

Н. Х. Арутюнян

Кручение цилиндрической оболочки с произвольным замкнутым профилем

Приближенный способ [1] расчета на кручение тонкостенных стержней с замкнутыми профилями, которым широко пользуются в технических приложениях, основан на следующих двух гипотезах:

- а) касательные напряжения по всей толщине стенки скручиваемого профиля направлены параллельно ее средней линии,
- б) касательные напряжения постоянны по толщине стенки профиля.

Эти гипотезы, которые следуют непосредственно из мембранной аналогии, являются приближенными. Поэтому полученные на основе их известные формулы Бредта [2] для расчета на кручение тонкостенных замкнутых профилей являются более или менее точными в зависимости от того, насколько тонкостенен данный профиль.

Величина ошибки, связанная с принятием этих гипотез, насколько нам известно, пока остается неопределенной, хотя определение ее было бы весьма желательным, поскольку тогда можно было бы судить о погрешности приближенных формул Бредта и тем самым установить границы их применимости.

В настоящей работе приводится решение задачи о кручении тонкостенных стержней с трубчатыми профилями, рассматривая их как длинные замкнутые цилиндрические оболочки.

Решение строится путем интегрирования основного уравнения теории кручения методом малого параметра, то есть представлением решения в виде разложения по степеням параметра "толщина оболочки".

Такой метод позволяет, во-первых, оценить точность вышеуказанных гипотез, при помощи которых получены приближенные формулы Бредта для расчета на кручение тонкостенных стержней с трубчатыми профилями и, тем самым, установить границы их применимости, а, во-вторых, решить задачи о кручении таких стержней, для которых формулы Бредта принципиально не применимы.

Задача о кручении и изгибе цилиндрической оболочки произвольного открытого профиля методом малого параметра была впервые рассмотрена в работе Р. Л. Малкиной [3].

Кручение тонкостенных замкнутых цилиндров за пределами упругости на основе общей теории оболочек исследовано в работе Г. Хандельмана [4].

§ 1. Постановка задачи. Основное уравнение и его решение

Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня, поперечное сечение которого ограничено двумя замкнутыми кривыми Γ_0 и Γ_1 (фиг. 1).

Отнесем сечение стержня к криволинейным координатам s и n , где s — координата, отсчитываемая вдоль средней линии профиля, длина которой равна l , а n отсчитывается по нормали к средней линии Γ .

Ось z направлена параллельно образующей стержня.

Для простоты дальнейших выкладок толщину h стенки профиля примем постоянной.

Введем безразмерные координаты

$$\eta = \frac{n}{h}, \quad \xi = \frac{s}{l}. \quad (1)$$

Тогда уравнение кручения примет вид

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \lambda^2 H \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + H^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + H \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -2H^2 \lambda^2. \quad (1.1)$$

Здесь $U(s, n) = l^2 \Phi(\xi, \eta, \lambda)$ есть функция напряжений при кручении.

$$\lambda = \frac{h}{l}, \quad H = 1 + \frac{\lambda l \eta_1}{\rho_s}, \quad \eta_1 = \eta_s(\xi) = \rho(s), \quad (1.2)$$

где $\rho(s)$ — радиус кривизны средней линии профиля.

На контуре скручиваемого профиля, т. е. при $\eta = \pm \frac{1}{2}$, функция $\Phi(\xi, \eta, \lambda)$ должна удовлетворять условиям

$$\Phi\left(\xi, \frac{1}{2}; \lambda\right) = 0, \quad (1.3)$$

$$\Phi\left(\xi, -\frac{1}{2}; \lambda\right) = \frac{U_1}{l^2},$$

где U_1 — некоторая постоянная, подлежащая определению в дальнейшем.

Решение уравнения (1.1) при условиях (1.3) будем искать в виде ряда по степеням малого параметра $\lambda = \frac{h}{l}$.

$$\Phi(\xi, \eta; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(\xi, \eta) \lambda^k. \quad (1.4)$$

Отметим, что в этом случае, в отличие от случая кручения тонкостенных стержней с открытым профилем, рассмотренного в работе [3], граничные условия (1.2) удовлетворяются точно и поэтому полученное решение является точным.

Из граничных условий (1.3) при помощи (1.4) находим

$$\begin{cases} \Phi_k\left(\xi, \frac{1}{2}\right) = 0 & (k=0, 1, 2, 3, \dots), \\ \Phi_k\left(\xi, -\frac{1}{2}\right) = 0 & (k=1, 2, 3, \dots), \\ \Phi_0\left(\xi, -\frac{1}{2}\right) = \frac{U_1}{l^2}, \end{cases} \quad (1.5)$$

Подставив выражение $\Phi(\xi, \eta; \lambda)$ из (1.4) в уравнение (1.1) и учитывая соотношение (1.2), после приравнения коэффициентов при одинаковых степенях параметра λ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} &= -\frac{l}{\rho_*} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} &= -\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\eta l^2}{\rho_*^2} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} - \frac{l}{\rho_*} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - 2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Интегрируя рекуррентные уравнения (1.6) при граничных условиях (1.5), последовательно определим все функции $\Phi_k(\xi, \eta)$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{U_1}{l^2} \left(\frac{1}{2} - \eta \right), \\ \Phi_1 &= \frac{U_1}{2l\rho_*} \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right), \\ \Phi_2 &= -\left(\frac{U_1 \eta}{3\rho_*^2} + 1 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right), \\ \Phi_3 &= \frac{U_1}{8l\rho_*^2} \left(\frac{\partial^2 \rho_*}{\partial \xi^2} - \frac{2}{\rho_*} \left(\frac{\partial \rho_*}{\partial \xi} \right)^2 \right) \left(\frac{\eta^4}{3} - \frac{\eta^2}{2} + \frac{5}{48} \right) + \\ &\quad + \frac{l\eta}{3\rho_*} \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{U_1 l}{4\rho_*^3} \left(\eta^4 - \frac{\eta^2}{6} - \frac{1}{48} \right), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставив эти значения в (1.4) и перейдя при помощи (А) координатам (s, n) , для функции напряжений $U(s, n)$ при кручении получим следующее выражение

$$U(s, n) = U_1 \left\{ - \left(\frac{n}{h} - \frac{1}{2} \right) + \frac{h}{2\rho} \left(\frac{n^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{hn}{3\rho} \left(\frac{n^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{8\rho^2} \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} - \frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)^2 \right] \left(\frac{n^4}{3h^4} - \frac{n^2}{2h^2} + \frac{5}{48} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{4\rho^3} \left(\frac{n^4}{h^4} - \frac{n^2}{6h^2} - \frac{1}{48} \right) - \dots \right\} - h^2 \left(\frac{n^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) + \\ + \frac{h^2 n}{3\rho} \left(\frac{n^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{h^4}{4\rho^2} \left(\frac{n^4}{h^4} - \frac{n^2}{6h^2} - \frac{1}{48} \right) + \dots, \quad (1.7)$$

где $\rho = \rho(s)$ — радиус кривизны средней линии.

Остается определить постоянное значение U_1 , которое входит в выражение (1.8). Для этого воспользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial n} ds = -2\Omega, \quad (1.8)$$

где Ω — площадь, ограниченная средней линией Γ профиля, то есть линией $n = 0$.

Подставив выражение для $U(s, n)$ из (1.8) в (1.9) и проинтегрировав, после некоторых преобразований получим

$$U_1 = \frac{2h\Omega - \frac{h^3}{12} \int_0^l \frac{ds}{\rho(s)}}{l - \frac{h}{12} \int_0^l \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.9)$$

Зная функцию напряжений $U(s, n)$, найдем касательные напряжения τ_{xz} и τ_{nz} при помощи формул

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G\theta \frac{\partial U}{\partial n}, \\ \tau_{nz} = -G\theta \frac{1}{1 + \frac{n}{\rho}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s}. \end{cases} \quad (1.10)$$

а для жесткости C получим выражение

$$C = 2G \left\{ U_1 \Omega + \int_0^l ds \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} U(s, n) \left(1 + \frac{n}{\rho} \right) dn \right\}. \quad (1.11)$$

Здесь под Ω можно подразумевать как площадь, ограниченную внутренним контуром Γ , так и площадь, ограниченную средней линией Γ профиля.

Пользуясь полученными решениями (1.8), (1.10), (1.11) и (1.12), можно построить ряд приближенных формул для расчета на кручение тонкостенных стержней с трубчатыми профилями в зависимости от порядка малости отношения $\frac{h}{R_0}$. Разумеется, что эти приближенные формулы будут учитывать влияние кривизны и тонкостенности профилей на их напряженное состояние при кручении тем точнее, чем больше членов сохранить в формуле (1.8).

а) Ограничиваясь, например, в формуле (1.8) точностью до членов порядка $\frac{h}{\rho}$ (следовательно, также и членов порядка $\frac{h}{l}$), для функции напряжений $U(s, n)$ будем иметь

$$U(s, n) = \Omega \frac{h}{l} \left(1 - 2 \frac{n}{h} \right), \quad (1.13)$$

а согласно (1.11) и (1.12) для компонентов напряжений τ_{sz} , τ_{nz} и жесткости C получим

$$\begin{cases} \tau_{sz} = -2Gb \frac{\Omega}{l} = -\frac{M}{2\Omega h}, \\ \tau_{nz} = 0, \\ C = \frac{M}{\theta} = G \frac{4\Omega^2 h}{l}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Эти формулы известны как формулы Бредта [2] и применяются для расчета на кручение трубчатых профилей.

Следовательно, точность формул Бредта определяется равенством $1 + \frac{h}{R_0} \approx 1$.

б) Если ограничиться в выражении (1.8) членами, содержащими $\frac{h}{\rho}$ (следовательно и $\frac{h}{l}$), что принято в теории оболочек, то получим

$$U(s, n) = \Omega \frac{h}{l} \left(1 - 2 \frac{n}{h} \right) + \frac{h^2}{4} \left(1 - 4 \frac{n^2}{h^2} \right) \left(1 - \frac{\Omega}{\rho l} \right). \quad (1.15)$$

Далее, согласно (1.11), будем иметь

$$\begin{cases} \tau_{sz} = -2Gb \left[\frac{\Omega}{l} \left(1 - \frac{n}{\rho} \right) + n \right], \\ \tau_{nz} = -Gb \left(1 - 4 \frac{n^2}{h^2} \right) \frac{2h^2}{4\rho l (n + \rho)} \frac{d\rho}{ds} \approx 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

а для определения жесткости C в этом случае в силу (1.12) и (1.13) получим следующую, более точную, формулу

$$C = \frac{M}{\theta} = G \frac{h}{l} \left[4\Omega^2 + \frac{h}{l} \left[\frac{hl^3}{3} - \frac{2hl}{3} \int_0^l \frac{ds}{\rho(s)} \right] \right]. \quad (1.14)$$

В заключение отметим, что совершенно аналогичным образом как это было сделано выше, можно найти и функцию перемещений Сен-Венана $\varphi(s, n)$, которой определяется деформация $W(s, n) = \theta \varphi(s, n)$ трубчатого профиля при его кручении.

Опуская промежуточные выкладки и вычисления, приведем только окончательные выражения для $\varphi(s, n)$.

а) Если ограничиться точностью до членов порядка $\frac{h}{\rho}$, то $\varphi(s, n)$ получим

$$\varphi(s, n) = \frac{s}{l} \omega(l) - \omega(s) - (xx' + yy') n + \varphi_0. \quad (1.15)$$

Здесь $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнение средней линии Γ профиля в параметрической форме, $\omega(s)$ — секториальная площадь, равная

$$\omega(s) = \int_0^s (xy' - yx') ds, \quad (1.16)$$

а φ_0 — некоторое постоянное число, определяемое из условия нормирования $\varphi(s, n)$.

Эти формулы были впервые получены Г. Ю. Джанелидзе другим путем.

б) Если же ограничиться точностью членов порядка $\frac{h}{\rho}$, то $\varphi(s, n)$ найдем

$$\varphi(s, n) = \frac{s}{l} \omega(l) - \omega(s) - (xx' + yy') \left(1 - \frac{n}{2\rho} \right) + \varphi_0,$$

где $\rho = \rho(s)$ есть радиус кривизны средней линии Γ .

Из формул (1.8) и (1.20) следует, что при $n = 0$ $\varphi(0, 0) = \varphi_0$.

§ 2. Концентрация напряжений во входящих углах тонкостенного стержня замкнутого профиля при его кручении

При кручении тонкостенных труб, если профиль трубы имеет входящие углы, как, например, в случае, показанном на фиг. 1, в окрестностях этих углов имеет место значительная концентрация напряжений.

Максимальные напряжения в окрестностях этих углов оказываются значительно большими, чем напряжения, определяемые

ним из выражений (1.14), и зависят от радиусов закруглений входящих углов:

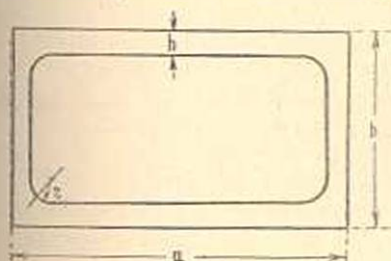
Пользуясь мембранной аналогией, С. П. Тимошенко [6] получил приближенную формулу для определения наибольших касательных напряжений в окрестности входящего угла замкнутого профиля при его кручении.

Эта формула имеет вид

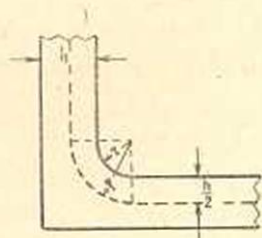
$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \cdot z_k \quad (2.1)$$

$$z_k = \frac{h}{r} \cdot \frac{1 - \frac{l}{4\Omega} (2r + h)}{\ln \left(1 + \frac{h}{r} \right)} + \frac{lr}{2\Omega} \quad (2.2)$$

Здесь $\tau_{\max}^0$ — наибольшее касательное напряжение в стенках профиля в достаточном удалении от входящего угла, h — толщина стенки,



Фиг. 2.



Фиг. 3.

l — длина средней линии профиля, Ω — площадь области, ограниченной средней линией, r — радиус закругления внутренней грани входящего угла, а z_k — коэффициент концентрации.

Однако, более точную формулу для определения значений местных касательных напряжений у закруглений замкнутого профиля при его кручении можно получить при помощи соотношений (1.15) и (1.16).

Из этих соотношений следует, что максимальные напряжения $\tau_{\max}$ получаются в точках $\varphi = -\frac{h}{2}$ и $\rho = \rho_{\min} = r + \frac{h}{2}$.

Тогда из (1.15) получим

$$|\tau_{\max}| = \tau_{\max} = 2G\theta r_0 \left| 1 + \frac{h}{2\rho_{\min}} - \frac{h}{2r_0} \right|, \quad (2.3)$$

где $r_0 = \frac{\Omega}{l}$ — некоторый характерный линейный размер поперечного сечения стержня.

Но согласно (1.14) $\tau_{\max}^0 = 2G\theta \frac{\Omega}{l} = 2G\theta r_0$ есть касательное на-

пряжение на достаточном расстоянии от закругления на прямых участках контура скручиваемого профиля, которое определяется формулой Бредта (1.14). Тогда (2.3) примет вид

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \left(1 + \frac{h}{2\rho_{\min}} - \frac{h}{2r_0} \right), \quad (2.6)$$

т. е.

$$z_k = 1 + \frac{h}{2\rho_{\min}} - \frac{h}{2r_0}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим числовой пример.

Пусть скручиваемый стержень имеет коробчатое сечение (фиг. 2) размерами $a = b = 10$ см, $h = 1$ см, $r = 0,5$ см, $\rho_{\min} = r + \frac{h}{2} = 1$ см.

Тогда по формуле С. П. Тимошенко получим

$$\tau_{\max} = 1,54 \tau_{\max}^0. \quad (2.8)$$

По формуле (2.4) находим

$$\tau_{\max} = 1,50 \tau_{\max}^0. \quad (2.9)$$

Как видно, значения напряжений, вычисленные по формулам (2.6) и (2.7), отличаются незначительно.

В заключение отметим, что формулы (2.1) и (2.4) для вычисления максимальных касательных напряжений будут давать еще более точные результаты, если скручиваемый профиль имеет закругленные углы как с внутренней стороны, так и с внешней.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15.1.1962

Ն. Խ. Հարությունյան

ԿԱՄԱՎՈՐ ՓԱԿ ՊՐՈՖԻԼՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում է խողովակաձև բարակապատ ձողերի ոլորման հանդիման շտապարի դիտարկում են որպես երկար փակ պրոֆիլով զանալին թաղանթներ:

Լուծումը կառուցվում է ոլորման տեսության հիմնական հավասարման ինտեգրման ճանապարհով, փոքր պարամետրի եզանակի կիրառման աղանթով, այսինքն՝ լուծումը ներկայացվում է ըստ «թաղանթի հատուկ պարամետրի աստիճանների վերլուծության տեսքով:

Այսպիսի եզանակը թույլ է տալիս զնահատել շինարարական տեխնիկայում օգտագործվող երկու հիպոթեզների (որոնցից առաջինի հիմքում դր

ված է, որ ուղղվող պրոֆիլի պատի հաստության ուղղությամբ շոշափող լարումները զուգահեռ են թաղանթի միջին գծին, երկրորդում՝ շոշափող լարումները թաղանթի պրոֆիլի պատի հաստության ուղղությամբ հաստատուն են) կիրառման էանապարհով ստացված մոտավոր բանաձևերի ճշտությունը:

Այսպիսով հնարավորություն է ստացվում սահմանել այդ ձողերի կոշտությունը և մաքսիմալ լարումները որոշելու համար ստացված մոտավոր բանաձևերի կիրառելիության սահմանները և միևնույն ժամանակ լուծել որոշման խնդիրները այնպիսի ձողերի համար, որոնց նկատմամբ Բրնգտի բանաձևերը սկզբունքորեն կիրառելի չեն:

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении, т. 1, Машгиз, М.
2. Bredt R. Kritische Bemerkungen zur drehnungselastizität, z. Ver. deut. Ing. 40. 1896. 785—813.
3. Малкина Р. Л. Расчет на изгиб и кручение цилиндрической оболочки произвольного открытого профиля. Труды Уральского политехнического института им. С. М. Кирова. Сборник 54, Вопросы строительной механики, 1955, 137—150.
4. Хандельман Г. Х. (Handelman G.) Torsion of thin-walled closed cylinders beyond the elastic limit. Journal of the Aeronautical Sciences. 17, № 8, 1950, 499—507 (518).
5. Джанелидзе Г. Ю. Обобщенные зависимости теории тонких стержней. ДАН СССР, 1949, 16, № 4, 597—600.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости, ОНТИ, М., 1937.