ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 2, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. Б. Нерсесян

Об одном классе тригонометрических биортогональных систем

Приводимые в этой работе биортогональные системы связаны с определенными задачами на собственные значения, являющимися обобщением задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке для оператора $Ly=-y''$.

В различных частных случаях эти системы совпадают со многими тригонометрическими системами, рассматриваемыми, например, в теории негармонических рядов Фурье.

1°. Пусть $a(x)$ и $b(x)$—функции ограниченной вариации на $[0, l]$, непрерывные на концах этого отрезка $(0<l<+\infty)$.

Рассмотрим следующие целые по λ функции

$$y(x, \lambda)=\alpha\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int_0^x\cos\sqrt{\lambda}\,(x-t)\,da(t)\quad(0\leqslant x\leqslant l), \tag{1}$$

$$z(x, \lambda)=\beta\cos\sqrt{\lambda}\,(l-t)+\int_x^l\cos\sqrt{\lambda}\,(t-x)\,db(t)\quad(0\leqslant x\leqslant l), \tag{2}$$

$$\omega(\lambda)=\alpha\beta\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,l-\beta\sqrt{\lambda}\int_0^l\sin\sqrt{\lambda}\,(l-t)\,da(t)-$$

$$-\alpha\sqrt{\lambda}\int_0^l\sin\sqrt{\lambda}\,t\,db(t)+\sqrt{\lambda}\int_0^l\int_0^t\sin\sqrt{\lambda}(t-t_1)\,da(t_1)\,db(t). \tag{3}$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что при любых λ и μ

$$\int_0^l y(x, \lambda)\,z(x, \mu)\,dx=\frac{\omega(\lambda)-\omega(\mu)}{\lambda-\mu}. \tag{4}$$

Соотношение (4) позволяет при данном $A_0\neq\infty$ по схеме работы [1] из функций $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$ построить биортогональную на $(0, l)$ систему

$$\{y_k(x), z_k(x)\}_1^{+\infty} \tag{5}$$

такую, что если замкнутый контур Γ не содержит нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{y(x,\lambda)\, z(t,\lambda)}{\omega(\lambda) - A_0}\, d\lambda = \sum_{\Gamma} y_k(x)\, z_k(t) \quad (0 \leqslant x, t \leqslant l), \tag{5}$$

где суммирование производится по индексам k, соответствующим нулям функции $\omega(\lambda) - A_0$, лежащим в области, ограниченной контуром Γ.

Формулу (3) можно переписать в виде

$$\omega(\lambda) = \alpha\beta\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\, l + \sqrt{\lambda}\int_0^l \sin\sqrt{\lambda}\, t\, dc(t), \tag{6}$$

где

$$c(x) = \beta a(l-x) - \alpha b(x) + \int_x^l a(t-x)\, db(t). \tag{7}$$

Пусть

$$c(x) = c_1(x) + c_2(x), \tag{8}$$

где $c_1(x)$—абсолютно непрерывная функция, а $c_2(x)$—сумма кусочно-постоянной и сингулярной функций. Обозначим

$$c = \mathop{\mathrm{V}}_0^l \{c_2(x)\}. \tag{9}$$

Через γ_h обозначим параболу

$$\gamma_h : \sqrt{\lambda} = x + ih \quad (h > 0, -\infty < x < +\infty), \tag{10}$$

а через $l_h^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ параболические дуги

$$l_h^{(n)} : \sqrt{\lambda}\, l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + iy \quad (n \geqslant 0, |y| \leqslant lh). \tag{11}$$

Пусть, наконец, $\Delta_h^{(n)}$—криволинейный четырехугольник, ограниченный дугами $l_h^{(n)}$ и $l_h^{(n+1)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ и соответствующими кусками кривой γ_h, $\delta_h^{(n)}$—его контур, а D_h—область λ—плоскости, ограниченная параболой γ_h и содержащая точку $\lambda = 0$. Для определенности положим $\alpha\beta = 1$.

Лемма 1. *При достаточно большом $h > 0$ все нули целой функции $\omega(\lambda) - A_0$ лежат в области D_h. Кроме того:*

а) *при*

$$c < 1 \tag{12}$$

существует такой номер $n_0 > 0$, что в каждом из прямоугольников $\Delta_h^{(n)}$ $(n \geqslant n_0)$ содержится только по одному простому нулю функции $\omega(\lambda) - A_0$ и

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq \varepsilon > 0, \quad \lambda \in \delta_h^{(n)} \quad (n \geq n_0), \tag{13}$$

где ε не зависит от n;

б) если

$$\frac{2}{\pi} |A_0| + \overset{l}{\underset{0}{\mathrm{V}}} \{c(x)\} < 1 \tag{14}$$

то все утверждения пункта а) справедливы и при $n_0 = 0$.

Доказательство. Имеем

$$|\sin \sqrt{\lambda} l| = \operatorname{ch} y, \quad \sqrt{\lambda} l = x + iy, \quad \lambda \in l_h^{(n)} \quad (n \geq 0). \tag{15}$$

С другой стороны, при $0 \leq t \leq l$ и $\lambda \in l_h^{(n)}$ $(n \geq 0)$

$$|\sin \sqrt{\lambda} t| \leq \operatorname{ch} |\operatorname{Jm} \sqrt{\lambda} t| \leq \operatorname{ch} y \quad (\sqrt{\lambda} l = x + iy) \tag{16}$$

следовательно, при $\lambda \in l_h^{(n)}$ $(n \geq 0)$

$$\left| \int_0^l \sin \sqrt{\lambda} t \, dc_2(t) \right| \leq \overset{l}{\underset{0}{\mathrm{V}}} \{c_2(x)\} \operatorname{ch} y = c \operatorname{ch} y. \tag{17}$$

Из (8) и (17) следует, что при $\lambda \in l_h^{(n)}$ $(n \to +\infty)$

$$\left| \int_0^l \sin \sqrt{\lambda} t \, dc(t) \right| \leq c \operatorname{ch} y + \left| \int_0^l \sin \sqrt{\lambda} t \, dc_1(t) \right| =$$

$$= c \operatorname{ch} y + o(1) \quad (\sqrt{\lambda} l = x + iy), \tag{18}$$

откуда, согласно (6),

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq n\pi (1 - c) \operatorname{ch} y + o(n) \geq n\pi\theta_0 \operatorname{ch} y \geq \pi\theta_0 n, \; n \geq n_0, \; \lambda \in l_h^{(n)}, \tag{19}$$

где $0 < \theta_0 < 1 - c$.

Далее, из непрерывности функции $c(x)$ в точке $x = l$ следует существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$\overset{l}{\underset{l-\varepsilon}{\mathrm{V}}} \{c(x)\} < \theta_1 < 1 \tag{20}$$

откуда следует, что $(\sqrt{\lambda} l = x + iy)$

$$\left| \int_0^l \sin \sqrt{\lambda} t \, dc(t) \right| \leq \theta_1 \operatorname{ch} y + \overset{l}{\underset{0}{\mathrm{V}}} \{c(x)\} \operatorname{ch} \left(\frac{l - \varepsilon}{l} y \right). \tag{21}$$

Следовательно, при $|y| \geq h$ (где $h > 0$ достаточно велико)

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq (1 - \theta_1) |\sqrt{\lambda}| e^y > h(1 - \theta_1) \tag{22}$$

где $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$.

Таким образом, нули функции $\omega(\lambda) - A_0$ могут лежать лишь в области D_h и, согласно оценкам (19) и (22),

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq \varepsilon > 0, \quad \lambda \in \delta_h^{(n)} \quad (n \geq n_0). \tag{23}$$

Но четырехугольники $\Delta_k^{(n)}$ подобраны так, что на их контурах $\delta_k^{(n)}$

$$|\sin\sqrt{\lambda}\, l| \geqslant 1, \ \lambda \in \delta_k^{(n)} \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{24}$$

Наконец, из формулы (7) и оценок (23) и (24) применением теоремы Руше получим утверждение а) леммы. Заметив, что в случае, когда $c_1(x)\equiv 0$, в формуле (19) можно положить $n_0=0$, получим утверждение б).

2°. При доказательстве теоремы о разложениях по системе (5) нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 2. *Пусть $c(x)$—комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0, l]$ $(0<l<+\infty)$ и $c(0)=c(0+)$. Тогда существует такая вещественная постоянная σ_0, что при* $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\sigma_0$ *справедливо представление*

$$\left[1+\int_0^l e^{-\lambda t}dc(t)\right]^{-1} = 1+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}d\rho(t), \tag{25}$$

где $\rho(x)$ имеет ограниченную вариацию на каждом отрезке $[0, R]$ $(R>0)$, $\rho(0)=\rho(0+)$ и

$$|\rho(x)|\leqslant Me^{\sigma_0 x} \quad (0\leqslant x<+\infty). \tag{25'}$$

Доказательство. Обозначим

$$\theta(\lambda)=\int_0^l e^{-\lambda t}dc(t). \tag{26}$$

Вследствие непрерывности функции $c(x)$ в точке $x=0$ существует такая постоянная σ_0, что

$$|\theta(\lambda)|\leqslant\vartheta<1 \quad (\mathrm{Re}\lambda\geqslant\sigma_0) \tag{27}$$

и

$$\theta(\lambda)=\int_0^l e^{-(\lambda-\sigma_0)t}d\rho_1(t) \quad (\mathrm{Re}\lambda\geqslant\sigma_0), \tag{28}$$

где

$$\rho_1(0)=\rho_1(0+), \ \mathop{V}_0^l\{\rho_1(x)\}\leqslant\vartheta<1, \ |\rho_1(x)|\leqslant\vartheta<1 \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{29}$$

Следовательно,

$$[1+\theta(\lambda)]^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k[\theta(\lambda)]^k \quad (\mathrm{Re}\lambda\geqslant\sigma_0), \tag{30}$$

где ряд справа сходится равномерно при $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\sigma_0$.

Покажем, что при $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\sigma_0$

$$[\theta(\lambda)]^k = \int_0^{kl} e^{-(\lambda - z_0)t}\, d\rho_k(t) \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{31}$$

где

$$\mathop{\mathrm{V}}_0^{kl} \{\rho_k(x)\} < +\infty \quad (k \geqslant 1) \text{ и}$$

$$|\rho_k(x)| \leqslant \theta^k \quad (0 \leqslant x < kl). \tag{31'}$$

Действительно, пусть это справедливо для некоторого $k = n \geqslant 1$. Тогда, приняв функции $\rho_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ равными постоянным при $x \overline{\in} [0, kl]$, получим

$$[\theta(\lambda)]^{n+1} = \int_0^{nl}\int_0^{l} e^{-(\lambda - z_0)(t+u)}\, d\rho_1(t)\, d\rho_n(u) =$$

$$= \int_0^{nl}\int_u^{l+u} e^{-(\lambda - z_0)\nu}\, d_\nu \rho_1(\nu - u)\, d\rho_n(u) =$$

$$= \int_0^{(n+1)l}\int_l^{(n+1)l} e^{-(\lambda - z_0)\nu}\, d_\nu \rho_1(\nu - u)\, d\rho_n(u) =$$

$$= \int_0^{(n+1)l} e^{-(\lambda - z_0)\nu}\, d_\nu \left\{ \int_0^{\nu} \rho_1(\nu - u)\, d\rho_n(u) \right\}, \tag{32}$$

откуда, в силу оценок (29) и (31′), следует формула (31) при $k = n + 1$. Поскольку при $k = 1$ эта формула очевидна, она сохраняет силу при любом k. Нетрудно видеть, что из формул (30) и (31), в силу оценок (31′), следуют все утверждения леммы 2.

Лемма 3. *Ядро* $y(x, \lambda)$ *замкнуто в* $L_1(0, l)$, *т. е. если* $f(x) \in L_1(0, l)$ *и*

$$\int_0^l f(t)\, y(t, \lambda)\, dt = 0 \tag{33}$$

то

$$f(x) \overset{\text{п. в.}}{=} 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Доказательство. Из (1) и (33) имеем

$$\int_0^l \left\{ \alpha \cos\sqrt{\lambda}\, t + \int_0^t \cos\sqrt{\lambda}\,(t - t_1)\, da(t_1) \right\} f(t)\, dt = 0. \tag{33'}$$

Положив $i\sqrt{\lambda} = w$, $\operatorname{Re} w > 0$, из (33′) получим

$$\alpha\int_0^l e^{wt} f(t)\,dt + \int_0^l e^{wt}\int_0^t e^{-wt_1}\,da(t_1) f(t)dt = O(1). \qquad (34)$$

Но при $\mathrm{Re}\,w > 0$

$$\int_0^l e^{wt}\int_0^t e^{-wt_1}\,da(t_1) f(t)\,dt = \int_0^l e^{wt} f(t)\,dt\int_0^l e^{-wt_1}\,da(t_1) + O(1), \qquad (34)$$

следовательно,

$$\left\{\alpha + \int_0^l e^{-wt_1}\,da(t_1)\right\}\int_0^l e^{wt} f(t)\,dt = O(1) \quad (\mathrm{Re}\,w > 0,\ \alpha \neq 0), \qquad (35)$$

откуда, вследствие непрерывности функции $a(x)$ в точке $x=0$ получим, что

$$\int_0^l e^{wt} f(t)\,dt = O(1) \quad (\mathrm{Re}\,w > R_0 > 0). \qquad (36)$$

Однако очевидно, что оценка (36) возможна лишь при $f(x) \overset{\text{п. в.}}{=} 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, откуда и следует утверждение леммы 3.

Очевидно также, что и ядро $z(x, \lambda)$ замкнуто.

Лемма 4. *Системы* $\{y_k(x)\}_1^{+\infty}$ *и* $\{z_k(x)\}_1^{+\infty}$ *замкнуты в* $L_1(0, l)$, *т. е. если* $f(x) \in L_1(0, l)$ *и*

$$\int_0^l f(t)\,y_k(t)\,dt = O \quad \left(\int_0^l f(t)\,z_k(t)\,dt = O\right) \ (k = 1, 2, \cdots) \qquad (37)$$

то

$$f(x) \overset{\text{п. в.}}{=} O \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Доказательство. Достаточно доказать замкнутость системы $\{y_k(x)\}_1^{+\infty}$.

Пусть выполняются равенства (37). Тогда функция

$$\Phi(\lambda) = [\omega(\lambda) - A_0]^{-1}\int_0^l f(t)\,y(t, \lambda)\,dt \qquad (38)$$

целая (см. построение системы $\{y_k(x)\}_1^{+\infty}$ [1]). Обозначим через Γ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ некоторую последовательность уходящих в бесконечность контуров на λ-плоскости, совпадающих в области D_k с параболическими дугами $\delta_k^{(n)}$. Тогда из леммы 1 и оценки (22) получим, что при $\lambda \in \Gamma_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$$|\omega(\lambda) - A_0| > M_1 |\sqrt{\lambda}| e^{|y| l} \qquad (\sqrt{\lambda} = x + iy). \tag{39}$$

С другой стороны, из формулы (1) имеем

$$\left| \int_0^l f(t) y(t, \lambda) \, dt \right| \leqslant M_2 e^{|y| l} \qquad (\sqrt{\lambda} = x + iy). \tag{40}$$

Из формулы (38) и оценок (39), (40) в силу теоремы Лиувилля получим, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$. Остается применить лемму 3.

3°. Приведем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Для любой дифференцируемой на* $[0, l]$ *функции* $f(x)$ *справедливы разложения*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) \, dt, \tag{41}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(x) \int_0^l f(t) y_k(t) \, dt, \tag{42}$$

причем ряды справа сходятся равномерно на $x \in [0, l]$.

Доказательство. Достаточно доказать формулу (41). Из формулы (5′) и лемм 1 и 4 следует, что доказательство этой формулы сводится к доказательству равномерной сходимости на $[0, l]$ при $n \to +\infty$ выражения

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \int_0^l z(t, \lambda) f(t) \, dt \, d\lambda =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+n_0} y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) \, dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{43}$$

где n_0 — некоторое натуральное число, а Γ_n — пробегаемый в положительном направлении контур, состоящий из параболической дуги $l_h^{(n)}$ [см. формулу (11)] и той части параболы γ_h [формула (10)], для которой $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\, l| \leqslant \left(h + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($h > 0$ постоянная, фигурирующая в лемме 1).

Согласно формулам (2) и (6) имеем

$$\int_0^l z(x, \lambda) f(x) \, dx = -\frac{1}{\lambda} \int_0^l f(x) \, d\,[z(x, \lambda) - b(x)]' =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \{[z(x, \lambda) - b(x)]'_{x=0} f(0) - [z(x, \lambda) - b(x)]'_{x=l} f(l)\} +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^l [z(x,\lambda)-b(x)]' f'(x)\,dx, \qquad (44)$$

$$\omega(\lambda)-A_0=\sqrt{\lambda}\left\{\frac{1}{2i}\left(e^{i\sqrt{\lambda}l}-e^{-i\sqrt{\lambda}l}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2i}\int_0^l\left(e^{i\sqrt{\lambda}t}-e^{-i\sqrt{\lambda}t}\right)dc(t)-\frac{A_0}{\sqrt{\lambda}}\right\}=$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda}}{2i}\left\{e^{i\sqrt{\lambda}l}-e^{-i\sqrt{\lambda}l}+\int_{-l}^{l}e^{i\sqrt{\lambda}t}dc_0(t)-\frac{2iA_0}{\sqrt{\lambda}}\right\}, \qquad (45)$$

где

$$c_0(x)=\begin{cases} c(x) & \text{при } x>0,\\ -c(|x|) & \text{при } x<0.\end{cases} \qquad (45')$$

Из формулы (45) несложными преобразованиями получим, что

$$\omega(\lambda)-A_0=-\frac{\sqrt{\lambda}}{2i}e^{-i\sqrt{\lambda}l}\left\{1+\int_0^{2l}e^{i\sqrt{\lambda}t}d\rho(t)\right\}, \qquad (46)$$

где $\rho(x)$—некоторая функция ограниченной вариации на $[0, 2l]$, непрерывная в точке $x=0$ и имеющая разрыв в точке $x=2l$. Применив к формуле (46) лемму 2, получим, что при $\operatorname{Jm}\sqrt{\lambda}>\sigma_0$

$$[\omega(\lambda)-A_0]^{-1}=\frac{2i}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}l}\left\{1+\int_0^{+\infty}e^{i\sqrt{\lambda}t}d\rho_1(t)\right\}, \qquad (47)$$

где $\rho_1(x)$ имеет ограниченную вариацию на каждом отрезке вида $[0, R]$ $(0<R<+\infty)$ и $|\rho(x)|<Me^{\sigma_0 x}$ $(x>0)$.

Из формулы (2) имеем

$$\frac{d}{dx}[z(x,\lambda)-b(x)]=\beta\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(l-x)-\sqrt{\lambda}\int_x^l\sin\sqrt{\lambda}(t-x)\,db(t). \qquad (48)$$

Из формулы (10) следует, что при $h>\sigma_0$ представление (47) справедливо на параболе γ_h. Заметив, что интегралы

$$\int^{\infty}\frac{1}{x^{\varepsilon}}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,x\,dx$$

сходятся при любом $\varepsilon>0$, из формул (1), (44), (47) и (48) получим, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma_h} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \int\limits_0^l z(t, \lambda) f(t)\, dt\, d\lambda \tag{49}$$

сходятся равномерно по $x \in [0, l]$.

Далее, из оценки (19) и формул (44) и (48) получим, что равномерно по $x \in [0, l]$

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{l_h^{(n)}} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \int\limits_0^l z(t, \lambda) f'(t)\, dt\, d\lambda = 0. \tag{50}$$

Наконец, из формул (43), (49) и (50) следует, что на отрезке $x \in [0, l]$ равномерно сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \int\limits_0^l f(t) z_k(t)\, dt.$$

Теорема доказана.

Следуя методам работы [2], можно доказать и более сильные результаты, в частности о равносходимости рассматриваемых биортогональных разложений с тригонометрическими рядами Фурье.

Покажем теперь, что доказанная выше теорема фактически является теоремой о разложении по собственным функциям определенной задачи на собственные значения. Действительно, выписав задачи

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\{a(x) - y(x)\} = \lambda y(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), & (51) \\ y(0) = \alpha, & (52) \\ \beta y'(l) + \displaystyle\int\limits_0^l y'(t)\, db(t) = A_0, & (53) \end{cases}$$

$$(\mathrm{A}^*) \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\{b(x) - z(x)\} = \lambda z(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), & (51^*) \\ \alpha z'(0) + \displaystyle\int\limits_0^l z'(t)\, da(t) = A_0, & (52^*) \\ z(l) = \beta, & (53^*) \end{cases}$$

мы замечаем, что решением задачи (51) + (52) является функция $y(x, \lambda)$, а задачи (51*) + (53*)—функция $z(x, \lambda)$. Наконец, нетрудно видеть, что собственные значения задач (A) и (A*) совпадают и являются нулями функции $\omega(\lambda) - A_0$.

Следует отметить, что указанные задач содержат по одному условию „размазанного" типа, являющемуся обобщением многоточечного краевого условия.

4°. Покажем, что имеющая практическое применение тригоно-метрическая система, рассмотренная в работе Гаммерсли [3], явл-ется частным случаем системы $\{y_k(x), z_k(x)\}_1^{+\infty}$.

Гаммерсли рассматривает на отрезке $(-\pi, \pi)$ разложения [по] системе

$$\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} z_n x\right\}_1^{+\infty}$$

где $\{z_n\}_1^{+\infty}$ множество нулей функции

$$\pi z \cos \pi z + c \sin \pi z$$

(c—некоторая комплексная постоянная).

а) Пусть в формулах (1) и (3) $l = \pi$ и

$$y(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}\, x,$$

$$\omega(\lambda) = \pi \cos \sqrt{\lambda}\, \pi + c \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, \pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Легко можно найти выражение $z(x, \lambda)$ и построить соответствую[щую] биортогональную на $(0, \pi)$ систему $(A_0 = 0)$

$$\{\cos \sqrt{\lambda_k}\, x, u_k(x)\}_1^{+\infty} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

(все нули $\{\lambda_k\}_1^{+\infty}$ функции $\omega(\lambda)$—простые).

Именно, $b(x) = \dfrac{cx^2}{2} - \pi(1 + c)x \quad (\beta = 0)$.

б) Аналогично при $l = \pi$ и

$$y(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\omega(\lambda) = \pi \cos \sqrt{\lambda}\, \pi + c \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, \pi}{\sqrt{\lambda}}$$

соответствующую биортогональную на $(0, \pi)$ систему обозначим че[рез]

$$\{\sin \sqrt{\lambda_k}\, x, v_k(x)\}_1^{+\infty} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Пусть теперь $\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}\{f(x)\} < +\infty$. Тогда по теореме п. 3 по[чти] всюду на $[0, \pi]$

$$f(x) + f(-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \sqrt{\lambda_k}\, x \int_0^{\pi} \{f(t) + f(-t)\}\, u_k(t)\, dt.$$

Но вследствие четности разлагаемой функции формула (57) справед-лива при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Аналогично почти всюду на $[-\pi, \pi]$

$$f(x)-f(-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_k}\,x\int_0^{\pi}[f(t)-f(-t)]\,v_k(t)\,dt. \tag{59}$$

Наконец, из (58) и (59) имеем

$$f(x)\overset{\text{п. в.}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,x+b_k\sin\sqrt{\lambda_k}\,x] \quad (-\pi<x<\pi), \tag{60}$$

где

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,u_k(t)\,dt$$

$$(k=1,2,\cdots), \tag{61}$$

$$b_k=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,v_k(t)\,dt$$

$$u_k(-x)=u_k(x),\ v_k(-x)=-v_k(x) \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi,\ k=1,2,\cdots). \tag{62}$$

Таким образом, основной результат работы [3] (теорема 2), получаемый ценой чрезвычайно сложных и громоздких аналитических выкладок, по существу является частным случаем результатов п. 3°.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступила 10 X 1961

Հ. Բ. Ներսեսյան

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԲԻՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում են հետևյալ ֆունկցիաները՝

$$y(x,\lambda)=\alpha\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int_0^{x}\cos\sqrt{\lambda}\,(x-t)\,da(t), \tag{1}$$

$$z(x,\lambda)=\beta\cos\sqrt{\lambda}\,(l-x)+\int_x^{l}\cos\sqrt{\lambda}\,(t-x)\,db(t), \tag{2}$$

$$(0\leqslant x\leqslant l<+\infty)$$

որտեղ $a(x)$*-ը և* $b(x)$*-ը սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիաներ են* $(0,l)$*-ում և անընդհատ են այդ հատվածի ծայրակետերում: Կառուցվում է մի անալիտիկ* $\omega(\lambda)$ *ամբողջ ֆունկցիա, որ*

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \mu) \, dx = \frac{\omega(\lambda) - \omega(\mu)}{\lambda - \mu} \tag{3}$$

ցանկացած λ-ի և μ-ի համար:

Վերջին առնչությունը հնարավորություն է տալիս (1) և (2) ֆունկցիաներից [1] աշխատության մեջ բերված մեթոդներով կառուցել (0, *l*)*-ի վրա բիօրթոգոնալ*

$$\{y_k(x), z_k(x)\}_1^{+\infty} \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{4}$$

սիստեմը:

Ապացուցվում է հետևյալ հիմնական արդյունքը՝

Թեորեմ: Երբ $f'(x) \in L_1(0, l)$, ապա տեղի ունեն հետևյալ վերլուծությունները՝

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \int_0^l f(t) z_k(t) \, dt$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(x) \int_0^l f(t) y_k(t) \, dt.$$

Ապացուցվում է նաև, որ [3] աշխատության մեջ դիտարկված սիստեմը հանդիսանում է (4)-ի մասնավոր դեպքը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* и *Нерсесян А. Б.* О построении некоторых специальных биортогональных систем. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 5, 1959, 17—42.
2. *Нерсесян А. Б.* Разложение по собственным функциям некоторых несамосопряженных краевых задач. Сиб. мат. журнал, 2, № 3, 1961, 428—453.
3. *Hammersley J. M.* A non-harmonic Fourier series. Acta Math., 89, 1953, 243—260.