ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 2, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

П. К. Суетин

О порядке приближения аналитических функций частичными суммами рядов по ортогональным многочленам*

Пусть на жордановой спрямляемой кривой Г, ограничивающей область G, задана неотрицательная суммируемая функция $n(z)$. Обозначим через $\{P_n(z)\}$ систему многочленов, имеющих положительный старший коэффициент и ортонормированных с весом $n(z)$ по контуру Г, т. е. удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} P_n(z)\,\overline{P_m(z)}\,n(z)\,|dz| = \begin{cases} 1, & n = m, \\ O, & n \neq m. \end{cases}$$

Если функция $f(z)$ является аналитической в области G и ее граничные значения на контуре Г удовлетворяют условию

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} n(z)\,|f(z)|^2\,|dz| < \infty, \tag{1}$$

то при некоторых дополнительных предположениях относительно веса и контура имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n P_n(z), \quad z \in G, \tag{2}$$

где ряд сходится равномерно внутри области G, а коэффициенты определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} n(z)\,f(z)\,\overline{P_n(z)}\,|dz|. \tag{3}$$

Ряды по ортогональным многочленам (2) являются естественным обобщением рядов Тейлора в комплексной области. Свойства ортогональных многочленов, а также сходимость рядов (2) внутри области и в среднем по контуру Г изучались при различных минимальных условиях на контур и на вес В. И. Смирновым, П. П. Коровкиным

* Работа доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

и Я. Л. Геронимусом [1]. В настоящей работе на ряды вида (2) переносятся некоторые теоремы о скорости сходимости рядов Тейлора для аналитических функций.

Теорема 1. *Если положительная функция $n(z)$ непрерывно дифференцируема на контуре Γ p раз и ее p-я производная удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$, а контур Γ есть такая гладкая кривая, что функция, отображающая конформно область G на единичный круг, непрерывно дифференцируема в замкнутой области $(p+2)$ раза, то для всякой аналитической в области G функции $f(z)$, удовлетворяющей условию* (1), *имеет место неравенство*

$$\left| f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z) \right| < \frac{C_1(F) \| f \|}{N^{p+\alpha}}, \quad z \in F \subset G,$$

где F есть замкнутое подмножество области G, а постоянная $C_1(F)$ не зависит от функции $f(z)$ и равна дроби, знаменатель которой есть расстояние от множества F до контура Γ в степени $(p+1)$.

Доказательство. Обозначим через $w = \varphi(z)$ функцию, отображающую конформно область G на единичный круг при условиях $\varphi(z_0) = O$ и $\varphi'(z_0) > O$. Тогда, с помощью теоремы Сеге [2] нетрудно доказать существование такой аналитической в области G функции $\gamma(z)$, для которой выполняются следующие условия:

а) граничные значения этой функции на контуре Γ удовлетворяют условию $|\gamma(z)|^2 = n(z)$;

б) эта функция непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{G}$ p раз и ее p-я производная удовлетворяет условию Липшица;

в) функция $\gamma(z)$ отлична от нуля и $\gamma(z_0) > 0$.

Далее, при условиях теоремы 1 для функции $f(z)$ имеем легко получаемое из формулы Коши представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\zeta) K(z, \overline{\zeta}) n(\zeta) |d\zeta|, \tag{4}$$

где $K(z, \overline{\zeta})$ есть, так называемая, керн-функция Сеге для области G и веса $n(z)$, для которой имеет место разложение

$$K(z, \overline{\zeta}) = \frac{\sqrt{\varphi'(z)} \sqrt{\overline{\varphi'(\zeta)}}}{1 - \varphi(z) \overline{\varphi(\zeta)}} \cdot \frac{1}{\gamma(z) \overline{\gamma(\zeta)}} = \sum_{0}^{\infty} P_n(z) \overline{P_n(\zeta)}, \tag{5}$$

в котором ряд сходится равномерно по z и ζ внутри области G. Используя (3) и (4) получим для $z \in F \subset G$

$$f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[K(z, \overline{\zeta}) - \sum_{0}^{N} P_n(z) \overline{P_n(\zeta)} \right] n(\zeta) |d\zeta|.$$

Отсюда находим

$$\left| f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z) \right|^2 \leqslant \| f \|^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| K(z, \overline{\zeta}) - \sum_{0}^{N} P_n(z) \overline{P_n(\zeta)} \right|^2 n(\zeta) |d\zeta| \tag{6}$$

и вопрос сводится к скорости сходимости ряда (5) в среднем по контуру. Интеграл стоящий в правой части неравенства (6) имеет минимум по сравнению со всеми другими интегралами, под знаком которых вместо частичной суммы ряда (5) стоит любой многочлен степени N. Но с другой стороны, функция $K(\zeta, z)$ при фиксированном $z \in F \subset G$ непрерывно дифференцируема по ζ в замкнутой области $\overline{G}$ p раз и ее p-я производная удовлетворяет условию Липшица порядка α. Следовательно, ее наилучшее равномерное приближение имеет порядок $N^{-p-\alpha}$, причем с помощью формулы (5) легко показать, что постоянная в оценке наилучшего приближения этой функции может быть выбрана общей для всех $z \in F$ и имеет строение, утверждаемое в теореме 1. Значит, интеграл (6) имеет порядок $N^{-2p-2\alpha}$ и теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если функция $n(z)$ является аналитической на контуре Γ, а контур Γ есть правильная аналитическая кривая, то для всякого замкнутого множества $F \subset G$ существуют такие постоянные $C_2(F)$ и $0 < q < 1$, что при всех $z \in F$ имеет место неравенство*

$$\left| f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z) \right| \leqslant C_2(F) \cdot \| f \| \cdot q^N.$$

Заметим, что при условиях теоремы 2 функция $\gamma(z)$ является аналитической в замкнутой области.

Рассмотрим теперь вопрос о скорости сходимости рядов (2) в замкнутой области $\overline{G}$. Для этого нам потребуются асимптотические формулы для ортогональных многочленов. Обозначим через $w = \Phi(z)$ функцию, отображающую внешность D контура Γ на внешность единичного круга при условиях $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi'(\infty) > 0$, и пусть $z = \Psi(w)$ есть обратная функция. Далее, аналогично функции $\gamma(z)$, в области D определяется аналитическая функция $g(z)$, непрерывная и отличная от нуля в замкнутой области, удовлетворяющая на границе Γ условию $n(z)|g(z)|^2 = |\Phi'(z)|$ и непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $\overline{D}$ p раз, причем $g^{(p)}(z) \in Lip\alpha$. Тогда, если весовая функция $n(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а контур Γ есть такая гладкая кривая, что функция $\Psi(w)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $|w| \geqslant 1$ $(p+3)$ раза и ее производная порядка $(p+4)$ представима интегралом Коши по своим угловым граничным значениям, то для ортогональных многочленов имеет место асимптотическая формула [5]

$$P_n(z) = g(z)\,\Phi^n(z)\left[1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{n^{p+\alpha}}\right)\right], \quad z \in \overline{D}. \tag{7}$$

Лемма. *Если имеет место асимптотическое представление*

(7) *при* $p=1$ *и* $\alpha > \frac{1}{2}$, *то существует такая постоянная* C_3, *что для всякой функции* $f(z)$, *аналитической в области* G *и непрерывной в замкнутой области, имеет место для* $z \in \overline{G}$ *неравенство*

$$\left|\sum_{0}^{N} a_n P_n(z)\right| \leqslant C_3 \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \ln N.$$

В самом деле, из формулы (7) имеем для $z \in \Gamma$

$$P_n(z) = g(z)\,\Phi^n(z) + \lambda_n(z),$$

где $\lambda_n(z) = O\left(\frac{\sqrt{n}}{n^{p+\alpha}}\right)$. С помощью этого равенства из формулы

$$\sum_{0}^{N} a_n P_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} f(\zeta)\left[\sum_{0}^{N} P_n(z)\overline{P_n(\zeta)}\right] n(\zeta)\,|d\zeta|$$

легко получим утверждение леммы.

Из этой леммы известными приемами, так же, как это делается для степенных рядов, получается следующая теорема.

Теорема 3. *При условиях леммы существует такая постоянная* C_4, *что для всех* $z \in \overline{G}$ *и для всякой функции* $f(z)$ *аналитической в области* G *и непрерывной в замкнутой области, имеет место неравенство*

$$\left|f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(\zeta)\right| \leqslant C_4 E_N(f, \overline{G}) \ln N,$$

где $E_n(f, \overline{G})$ *есть наилучшее равномерное приближение функции* $f(z)$.

Из теоремы 3 вытекают следствия:

а) *если аналитическая функция* $f(z)$ *непрерывно дифференцируема в замкнутой области* $\overline{G}$ k *раз, причем ее* k-*я производная удовлетворяет условию Липшица порядка* β, *то при условиях леммы для* $z \in \overline{G}$ *имеет место неравенство*

$$\left|f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z)\right| \leqslant \frac{C_5 \ln N}{N^{k+\beta}}; \qquad (\ldots$$

б) *при условиях леммы для* $z \in \overline{G}$ *имеет место неравенство*

$$\left|f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z)\right| \leqslant C_6\,\omega\left(\frac{1}{N}\right) \ln N,$$

где $\omega(\delta)$ *есть модуль непрерывности функции* $f(z)$ *в* $\overline{G}$;

в) *если контур* Γ *и вес* $n(z)$ *удовлетворяют условиям леммы, то всякая аналитическая в области* G *и непрерывная в замкнутой области функция* $f(z)$, *модуль непрерывности которой удовлетворяет условию Дини-Липшица, разлагается в ряд по орт-*

гональным многочленам (2), *сходящийся равномерно в замкнутой области* $\overline{G}$.

Оценки из теорем 1 и 2 имеют место и для многочленов, ортонормированных по площади области G с весом $m(z)=|\gamma(z)|^2$, где функция $\gamma(z)$ является аналитической в области G, непрерывной и отличной от нуля в замкнутой области, откуда следует ограниченность веса $m(z)$ сверху и снизу положительными числами.

Лемма и теорема 3 аналогичны соответствующим результатам о рядах по многочленам Фабера, изложенным в работе С. Я. Альпера [3], где рассматривается случай $g(z)\equiv 1$ и более общие условия на контур Г. Вышеперечисленные оценки справедливы и для рядов по обобщенным многочленам Фабера, определенным для веса $g(z)\not\equiv 1$.

Из результатов работы Розенблюма и Варшавского [4], где рассматриваются многочлены Фабера, многочлены, ортогональные по контуру, и многочлены, ортогональные по площади, можно получить неравенство (8), но при условии, что $n(z)\equiv 1$ и контур Г имеет гладкость порядка $(k+2)$.

Уральский педагогический институт
им. А. С. Пушкина

Поступила 16 I 1961

Պ. Կ. Սուետին

ԸՍՏ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍՆԻԿԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐՈՎ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիտարկվում է ըստ Γ եզրագծի $n(z)$ կշռով օրթոնորմավորված $\{P_n(z)\}$ բազմանդամների շարքերի զուգամիտության արագության հարցը՝ կախված եզրագծի ողորկությունից և կշռային ֆունկցիայից։

Թեորեմ 1. Երբ $n(z)$ դրական ֆունկցիան Γ եզրագծի վրա p անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է և $n^{(p)}\in Lip\,\alpha$, իսկ Γ եզրագիծն այնպիսի ողորկ կոր է, որ եզրագծի ներքին մասը միավոր շրջանի վրա կոնֆորմ կերպով արտապատկերող ֆունկցիան $\overline{G}$-ում անընդհատ դիֆերենցելի է $(p+2)$ անգամ, ապա Γ եզրագծով սահմանափակված G տիրույթի ներսում հավասարաչափ կերպով տեղի ունի

$$\left|f(z)-\sum_{0}^{N} a_n P_n(z)\right| \leqslant \frac{C_1(F)\|f\|}{N^{p+\alpha}}, \quad z\in F\subset G.$$

անհավասարությունը, որտեղ $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է G-ում և ունի անկյունային եզրային արժեքներ, որոնց միջոցով նա ներկայացվելի է Կոշու ինտեգրալով, ընդ որում այդ եզրային արժեքները քառակուսով հանրագումարելի են Γ եզրագծի վրա:

Թեորեմ 2. Երբ Γ եզրագիծը կանոնավոր անալիտիկ կոր է, իսկ $n(z)$ դրական ֆունկցիան անալիտիկ է Γ-ի վրա, ապա տեղի ունի

$$\left| f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z) \right| < C_2(F) \| f \| q^N$$

անհավասարությունը:

Թեորեմ 3. Երբ Γ եզրագիծը այնպիսի ողորկ կոր է, որ նրա արտաքին մասը միավոր շրջանի լրացման վրա կոնֆորմ կերպով արտապատկերող ֆունկցիայի հինգերորդ կարգի ածանցյալը ներկայացվելի է Կոշի ինտեգրալով ըստ իր անկյունային եզրային արժեքների, իսկ $n'(z) \in Lip\,\alpha$, որտեղ $\alpha > 0{,}5$, ապա տեղի ունի

$$\left| f(z) - \sum_{0}^{N} a_n P_n(z) \right| < C_4 E_N(f, \bar{G}) \ln N$$

անհավասարությունը, որտեղ $\bar{E}_N(f, \bar{G})$-ը G-ում անալիտիկ և փակ տիրույթում անընդհատ $f(z)$ ֆունկցիայի լավագույն հավասարաչափ մոտարկումն է n-ից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геронимус Я. Л.* Теория ортогональных многочленов. Гостехиздат, 1950.
2. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
3. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области. Известия АН СССР, серия математическая, 119, 1955, 423—444.
4. *Rosenbloom P. C., Warschawski S. E.* Approximation by Polynomials. Lectures on Functions of a complex variable. The university of Michigan Prees. Ann. Arbor, 1955.
5. *Суетин П. К.* О многочленах, ортогональных по гладкому контуру с дифференцируемым весом. ДАН СССР, 114, № 3, 1957, 498—501.