

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян, А. А. Бабоян

Об одной задаче осесимметричной деформации
полого цилиндра конечной длины

Г. С. Шапиро [1] дал решение осесимметричной задачи для полого, бесконечно длинного, круглого цилиндра, на участке боковой поверхности которого действует равномерно распределенная нормальная нагрузка.

Для полого цилиндра конечной длины эта задача рассматривалась в работах М. А. Бинни [2], В. К. Прокопова [3–5] и С. М. Старостина [6]. Однако в этих работах граничные условия на торцах цилиндра удовлетворяются не полностью. Эта задача рассматривалась также в работах В. Л. Бидермана, С. В. Бояршинова и Р. В. Саусвелла. В. Л. Бидерман [7] использовал вариационный метод Кастильяно. У него уравнения равновесия задачи удовлетворяются точно, а уравнения совместности деформаций — приближенно. С. В. Бояршинов [8] использовал метод Ритца. Здесь точно удовлетворяются условия совместности деформаций, а уравнения равновесия — приближенно. Р. В. Саусвелл [9] для короткого цилиндра, находящегося под действием нормальной нагрузки, приложенного на части боковой поверхности, решение получил релаксационным методом.

Одна задача для полого цилиндра без численного примера рассмотрена в работе Г. М. Валова [10].

В настоящей работе дается точное решение осесимметричной задачи теории упругости для полого круглого цилиндра конечной длины, когда на его боковой поверхности приложена произвольная нагрузка, а на торцах заданы нормальные перемещения и касательные напряжения. Решение представляется в виде рядов Фурье и Фурье-Дини. Приводится численный пример.

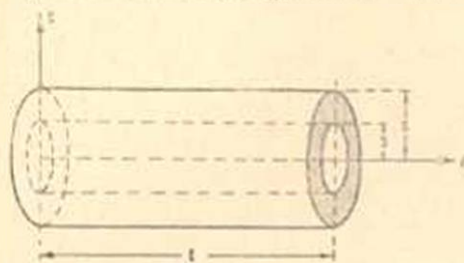
Рассмотрим полый круглый цилиндр длиной l и радиусами R и r ($R > r$). Будем пользоваться цилиндрической системой координат. Совместим ось z с осью цилиндра, а начало координат поместим на одном торце (фиг. 1).

Известно, что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к нахождению функции напряжений $\Phi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (1)$$

На границе области осевого сечения задается закон распределения напряжений или перемещений, выраженных через искомую функцию

Напряжения и перемещения при осесимметричной деформации выражаются через функцию напряжений $\Phi(r, z)$ соотношениями



$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

Фиг. 1.

$$u_r = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z},$$

$$u_z = \frac{1}{2G} \left[2(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right],$$

где G — модуль сдвига, а ν — коэффициент Пуассона.

Решив уравнение (1) методом разделения переменных, для круглого полого цилиндра функцию $\Phi(r, z)$ получим в виде

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & z(Ar^2 + Bz^2 + Cz + D \ln r) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k I_0(\lambda_k r) + F_k K_0(\lambda_k r) + \\ & + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + H_k \lambda_k r K_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \beta_k z + B_k \operatorname{ch} \beta_k z + \\ & + C_k \beta_k z \cdot \operatorname{sh} \beta_k z + D_k \beta_k z \cdot \operatorname{ch} \beta_k z) W_0(\beta_k r), \end{aligned} \quad (3)$$

где $I_1(x)$, $K_1(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода, функция $W_1(\beta_k r)$ имеет вид

$$W_1(\beta_k r) = \frac{J_1(\beta_k r)}{J_1(\beta_k R)} - \frac{Y_1(\beta_k r)}{Y_1(\beta_k R)}, \quad (4)$$

$J_1(x)$ и $Y_1(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента, соответственно первого и второго рода,

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l},$$

а β_k — положительные корни уравнения $W_1(\beta_k R) = 0$ или

$$J_1(s\beta) Y_1(R\beta) - J_1(R\beta) Y_1(s\beta) = 0, \quad (5)$$

расположенные в порядке возрастания.

Рассмотрим напряженное состояние круглого полого цилиндра при следующих граничных условиях [11]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(R, z) = f_1(z) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k z, \\ \tau_{rz}(R, z) = f_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \lambda_k z, \\ \sigma_r(s, z) = f_3(z) &= \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \lambda_k z, \\ \tau_{rz}(s, z) = f_4(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \lambda_k z, \\ \tau_{rz}(r, 0) = f_5(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k W_1(\beta_k r), \\ \tau_{rz}(r, l) = f_6(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k W_1(\beta_k r), \\ u_z(r, 0) = f_7(r) &= e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k W_0(\beta_k r), \\ u_z(r, l) = f_8(r) &= g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k W_0(\beta_k r). \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (0 < z < l) \\ (s < r < R) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы допускаем, что функции $\{f_i\}$ можно представить в виде рядов Фурье и Фурье-Дини [12]. Кроме того, предполагаем, что функции f_7, f_8 и их первые производные непрерывны в указанных интервалах.

Вычислив по формулам (2) с помощью (3) напряжения и перемещения, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = & -2(1-2\nu) + 6\nu B + \frac{D}{r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{ [A_k + D_k(1+2\nu)] \operatorname{ch} \beta_k z + \\ & + [B_k + C_k(1+2\nu)] \operatorname{sh} \beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z \} W_0(\beta_k r) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{ (A_k + D_k) \operatorname{ch} \beta_k z + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z + \\ & + D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z \} \frac{W_1(\beta_k r)}{\beta_k r} - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [E_k + G_k(1-2\nu)] I_0(\lambda_k r) + \right. \\ & \left. + [F_k - H_k(1-2\nu)] K_0(\lambda_k r) - E_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + \right. \end{aligned}$$

$$+ F_k \frac{K_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} + H_k \lambda_k r K_1(\lambda_k r) \Big\} \cos \lambda_k z, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tau_z(r, z) = & 4(2-\nu)A + 6(1-\nu)B + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [D_k(1-2\nu) - A_k] \operatorname{ch} \beta_k z + \\ & + [C_k(1-2\nu) - B_k] \operatorname{sh} \beta_k z - C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z - D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z \Big] W_0(\beta_k r) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 [E_k + 2(2-\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) + [F_k - 2(2-\nu)H_k] K_0(\lambda_k r) + \\ & + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + H_k \lambda_k r K_1(\lambda_k r) \Big\} \cos \lambda_k z, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [A_k + 2D_k] \operatorname{sh} \beta_k z + [B_k + 2C_k] \operatorname{ch} \beta_k z + \\ & + C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z \Big] W_1(\beta_k r) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 [E_k + 2(1-\nu)G_k] I_1(\lambda_k r) - \\ & - [F_k - 2(1-\nu)H_k] K_1(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r) - H_k \lambda_k r K_0(\lambda_k r) \Big\} \sin \lambda_k z, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_r(r, z) = & -\frac{1}{2G} \Big\{ 2Ar + \frac{D}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 [E_k I_1(\lambda_k r) - F_k K_1(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r) - \\ & - H_k \lambda_k r K_0(\lambda_k r)] \cos \lambda_k z - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 [(A_k + D_k) \operatorname{ch} \beta_k z + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \beta_k z + \\ & + C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z] W_1(\beta_k r) \Big\}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_z(r, z) = & \frac{1}{2G} \Big\{ 2(1-2\nu)C + [8(1-\nu)A + 6(1-2\nu)B]z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 [E_k + 4(1-\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) + [F_k - 4(1-\nu)H_k] K_0(\lambda_k r) + \\ & + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + H_k \lambda_k r K_1(\lambda_k r) \Big\} \sin \lambda_k z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 [2(1-2\nu)D_k - A_k] \operatorname{sh} \beta_k z + [2(1-2\nu)C_k - B_k] \operatorname{ch} \beta_k z - \\ & - C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z - D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z \Big] W_0(\beta_k r) \Big\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Удовлетворив условиям (6) и (7), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (3), получим ряд соотношений. При получении этих соотношений пользуемся разложениями функций $\operatorname{sh} \beta_k z$, $\operatorname{ch} \beta_k z$, $z \operatorname{sh} \beta_k z$ и $z \operatorname{ch} \beta_k z$ по функциям $\left\{1; \cos \frac{\rho \pi z}{l}\right\}$.

Из этих соотношений постоянные интегрирования определяются следующим образом

$$A = \frac{\nu G}{l} (g_0 - e_0) - \frac{1 - 2\nu}{2} \left[\frac{a_0 R^2 - b_0 s^2}{2(R^2 - s^2)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^2 W_0(\beta_k R) - s^2 W_0(\beta_k s)}{\beta_k l (R^2 - s^2)} (q_k - h_k) \right], \quad (13)$$

$$B = \frac{(1 - 2\nu) G}{3l} (g_0 - e_0) + \frac{2(1 - \nu)}{3} \left[\frac{a_0 R^2 - b_0 s^2}{2(R^2 - s^2)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^2 W_0(\beta_k R) - s^2 W_0(\beta_k s)}{\beta_k l (R^2 - s^2)} (q_k - h_k) \right], \quad (14)$$

$$C = \frac{G e_0}{1 - 2\nu}, \quad (15)$$

$$D = \frac{R^2 s^2}{R^2 - s^2} \left[\frac{b_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_0(\beta_k R) - W_0(\beta_k s)}{\beta_k l} (q_k - h_k) \right], \quad (16)$$

$$A_k = \frac{1}{2(1 - \nu) \beta_k^3 \operatorname{sh} \beta_k l} \left\{ (2G \beta_k e_k + h_k) \left(2\nu \operatorname{ch} \beta_k l + \frac{\beta_k l}{\operatorname{sh} \beta_k l} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 - 2\nu) q_k - 2(1 - \nu) h_k \operatorname{ch} \beta_k l - (2G \beta_k g_k + q_k) \operatorname{cth} \beta_k l - 4G \nu \beta_k g_k \right\}, \quad (17)$$

$$B_k = \frac{(1 - 2\nu) h_k - 2G \nu \beta_k e_k}{(1 - \nu) \beta_k^3}, \quad (18)$$

$$C_k = \frac{2G \beta_k e_k + h_k}{2(1 - \nu) \beta_k^3}, \quad (19)$$

$$D_k = \frac{2G \beta_k g_k + q_k - (2G \beta_k e_k + h_k) \operatorname{ch} \beta_k l}{2(1 - \nu) \beta_k^3 \operatorname{sh} \beta_k l}. \quad (20)$$

Для определения постоянных E_k , G_k , F_k и H_k получаем следующую систему четырех линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} E_k a_k^{(1)}(R) + G_k b_k^{(1)}(R) + F_k c_k^{(1)}(R) + H_k d_k^{(1)}(R) &= N_k^{(1)}, \\ E_k a_k^{(1)}(s) + G_k b_k^{(1)}(s) + F_k c_k^{(1)}(s) + H_k d_k^{(1)}(s) &= N_k^{(2)}, \\ E_k a_k^{(2)}(R) + G_k b_k^{(2)}(R) + F_k c_k^{(2)}(R) + H_k d_k^{(2)}(R) &= N_k^{(3)}, \\ E_k a_k^{(2)}(s) + G_k b_k^{(2)}(s) + F_k c_k^{(2)}(s) + H_k d_k^{(2)}(s) &= N_k^{(4)}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где введены обозначения

$$a_k^{(1)}(x) = I_1(\lambda_k x),$$

$$b_k^{(1)}(x) = 2(1-\nu) I_1(\lambda_k x) + \lambda_k x I_0(\lambda_k x),$$

$$c_k^{(1)}(x) = -K_1(\lambda_k x),$$

$$d_k^{(1)}(x) = 2(1-\nu) K_1(\lambda_k x) - \lambda_k x K_0(\lambda_k x),$$

$$a_k^{(2)}(x) = I_0(\lambda_k x) - \frac{I_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x},$$

$$b_k^{(2)}(x) = (1-2\nu) I_0(\lambda_k x) + \lambda_k x I_1(\lambda_k x),$$

$$c_k^{(2)}(x) = K_0(\lambda_k x) + \frac{K_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x},$$

$$d_k^{(2)}(x) = -(1-2\nu) K_0(\lambda_k x) + \lambda_k x K_1(\lambda_k x).$$

$$N_k^{(1)} = \frac{c_k}{\lambda_k^3},$$

$$N_k^{(2)} = \frac{d_k}{\lambda_k^3},$$

$$N_k^{(3)} = -\frac{a_k}{\lambda_k^3} + \frac{2}{\lambda_k^3 l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p R)}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} [(-1)^k q_p - h_p] +$$

$$+ \frac{2}{(1-\nu) \lambda_k l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p R)}{(\beta_p^2 + \lambda_k^2)^2} [(-1)^k (2G\beta_p g_p + q_p) -$$

$$- (2G\beta_p e_p + h_p)].$$

$$N_k^{(4)} = -\frac{b_k}{\lambda_k^3} + \frac{2}{\lambda_k^3 l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p s)}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} [(-1)^k q_p - h_p] +$$

$$+ \frac{2}{(1-\nu) \lambda_k l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p s)}{(\beta_p^2 + \lambda_k^2)^2} [(-1)^k (2G\beta_p g_p + q_p) -$$

$$- (2G\beta_p e_p + h_p)].$$

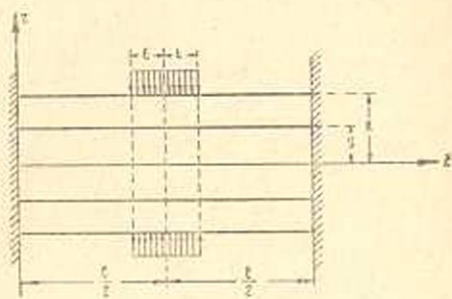
Решив систему (21), получим значения для постоянных E_k , G_k , F_k и H_k . Подставив найденные значения постоянных интегрирования из (13)–(21) в (8)–(12), получим формулы для определения напряжений и перемещений.

В качестве примера рассмотрим напряженное состояние полого цилиндра, находящегося между двумя жесткими диафрагмами, на средней части внешней цилиндрической поверхности которого приложена равномерно распределенная нормальная нагрузка (фиг. 2). Для простоты примем, что касательные напряжения между цилиндром и диафрагмами отсутствуют. Внутренняя цилиндрическая поверхность считается свободной от внешней нагрузки.

Для такой задачи условия (6)–(8) принимают вид

$$\sigma_r(R, z) = f_1(z) = \begin{cases} -p & \text{при } \left| z - \frac{l}{2} \right| < z, \\ 0 & \text{при } \left| z - \frac{l}{2} \right| > z, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(R, z) &= f_2(z) = 0, \\ \sigma_r(s, z) &= f_3(z) = 0, \\ \tau_{rz}(s, z) &= f_4(z) = 0, \\ \tau_{rz}(r, 0) &= f_5(r) = 0, \\ \tau_{rz}(r, l) &= f_6(r) = 0, \\ u_z(r, 0) &= f_7(r) = 0, \\ u_z(r, l) &= f_8(r) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$



Фиг. 2.

При таких условиях имеем

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= c_0 = g_0 = 0, \\ b_k &= c_k = d_k = e_k = g_k = h_k = q_k = 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\alpha_0 = -\frac{4pz}{l}, \quad \alpha_k = -\frac{4p}{\lambda_k l} \sin \lambda_k z \cdot \cos \frac{k\pi}{l}. \quad (26)$$

Пользуясь значениями (25) и (26), для неизвестных постоянных получим следующие значения

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1-2\nu)pzR^2}{(R^2-s^2)l}, \\ B &= -\frac{4(1-\nu)pzR^2}{3(R^2-s^2)l}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$C = 0,$$

$$D = \frac{2pzR^2s^2}{(R^2-s^2)l},$$

$$A_k = B_k = C_k = D_k = 0. \quad (28)$$

Из соотношений (21) и (23) видно, что коэффициенты E_k , G_k , F_k и H_k величины разного порядка: E_k и G_k убывают как $\frac{e^{-kz}}{k^3 \sqrt{k}}$, а F_k и H_k возрастают как $\frac{e^{kz}}{k^3 \sqrt{k}}$, где α принимает значения $\frac{\pi R}{l}$ и $\frac{\pi s}{l}$.

Для того, чтобы облегчить вычисления, вместо коэффициентов E_k , G_k , F_k и H_k вводим неизвестные X_k , Y_k , Z_k и U_k следующим образом

$$\begin{aligned}
 X_k &= \lambda_k^3 E_k I_1(\lambda_k R), \\
 Y_k &= \lambda_k^3 G_k I_1(\lambda_k R), \\
 Z_k &= \lambda_k^3 F_k K_1(\lambda_k S), \\
 U_k &= \lambda_k^3 H_k K_1(\lambda_k S).
 \end{aligned}
 \quad (29)$$

Для определения новых неизвестных из (21) получим систему четырех линейных уравнений, которая имеет такой же вид, как и система (21), но коэффициенты при неизвестных определяются уже следующим образом

$$\begin{aligned}
 a_k^{(1)}(x) &= \frac{I_1(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k R)}, \\
 b_k^{(1)}(x) &= 2(1-\nu) \frac{I_1(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k R)} + \lambda_k x \frac{I_0(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k R)}, \\
 c_k^{(1)}(x) &= -\frac{K_1(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)}, \\
 d_k^{(1)}(x) &= 2(1-\nu) \frac{K_1(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)} - \lambda_k x \frac{K_0(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)}, \\
 a_k^{(2)}(x) &= \frac{I_0(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k R)} - \frac{I_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x I_1(\lambda_k R)}, \\
 b_k^{(2)}(x) &= (1-2\nu) \frac{I_0(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k R)} + \lambda_k x \frac{I_1(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k R)}, \\
 c_k^{(2)}(x) &= \frac{K_0(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)} + \frac{K_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x K_1(\lambda_k S)}, \\
 d_k^{(2)}(x) &= -(1-2\nu) \frac{K_0(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)} + \lambda_k x \frac{K_1(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)}.
 \end{aligned}
 \quad (30)$$

Свободные члены новой системы определяются формулами (23), правые части которых умножены на λ_k^3 .

В силу (23), (25) и (26) для новых свободных членов получим значения

$$N_k^{(1)} = N_k^{(2)} = N_k^{(4)} = 0, \quad (31)$$

$$N_k^{(3)} = \frac{4p}{\lambda_k l} \sin \lambda_k z \cdot \cos \frac{k\pi}{2}. \quad (32)$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в выражения (8)–(12) для определения нормального напряжения σ_z и радиального перемещения u_r (в случае $\nu=0,3$) получим следующие формулы

$$\sigma_z(r, z) = -\frac{4\nu p z R^2}{(R^2 - z^2) l} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k z \left\{ (X_k + 3,4 Y_k) \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} + \right.$$

$$+ (Z_k - 3,4U_k) \frac{K_0(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k s)} + Y_{\lambda_k r} \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} + U_{\lambda_k r} \frac{K_1(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k s)} \Big\}. \quad (33)$$

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2G} \left\{ \frac{2pR^2}{(R^2 - s^2)l} \left(0,4r + \frac{s^2}{r} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k z}{\lambda_k} \left[X_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} - \right. \right. \\ \left. \left. - z_k \frac{K_1(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k s)} + Y_{\lambda_k r} \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} - U_{\lambda_k r} \frac{K_0(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k s)} \right] \right\}. \quad (34)$$

Некоторые значения напряжения σ_z и перемещения u_r , вычисленные по формулам (33) и (34) для различных точек полого цилиндра размерами $\frac{s}{R} = 0,606$, $\frac{l}{R} = 2\pi$, при $\nu = 0,3$ приведены в таблицах 1 и 2.

$$\frac{u_r(r, z)}{K}$$

Таблица 1

$\frac{s}{l}$	r	$\frac{z}{l}$				
		0	1/4	3/8	7/16	1/2
0,036	R	-0,0020	-0,0047	0,0096	0,0542	0,1314
	$\frac{R+s}{2}$	-0,0015	-0,0046	0,0104	0,0584	0,1261
	s	-0,0010	-0,0044	0,0113	0,0632	0,1224
0,072	R	-0,0042	-0,0085	0,0290	0,1282	0,1943
	$\frac{R+s}{2}$	-0,0032	-0,0084	0,0330	0,1307	0,1965
	s	-0,0023	-0,0083	0,0357	0,1316	0,1985
0,144	R	-0,0278	-0,0101	0,1313	0,2046	0,2482
	$\frac{R+s}{2}$	-0,0237	-0,0088	0,1391	0,2098	0,2527
	s	-0,0187	-0,0064	0,1493	0,2162	0,2550
1/3	R	-0,0347	0,1964	0,2077	0,2037	0,2035
	$\frac{R+s}{2}$	-0,0312	0,2013	0,2139	0,2090	0,2085
	s	-0,0272	0,2116	0,2245	0,2153	0,2141
1/2	R	0,1930	—	—	—	0,1930
	$\frac{R+s}{2}$	0,1988	—	—	—	0,1988
	s	0,2134	—	—	—	0,2134

Вычисления проделаны для случаев, когда отношение $\frac{z}{l}$ принимает значения 0,036, 0,072, 0,144, 1/3 и 1/2.

В таблице 1 перемещения u_r приведены в долях $K = -\frac{pl}{2G}$. Из этой таблицы видно, что когда внешняя нагрузка распределена на узкой части боковой поверхности $\left(\frac{\varepsilon}{l} \leq 0,144\right)$, то максимальное радиальное перемещение, в случае симметричного равномерного распределения нагрузки относительно плоскости $z = \frac{l}{2}$, получается в середине цилиндра. Когда $\frac{\varepsilon}{l} > \frac{1}{3}$, то максимальное радиальное перемещение получается между плоскостями $z = \frac{l}{2} - \varepsilon$ и $z = \frac{l}{2}$, причем изменение величины u_r в точках между двумя максимумами, неизвестно.

Первые два столбца этой таблицы показывают, что когда $\frac{\varepsilon}{l} < \frac{1}{3}$, то точки, находящиеся вблизи торцов, после деформации удаляются от центра, т. е. после деформации радиус в этих частях цилиндра увеличивается.

$$\frac{\varepsilon_z(r, z)}{-p}$$

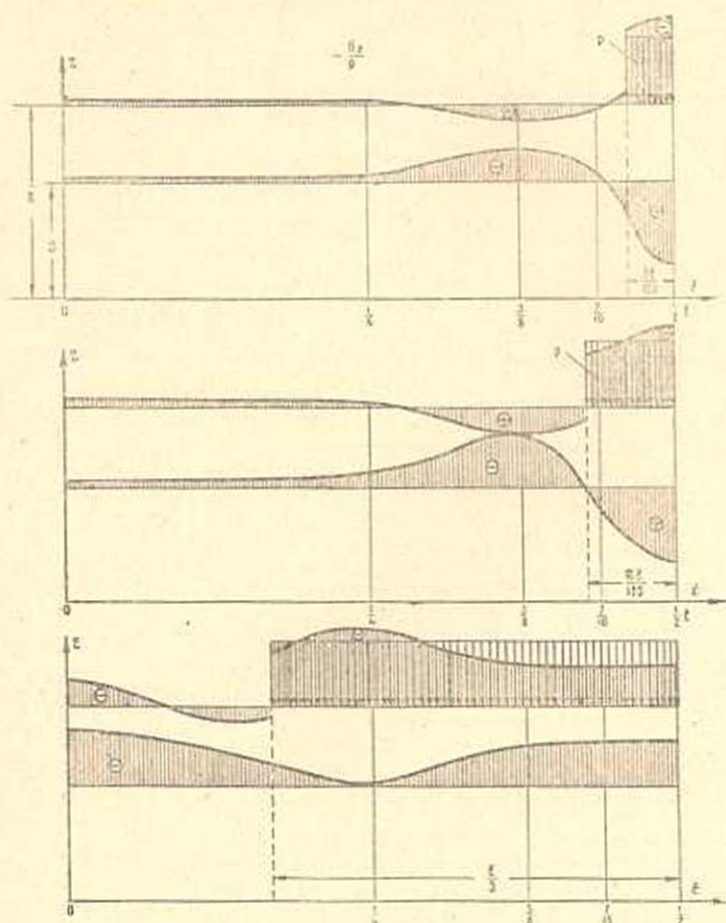
Таблица 2

$\frac{\varepsilon}{l}$	r	$\frac{z}{l}$				
		0	1/4	3/8	7/16	1/2
0,036	R	0,078	0,048	-0,269	-0,134	1,301
	s	0,058	0,088	0,462	0,124	-1,259
0,072	R	0,151	0,061	-0,436	0,878	1,211
	s	0,117	0,225	0,830	-0,292	-1,147
1/3	R	0,429	1,124	0,641	0,597	0,592
	s	0,850	0,030	0,624	0,689	0,692
1/2	R; s	0,948	—	—	—	0,948

Из таблицы 2 следует, что когда внешняя нагрузка распределена на узкой части цилиндрической поверхности $\left(\frac{\varepsilon}{l} \leq 0,14\right)$, максимальные напряжения получаются в точках $\left(s, \frac{l}{2}\right)$ и $\left(R, \frac{l}{2}\right)$. Когда $\frac{\varepsilon}{l} > 0,14$, то максимальные значения напряжений ε_z получаются

ются между плоскостями $z = \frac{l}{2} - \varepsilon$ и $z = \frac{l}{2}$, причем изменение напряжений σ_z в средних частях цилиндра незначительно.

При увеличении отношения $\frac{\varepsilon}{l}$ распределение нормального напряжения σ_z приближается к равномерному.

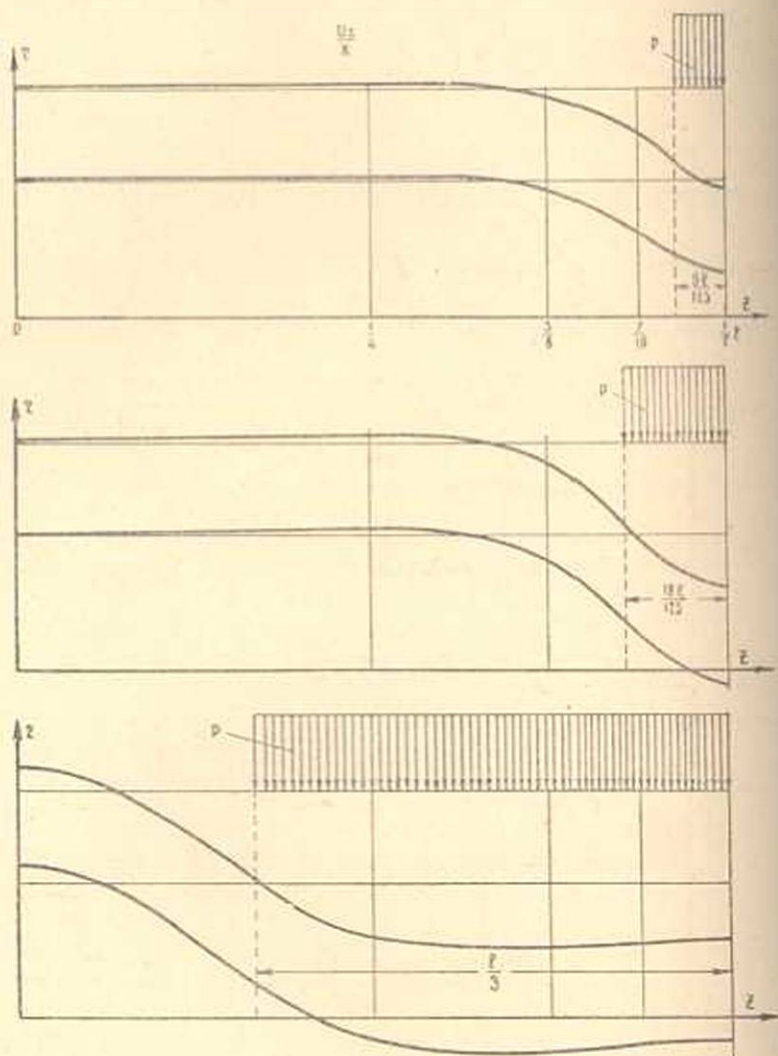


Фиг. 3.

Интересно отметить, что в точках, где внешняя нагрузка σ_r имеет разрыв ($z = \frac{l}{2} \pm \varepsilon$, $r = R$), напряжение σ_z тоже разрывается, причем абсолютные величины этих разрывов равны между собою, т. е.

$$\begin{aligned} & \left| \sigma_z \left(R, \frac{l}{2} \pm \varepsilon + 0 \right) - \sigma_z \left(R, \frac{l}{2} \pm \varepsilon - 0 \right) \right| = \\ & = \left| \sigma_r \left(R, \frac{l}{2} \pm \varepsilon + 0 \right) - \sigma_r \left(R, \frac{l}{2} \pm \varepsilon - 0 \right) \right|. \end{aligned}$$

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений σ_z и радиальных перемещений u , вдоль образующих цилиндра, на фигурах 3 и 4 для половины цилиндра приведены эпюры



Фиг. 4.

этих напряжений и кривые перемещений. Следует отметить, что приведенные эпюры составлены приближенно — на основании расчетов, произведенных только для пяти точек образующих.

Բ. Լ. Արսեմյան, Ս. Ս. Բարխուդյան

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԳԼԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ
ՍԽԵՏՆԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղվածում արվում է վերջավոր երկարությամբ կլոր սնամեջ գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ զեֆորմացիայի մի խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ գլանի հիմքերի վրա արված են շոշափող լարումները և տեղափոխումները առանցքի ուղղությամբ, իսկ կողմնային մակերևույթի վրա՝ արտաքին լարումները: Այս խնդիրը կարող է օգտագործվել արտաքին ընթի աղդեցության առկա դեպքում հաստ պատերով խողովակի լարվածային վիճակը որոշելու համար, երբ արտաքին ընթը կիրառված է խողովակի կողմնային մակերևույթի վրա:

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է շարքերով՝ ըստ Բեսսելի և հոանկյու-նայափական ֆունկցիաների: Բերված է թվային օրինակ: Այդ օրինակում հաշված են տեղափոխումները և լարումները գլանի առանցքային կտրվածքի մի բանի կետերում: Ստացված արդյունքների համար կազմված են աղյուսակներ և դրաֆիկներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шапиро Г. С., О сжатии бесконечного полого кругового цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности. ПММ, 7, вып. 5, 1943, 379—382.
2. Бинни (Binnie M. A.), Axially symmetrical stress in a thick tube. Philosophical Magazine, London, 212, 1941, 336—347.
3. Прокопов В. К. Равновесие упругого осесимметрично-нагруженного толстостенного цилиндра. ПММ, 13, № 2, 1949, 136—144.
4. Прокопов В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Труды ЛПИ им. Калинина, № 2, 1950, 286—303.
5. Прокопов В. К. О равновесии полого цилиндра конечной длины, нагруженного осесимметричной нагрузкой. Труды ЛПИ им. Калинина, № 192, 1958, 43—59.
6. Старостин С. М. Решение задачи о равновесии полого цилиндра под действием нормальной к его поверхности симметричной нагрузки. Труды ЛПИ им. Калинина, № 178, 1955, 118—132.
7. Пахомарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. Том II, глава V, Машгиз, М., 1958, 332—365.
8. Бокришинов С. В. Расчет толстостенных полых цилиндров, находящихся под действием произвольной осесимметричной нагрузки. Сб. «Расчеты на прочность, жесткость и пластичность элементов машиностроительных конструкций», Машгиз, М., 1953, 106—124.
9. Аллен, Фокс и Саувелл (D. De Allen, L. Eox and R. V. Southwell), Stress distribution in elastic solids of revolution. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, vol. 239, 1946, 501—537.
10. Вилос Г. М. Об одной задаче о деформации упругого кругового цилиндра. Труды Сибирск. металлург. института, 1957, № 4/А, Приклад. мат. и мех., 29—32.
11. Абрамян Б. Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. ДАН АрмССР, 24, № 2, 1958, 66—72.
12. Watson Г. Н. Теория бесселевых функций. Госизониздат, часть I, М., 1949, 655.