2}$. Имеем

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 2m\frac{d^2w}{dx^2} + nw + \frac{12r^2}{h^3B_{11}}p\frac{d^2w}{dx^2} = 0. \tag{3.1}$$

Ищем решение (3.1) в виде (2.4).

Значения p, при которых возможны осесимметричные формы потери устойчивости, вычислятся по формуле

$$p_k = \frac{h^3B_{11}\left[\left(\frac{k\pi r}{l}\right)^4 - 2m\left(\frac{k\pi r}{l}\right)^2 + n\right]}{12r^2\left(\frac{k\pi r}{l}\right)^2}. \tag{3.2}$$

Наименьшее критическое усилие равно

$$p = \frac{h^3B_{11}}{6r^2}(\sqrt{n} - m) \tag{3.3}$$

с количеством полуволн

$$k \approx \frac{l}{\pi r}\sqrt[4]{n}. \tag{3.4}$$

Таблица 2

φ	0°	30°	45°	60°	90°
ph^{-1}	947	678	447	587	801
k	16	17	17	20	20

В таблице 2 приведены значения $p \cdot h^{-1}$ и количество полуволн для вышерассмотренной оболочки.

4. Уравнение собственных колебаний данной оболочки получаем из (1.5)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + nw + \frac{12r^4\rho}{B_{11}h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{4.1}$$

Ищем решение (4.1) в виде

$$w = W(x) \cdot \sin \omega t, \tag{4.2}$$

где ω — собственная частота колебаний.

Из (4.1) и (4.2) для $W(x)$ получим

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 2m \frac{d^2 W}{dx^2} + nW - \frac{12r^4\rho\omega^2}{h^2B_{11}} W = 0. \tag{4.3}$$

Беря решение (4.3) в виде (2.4), для собственных частот получим

$$\omega_k^2 = \frac{h^2B_{11}\left[\left(\frac{k\pi r}{l}\right)^4 - 2m\left(\frac{k\pi r}{l}\right)^2 + n\right]}{12r^4\rho}. \tag{4.4}$$

В таблице 3 приведено несколько значений $\omega_1 \cdot r\sqrt{\rho}$ для вышерассмотренной оболочки.

Таблица 3

φ	0°	30°	45°	60°	90°
$\omega_1 r\sqrt{\rho}$	350	316	238	337	463

5. Исследуем вопрос перехода через критическую силу рассматриваемой оболочки. В работе [6] изучено поведение изотропной оболочки при совместном действии поверхностной нагрузки и осевого сжатия, зависящих от времени. Как частный пример рассмотрен случай, когда поверхностная нагрузка не зависит от времени (имеет вид (2.7)), а края оболочки сближаются с заданной скоростью. Легко видеть, что это равносильно случаю, когда оболочка имеет начальную неправильность вида (2.8). Здесь мы будем предполагать, что оболочка имеет начальную неправильность. Исследование в предыдущих пунктах показало, что второй член левой части уравнения (1.5) имеет незначительное влияние на критическую силу, частоту и на прогиб. С другой стороны, если исходить из теории пологих оболочек или оболочек с большим показателем изменяемости, то вместо (1.5) получается уравнение без этого члена [1, 2]. Поэтому, для краткости, этим членом будем пренебрегать сначала.

Если предположить, что оболочка имеет начальную неправильность $w_0(x)$ и в срединной поверхности действует продольное усилие T_1, то вместо уравнения движения (1.5) будем иметь

$$\frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + n(w - w_0) + \frac{12r^4\rho}{h^2B_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{12r^2}{h^3B_{11}} T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{5.1}$$

где w — полный прогиб оболочки.

Для простоты принимаем, что

$$w_0 = f_0 \cdot \sin \frac{\pi r}{l} x, \tag{5.2}$$

где f_0 — стрела начального прогиба.

Решение (5.1) ищем в виде (2.8). Для неизвестного f_1 получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \omega_1^2 \left[1 + \frac{T_1}{T_{1,kp}} \right] f_1 = \omega_1^2 \cdot f_0, \tag{5.3}$$

где $T_{1,kp}$ и ω_1^2 имеют значения (3.2) и (4.4) при $k = 1$.

Принимая $f = f_1/f_0$ и $\tau = \omega_1 t$, получаем

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left[1 + \frac{T_1(\tau)}{T_{1,kp}} \right] f = 1. \tag{5.4}$$

Предположив, что края оболочки сближаются со скоростью c, через время t для T_1 из (1.2) в линейном приближении получим

$$T_1 = -\frac{B_{11} h}{l} ct. \tag{5.5}$$

Тогда из (5.4) имеем

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + [1 - \theta\tau] f = 1, \tag{5.6}$$

где

$$\theta = \frac{\pi^2 \lambda \cdot \left(\frac{r}{l} \right)^2}{\left[\left(\frac{\pi r}{l} \right)^4 \cdot \frac{h^2}{12 r^2} + \frac{\Omega}{B_{11}(B_{11}B_{66} - B_{16}^2)} \right]^{3/2}},$$

$$\lambda = \frac{c}{C}, \qquad C = \sqrt{\frac{B_{11}}{\rho}}. \tag{5.7}$$

Как видно из (5.7), C пропорционально скорости распространения звука в материале в направлении образующей оболочки.

Решение (5.6) в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\theta}$ получим, приняв $\theta\tau = \tau_1$.

Тогда из (5.6) будем иметь

$$\frac{d^2 f}{d\tau_1^2} + \alpha^2 \cdot \tau_1 f = \alpha^2, \tag{5.8}$$

где $\alpha = \frac{1}{\theta}$.

Решением (5.8) будет

$$f(\tau_1) = c_1 \sqrt{\tau_1} J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \alpha \tau_1^{3/2} \right) + c_2 \sqrt{\tau_1} J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \alpha \tau_1^{3/2} \right) +$$

$$+\frac{\alpha^2}{W}\left[\sqrt{\tau_1}\,J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha\tau_1^{3/2}\right)\int\limits_0^{\tau_1}\sqrt{\tau_1}\,J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha\tau_1^{3/2}\right)d\tau_1-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\tau_1}\,J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha\tau_1^{3/2}\right)\int\limits_0^{\tau_1}\sqrt{\tau_1}\,J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha\tau_1^{3/2}\right)d\tau_1\right], \tag{5.9}$$

где $J_{\pm\frac{1}{3}}$ — Бесселевы функции первого рода с индексами $\pm\frac{1}{3}$, W — определитель Вронского, равный

$$W=-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}. \tag{5.10}$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 находятся из начальных условий.

В частности, для выражения f в момент $\tau_1=0$ (что соответствует случаю, когда усилие осевого сжатия равно критическому), будем иметь

$$f_{kp}=-\frac{\sqrt[3]{3}\,\alpha^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)W}\left[J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha\right)+\int\limits_0^{\frac{2}{3}\alpha}J_{\frac{1}{3}}(x)\,dx\right], \tag{5.11}$$

если принять, что края оболочки сближаются с нулевой начальной скоростью $[f(1)=1,\ f'(1)=0]$.

Решение (5.6) для $\tau>\frac{1}{6}$ выражается в видоизмененных функциях Бесселя.

В таблице 4 приведены значения f_{kp} при некоторых значениях φ для стеклотекстолита ($\lambda=0{,}5$; $r/l=0{,}5$; $r/h=100$).

Таблица 4

φ	0°	30°	45°	60°	90°
f_{kp}	1,061	1,034	1,065	1,168	2,856

Исследование приведенных задач показало, что изменением расположения материала можно добиться наименьшего прогиба или наибольшего критического усилия для данной оболочки.

Иститут математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 IX 1961

Լ. Ա. Մովսիսյան

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են ընդհանուր անիզոտրոպ գլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ մի քանի ստատիկ և դինամիկ խնդիրներ:

Ինչպես հայտնի է, թաղանթի նյութը կարելի է դիտարկել որպես ընդհանուր անիզոտրոպ, եթե նա օրթոտրոպ է, բայց առաձգականության գլխավոր առանցքները չեն համընկնում կոորդինատային առանցքների հետ։ Աշխատության մեջ ցույց է տրվում, որ առաձգականության գլխավոր առանցքների պտտմամբ կոորդինատական առանցքների նկատմամբ կարելի է հասնել այնքանի, որ թաղանթում առաջանան փոքր ճկվածքներ, կրիտիկական ուժը ընդունի ամենամեծ արժեքը, կամ խուսափել ռեզոնանսի առաջացման հնարավորությունից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсисян Л. А.* К расчету анизотропной (неортотропной) цилиндрической оболочки вращения. Известия АН АрмССР (серия ФМН), **12**, № 4, 1959.
2. *Амбарцумян С. А.* К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, **12**, № 1, 1948.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
5. *Ломакин В. А., Огибалов П. М., Тюнеева И. М.* Механические свойства стеклотекстолита при статическом нагружении. Вестник МГУ, серия математика, механика, № 3, 1961.
6. *Мовсисян Л. А.* Об одной динамической задаче цилиндрической оболочки. ДАН АрмССР, **32**, № 5, 1961.