

МАТЕМАТИКА

Ж. Н. Кешисян

О некоторых критериях нормальности семейств
аналитических функций

1. Пусть H_M — класс функций, голоморфных в круге $|z-1| < 1$ и удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq M(|y|),$$

где $z = x + iy$, а $M(t)$ — положительная монотонная функция действительного переменного t , определенная на $(0, 1]$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = \infty.$$

Рассмотрим следующую задачу. Каким условиям должна удовлетворять функция $M(t)$, чтобы класс H_M был равномерно ограниченным внутри круга $|z-1| < 1$, то-есть для всякого круга $|z-1| \leq r < 1$ существовала бы постоянная C_r , зависящая только от r [и, конечно, от функции $M(t)$], такая, что для всех функций класса H_M

$$|f(z)| \leq C_r \quad \text{при} \quad |z-1| \leq r < 1?$$

Левинсоном доказано (см. [1], стр. 127), что если функция $M(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \log \log M(t) dt < \infty, \quad (1)$$

то класс H_M равномерно ограничен внутри круга $|z-1| < 1$. Доказательство этого факта у Левинсона очень громоздко. Приведем новое доказательство. Докажем следующую теорему.

Теорема. Если функция $M(t)$ удовлетворяет условию (1), то класс H_M равномерно ограничен внутри круга $|z-1| < 1$.

Доказательство. Пусть функция $y = \varphi(x)$, определенная на отрезке $[0, 2]$, непрерывна, монотонно растет в $[0, 1]$, монотонно убывает в $[1, 2]$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(k)}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \varphi^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1.$$

Обозначим через Γ кривую, которая состоит из кривых $y = \varphi(x)$ и $y = -\varphi(x)$. Γ является замкнутой непрерывной кривой. Через D обозначим область, ограниченную кривой Γ . Если функция $f(z)$ принадлежит классу H_M , то функция $\log |f(z)|$ субгармонична в области D . Из свойств субгармонических функций следует, что для $z \in D$

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi),$$

где $d\omega(z, \xi)$ — гармоническая мера элемента кривой Γ в точке z относительно области D . Обозначим через J_1 следующий интеграл

$$J_1 = \int_{\Gamma_1} \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi),$$

где Γ_1 — часть кривой Γ с уравнением $y = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Так как функция $f(z)$ принадлежит классу H_M , то

$$J_1 \leq \int_{\Gamma_1} \log M[\varphi(x)] \cdot d\omega(z, x + i\varphi(x)).$$

Обозначим $x_k = \varphi^{-1}(2^{-k-1})$. Можно считать, что $x_0 = \varphi^{-1}(\frac{1}{2}) = 1$.

Ясно, что $x_k > x_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots$). Так как функция $M(t)$ монотонна, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log M[\varphi(x)] d\omega(z, x + i\varphi(x)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \log M[\varphi(x)] d\omega(z, x + i\varphi(x)) < \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \log M(2^{-k-2}) \cdot \omega(z, x_k), \end{aligned}$$

где $\omega(z, x_k)$ — гармоническая мера части кривой Γ_1 : $y = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq x_k$ в точке z относительно области D .

Пусть функция $w = \tau(\xi)$ конформно отображает область D на круг $|w - 1| < 1$ так, что $\tau(0) = 0$ и $\tau(z) = 1$. Тогда части кривой Γ_1 : $y = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq x_k$ соответствует дуга $\cup OM_k$ окружности $|w - 1| = 1$, которая заключена между точками $w = 0$ и $w_k = \tau(x_k + i\varphi(x_k))$. Так как гармоническая мера инвариантна относительно конформных отображений, то

$$\omega(z, x_k) = \frac{\text{длина } \cup OM_k}{2\pi}.$$

При малых x_k (то-есть при больших k)

$$\text{длина } \cup OM_k \approx |\tau(x_k + i\varphi(x_k))|.$$

Следовательно,

$$J_1 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \log M(2^{-k-1}) \cdot |z(x_k + i\varphi(x_k))|.$$

По теореме Варшавского (см. [2], стр. 109) для больших k имеем

$$|z(x_k + i\varphi(x_k))| \leq \exp \left[-\frac{\pi}{2} \int_{\varphi^{-1}(x_k)}^a \frac{dt}{\varphi(t)} \right].$$

Окончательно получим

$$J_1 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[\log \log M(2^{-k-1}) - \frac{\pi}{2} \int_{\varphi^{-1}(2^{-k})}^a \frac{dt}{\varphi(t)} \right].$$

Обозначим

$$\frac{\pi}{4} h(y) = \log \log M\left(\frac{1}{8}y\right) + \frac{2}{y^{1/4}}.$$

Тогда

$$J_1 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} h(2^{-k-2}) - \int_{\varphi^{-1}(2^{-k})}^a \frac{dt}{\varphi(t)} \right] \right].$$

Теперь покажем, что можно построить такую непрерывную, монотонную функцию $\varphi(t)$, которая имеет следующие свойства

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0, 1, \quad \text{и} \quad h(4y) < \int_{\varphi^{-1}(y)}^a \frac{dt}{\varphi(t)}.$$

Легко видеть, что функция $h(y)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 h(y) dy < \infty.$$

Обозначим

$$k(u) = \int_0^u h(y) dy.$$

Функция $k(u)$ непрерывна и монотонна. Обозначим через $\varphi(t)$ ее обратную функцию. Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0, 1$ и

$$\int_{\varphi^{-1}(y)}^a \frac{dt}{\varphi(t)} = \int_y^{\varphi(a)} \frac{k'(u)}{u} du = \int_y^{\varphi(a)} \frac{h(u)}{u} du > \int_y^{4y} h(u) \frac{du}{u} > h(4y).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $4y < \varphi(a) = \text{const}$ при малых y .
Итак, мы получили, что

$$h(4y) < \int_{\varphi^{-1}(y)}^a \frac{dt}{\varphi(t)},$$

в частности

$$h(2^{-k+2}) < \int_{\varphi^{-1}(2^{-k})}^a \frac{dt}{\varphi(t)}.$$

Следовательно

$$J_1 < \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{\pi}{4} h(2^{-k+2}) \right] < \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-2^{\frac{k}{2}} \right) < \infty,$$

то-есть интеграл J_1 равномерно ограничен в области D .
Интеграл

$$\int_{\Gamma} \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi)$$

разобьем на четыре интеграла

$$\int_{\Gamma} \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi) = \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi),$$

где Γ_k — часть кривой Γ , уравнение которой есть $y = (-1)^{k-1} \varphi(x)$,
 $\left[\frac{k-1}{2} \right] < x < \left[\frac{k-1}{2} \right] + 1^*$, $k=1, 2, 3, 4$. Аналогичным образом, как
и для интеграла J_1 , можно доказать, что интегралы

$$\int_{\Gamma_k} \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi)$$

равномерно ограничены в области D . Следовательно, класс H_M равномерно ограничен в области D .

Чтобы завершить доказательство теоремы, надо доказать, что класс H_M равномерно ограничен в круге $|z-1| < r < 1$. Для всякой точки z ($|z-1| < r < 1$), которая не принадлежит вещественной оси, существует ее такая окрестность, в которой класс H_M равномерно ограничен. Это следует из того, что в окрестности точки z функция $M(t)$ ограничена. Если же точка z ($|z-1| < r < 1$) принадлежит вещественной оси, то, как доказано выше, существует окрестность точки z , в которой класс H_M равномерно ограничен. Следовательно, каждая точка замкнутого круга $|z-1| < r$ покрывается некоторым

* $[x]$ означает целую часть числа x .

кругом, в котором класс H_M равномерно ограничен. По теореме Гейне-Бореля из этих кругов можно выбрать конечное число таких кругов, которые покрывали бы круг $|z-1| \leq r$. Так как число этих кругов конечно, то отсюда следует, что существует постоянная C_r , зависящая от r (и, конечно, от функции $M(t)$), такая, что в круге $|z-1| \leq r < 1$

$$|f(z)| \leq C_r$$

для всех функций $f(z)$ класса H_M . Теорема доказана.

Итак, мы получили достаточное условие того, чтобы класс был равномерно ограниченным внутри круга $|z-1| < 1$.

Левинсоном доказано (см. [1], стр. 153), что условие (1) является необходимым для таких функций $M(t)$, которые удовлетворяют следующему условию: существует число $p > 4$ такое, что

$$\log \log M(pt) < \frac{1}{2} \log \log M(t).$$

М. М. Джрбашян в работе [3] получил достаточные условия полноты системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$, где $\{\lambda_n\}$ — последовательность возрастающих положительных чисел в круге с радиальным вырезом. Так как при полноте не может иметь место нормальность, то для равномерной ограниченности класса H_M внутри круга необходимо, чтобы не выполнялось отмеченное выше условие М. М. Джрбашяна, что сходно условию (1).

Теперь построим такой класс H_M , для которого

$$\sup_{f(z) \in H_M} |f(0)| = \infty,$$

где функции $f(z)$ голоморфны в круге $|z| < 1$, и оценим порядок роста функции $M(t)$.

Пусть $r(h)$ — некоторая положительная функция, определенная на $(0, 1]$ и имеющая следующее свойство

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \infty.$$

Обозначим через E_h замкнутую область, состоящую из двух симметричных сегментов круга $|z| < 1$, которые удалены от действительной оси x на расстояние h . Назовем $P_h(z)$ многочлен, который имеет следующие свойства

- 1) $|P_h(z)| \leq 1$ при $z \in E_h$,
- 2) $|P_h(0)| > r(h)$.

Существование такого многочлена следует из возможности равномерного приближения с любой точностью непрерывных функций много-

членами на замкнутых ограниченных множествах, которые не делят плоскость на части.

Обозначим

$$M(h) = \inf_{(P_h(z))} \max_{|z| < 1} |P_h(z)|,$$

где $|P_h(z)|$ — класс многочленов $P_h(z)$, которые имеют свойства (2).

Докажем, что функция $M(h)$ монотонно убывает, то-есть если $h_1 < h_2$, то $M(h_1) > M(h_2)$. В самом деле, так как $E_{h_1} \supset E_{h_2}$ и $r(h_1) > r(h_2)$, то класс многочленов $P_{h_1}(z)$ принадлежит классу многочленов $P_{h_2}(z)$. Следовательно, $M(h_1) > M(h_2)$. Ясно, что $M(h) > r(h)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} M(h) = \infty.$$

Можно считать, что $r(h) > 1$. Тогда $M(h) > 1$.

Составим класс H_M для функции $M(h)$. Пусть $P_h^*(z)$ — многочлен, для которого

$$\max_{|z| < 1} |P_h^*(z)| = M(h).$$

Покажем, что $P_h^*(z) \in H_M$. Действительно, если $|y| > h$, то-есть $z \in E_h$, то

$$|P_h^*(z)| \leq 1 \leq M(|y|).$$

Если же $|y| < h$, то

$$|P_h^*(z)| \leq M(h) \leq M(|y|).$$

Для функций $f(z)$ класса H_M имеем

$$\sup_{f(z) \in H_M} |f(0)| > \sup_h |P_h^*(0)| = \infty,$$

следовательно, класс H_M неограничен внутри круга $|z| < 1$.

Теперь оценим порядок роста функции $M(h)$. Обозначим через G_h область, ограниченную отрезками прямых $y = \pm h$, $0 \leq x \leq 1+h$ и дугами окружностей $|z| = h$, $|z - (1+h)| = h$, которые соединяют концы вышеупомянутых отрезков. Обозначим через l точку $x = 1+h$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти рациональную функцию

$R\left(\frac{1}{z-l}\right)$, которая имеет следующие свойства (см. [4], стр. 21)

$$1) \quad \left| \frac{1}{z} - R\left(\frac{1}{z-l}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } z \in E_h.$$

$$2) \quad \left| R\left(\frac{1}{z-l}\right) \right| < \exp \left[\left(1 + \log \frac{2}{\varepsilon h} \right) e^{\frac{1+h}{h}} \right] \quad \text{при } |z| \leq 1.$$

Так как рациональная функция $R\left(\frac{1}{z-1}\right)$ голоморфна в замкнутом круге $|z| \leq 1$, то для $\varepsilon > 0$ можно найти такой многочлен $Q(z)$, что в круге $|z| \leq 1$

$$\left| R\left(\frac{1}{z-1}\right) - Q(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим $P(z) = 1 - zQ(z)$. Многочлен $P(z)$ имеет следующие свойства

- 1) $|P(z)| < 1$ при $z \in E_h$,
- 2) $P(0) = 1$,
- 3) $|P(z)| < 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \exp \left[\left(1 + \log \frac{2}{\varepsilon h} \right) e^{\frac{1+h}{h}} \right]$ при $|z| \leq 1$.

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{r(h)}$. Тогда многочлен $P_h(z) = r(h) \cdot P(z)$ имеет следующие свойства

- 1) $|P_h(z)| < 1$ при $z \in E_h$,
- 2) $P_h(0) = r(h)$,
- 3) $|P_h(z)| < \frac{1}{2} + r(h) + r(h) \exp \left[\left(1 + \log \frac{2r(h)}{h} \right) e^{\frac{1+h}{h}} \right]$ при $|z| \leq 1$. Отсюда следует, что

$$M(h) < \frac{1}{2} + r(h) + r(h) \exp \left[\left(1 + \log \frac{2r(h)}{h} \right) e^{\frac{1+h}{h}} \right].$$

Если $r(h) = \frac{1}{h^2}$, $\varepsilon > 0$, то получим, что при малых h

$$\log \log M(h) \leq G(h) = \frac{1}{h}.$$

Итак, мы построили класс H_M , который неограничен внутри круга $|z| < 1$ и для которого $\log \log M(h) = O\left(\frac{1}{h}\right)$.

Отсюда следует, что для равномерной ограниченности класса H_M внутри круга $|z| < 1$ необходимо, чтобы

$$\log \log M(h) = o\left(\frac{1}{h}\right).$$

2. Обозначим через S следующую спираль

$$r = A \cdot \exp\left(-\frac{1}{\log \varphi}\right), \quad (A > 0, \varphi \geq \varphi_0 > 1),$$

а через $d(z)$ —расстояние точки z ($|z| < 1$) от S .

Пусть $M(t)$ —положительная монотонная функция действительного переменного t , определенная на полуинтервале $0 < t \leq t_0$, где $t_0 = \max_{|z| < 1} d(z)$, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = \infty.$$

Обозначим через H_M класс функций $f(z)$, голоморфных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq M[d(z)] \quad (|z| < 1).$$

Поставим следующую задачу. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять функция $M(t)$, чтобы класс H_M был равномерно ограниченным внутри круга $|z| < 1$, то-есть чтобы любому кругу $|z| \leq r < 1$ соответствовала бы постоянная C_r , зависящая от r [и, конечно, от функции $M(t)$], такая, что для всех функций класса H_M

$$|f(z)| \leq C_r \quad \text{при } |z| \leq r?$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если функция $M(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{t_0} \frac{t \log \frac{1}{t} \log \log M(t)}{\prod_{p=2}^m \log_p \frac{1}{t}} dt < \infty, \quad (3)$$

где m —любое натуральное число, а

$$\log_p \frac{1}{t} = \underbrace{\log \cdots \log}_{p \text{ раз}} \frac{1}{t},$$

то класс H_M равномерно ограничен внутри круга $|z| < 1$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если функция $M(t)$ удовлетворяет условию (3), то существует окрестность спирали S , в которой все функции класса H_M равномерно ограничены одним и тем же постоянным. Действительно, предположим, что мы это доказали. Возьмем какой-нибудь круг $|z| \leq r < 1$. Если точка z этого круга не принадлежит спирали S , то существует её такая окрестность, в которой все функции класса H_M равномерно ограничены, так как в этой окрестности функция $M(t)$ ограничена. Если же точка z круга $|z| \leq r$ принадлежит спирали S , то по предположению существует окрестность этой точки, в которой все функции класса H_M равномерно ограничены. Итак, каждая точка замкнутого круга $|z| \leq r$ покрыта некоторым кругом, в котором класс H_M равномерно ограни-

чен. По теореме Гейне-Бореля существует конечное число кругов, покрывающие круг $|z| \leq r$, в каждом из которых класс H_M равномерно ограничен. Отсюда следует, что класс H_M равномерно ограничен в круге $|z| < 1$.

Теперь докажем, что если функция $M(t)$ удовлетворяет условию (3), то существует окрестность спирали S , в которой все функции класса H_M равномерно ограничены. Возьмем положительную монотонную функцию $v(\varphi)$ ($\varphi > 1$), которая удовлетворяет условию

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} v^{(k)}(\varphi) = 0, \quad k = 0, 1.$$

Обозначим через C кривую, составленную из кривых $Ae^{-\frac{1}{\log \varphi} \mp v(\varphi)}$ и из дуги окружности, соединяющей точки $(\varphi_0, Ae^{-\frac{1}{\log \varphi_0} - v(\varphi_0)})$ и $(\varphi_0, Ae^{-\frac{1}{\log \varphi_0} + v(\varphi_0)})$. Если точка $z = re^{i\varphi}$ принадлежит кривой C , то

$$d(z) = A \left| e^{-\frac{1}{\log \varphi} \pm v(\varphi)} - e^{-\frac{1}{\log \varphi}} \right| = Ae^{-\frac{1}{\log \varphi}} v(\varphi) \left| 1 \pm \frac{v(\varphi)}{2!} \pm \frac{v^2(\varphi)}{3!} + \dots \right|.$$

Нас интересует $d(z)$ для больших φ . Для таких φ

$$d(z) \approx Av(\varphi).$$

Вычислим

$$\frac{A}{2} \left| e^{-\frac{1}{\log(\varphi + 2\pi\delta)}} - e^{-\frac{1}{\log \varphi}} \right| = A\pi \frac{e^{-\frac{1}{\log(\varphi + 2\pi\delta)}}}{(\varphi + 2\pi\delta) [\log(\varphi + 2\pi\delta)]^2},$$

где $0 < \delta < 1$. Для больших φ

$$\frac{A}{2} \left| e^{-\frac{1}{\log(\varphi + 2\pi\delta)}} - e^{-\frac{1}{\log \varphi}} \right| \approx \frac{a}{\varphi (\log \varphi)^2},$$

где a — некоторая положительная абсолютная постоянная. Функцию $v(\varphi)$ возьмем так, чтобы

$$v(\varphi) < \frac{a}{\varphi (\log \varphi)^2}.$$

Обозначим через D область, ограниченную кривой C . Область D будет односвязной и однолистной. Если функция $f(z)$ принадлежит классу H_M , то функция $\log |f(z)|$ субгармонична внутри области D . Из свойств субгармонических функций следует, что для $z \in D$

$$\log |f(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_C \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi),$$

где $d\omega(z, \xi)$ — гармоническая мера элемента кривой C в точке z относительно области D . Так как $|f(\xi)| \leq M[d(\xi)] = M[Av(\xi)]$, где $\xi = \rho e^{i\theta}$, то

$$\log |f(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_C \log M[A_\nu(\theta)] \cdot d\omega(z, \xi).$$

Пусть $\theta_0 = \min_{\xi \in C} |\theta|$. Кривую C разобьем на две части: C_+ и C_- , где C_+ означает ту часть кривой C , которую описывает точка $\xi = \rho e^{i\theta}$, $\theta \geq \theta_0$, оставаясь все время правее области D , а C_- означает ту часть кривой C , которую описывает точка $\xi = \rho e^{i\theta}$, $\theta > \theta_0$, оставаясь все время левее области D . Тогда

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \log M[A_\nu(\theta)] \cdot d\omega(z, \xi) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{C_-} \log M[A_\nu(\theta)] \cdot d\omega(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} (J_1 + J_2). \end{aligned}$$

Интеграл J_1 можно записать и так

$$J_1 = \int_{\theta_0}^{\infty} \log M[A_\nu(\theta)] \cdot d\omega(z, \rho e^{i\theta}).$$

Без ограничения общности можно считать, что $\nu(\theta_0) = \frac{1}{2A}$. Обозначим $\theta_k = \nu^{-1}\left(\frac{1}{A} \cdot 2^{-k-1}\right)$. Легко видеть, что $\theta_k < \theta_{k+1}$ ($k \geq 0$). Учитывая монотонность функции $M(t)$, получим

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \log M[A_\nu(\theta)] \cdot d\omega(z, \rho e^{i\theta}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \log M(2^{-k-2}) \cdot \omega(z, \theta_k),$$

где $\omega(z, \theta_k)$ означает гармоническую меру той бесконечной части кривой C_+ в точке z относительно области D , которую пробегает

точка $(\theta, e^{-\frac{1}{\log \theta} + \nu(\theta)})$, когда θ изменяется в интервале $[\theta_k, \infty)$.

Обозначим через $w = \tau(\xi)$ ($\xi \in D$) функцию, которая конформно отображает область D на круг $|w-1| < 1$ так, что $\lim_{\text{arg } \xi \rightarrow \infty} \tau(\xi) = 0$.

$\tau(z) = 1$. Тогда вышеуказанной бесконечной части кривой C_+ соответствует дуга $\cup OM_k$ окружности $|w-1|=1$, которая заключена между точками $w=0$ и $w_k = \tau\left[\exp\left(-\frac{1}{\log \theta_k} + \nu(\theta_k) + i\theta_k\right)\right]$. Тогда как гармоническая мера инвариантна относительно конформных отображений, то

$$\omega(z, \theta_k) = \frac{\text{длина } \cup OM_k}{2\pi}.$$

Для больших k

$$\text{длина } OM_k \approx \left| \tau \exp \left(-\frac{1}{\log \theta_k} + \nu(\theta_k) + i\theta_k \right) \right|.$$

Следовательно,

$$w(z, \theta_k) \approx \frac{1}{2\pi} \left| \tau \exp \left(-\frac{1}{\log \theta_k} + \nu(\theta_k) + i\theta_k \right) \right|.$$

По теореме Варшавского (см. [2], стр. 115)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\tau(\xi)|}{\frac{1}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{\nu(t)}} = -\tau.$$

Отсюда для больших θ

$$|\tau(\xi)| \leq \exp \left[-\frac{\tau}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{\nu(t)} \right].$$

Окончательно имеем

$$J_1 < \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[\log \log M(2^{k-1}) - \frac{\tau}{2} \int_{\theta_k}^{\infty} \frac{dt}{\nu(t)} \right].$$

Пусть для больших t

$$\nu(t) = \frac{a}{2t(\log t)^2}.$$

Из уравнения

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{t(\log t)^2} = y$$

найдем

$$t = \frac{a}{2y} \cdot \frac{1}{(\log t)^2} \text{ и } \left[1 - \frac{2 \log \log t}{\log t} - \frac{\log \frac{a}{2}}{\log t} \right] \log t = \log \frac{1}{y}.$$

Из последнего выражения для больших t получим, что

$$\log t \approx \log \frac{1}{y}.$$

Следовательно,

$$\nu^{-1}(y) \approx \frac{a}{2y \left(\log \frac{1}{y} \right)^2} \text{ для малых } y.$$

Для функции $\nu(t) = \frac{a}{2t(\log t)^2}$ при малых y имеем

$$\int_{0_+}^{v^{-1}(y)} \frac{dt}{v(t)} \approx \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{y^2 \left(\log \frac{1}{y} \right)^2}.$$

Если функция $M(t)$ удовлетворяет условию (3), то

$$\log \log M(t) = o\left(\frac{1}{t^2 \left(\log \frac{1}{t} \right)^2}\right).$$

Значит для функции $v(t) = \frac{a}{2t(\log t)^2}$

$$\log \log M\left(\frac{1}{2}y\right) - \frac{\pi}{2} \int_{0_+}^{v^{-1}\left(\frac{y}{A}\right)} \frac{dt}{v(t)} \approx -\frac{c}{y^2 \left(\log \frac{1}{y} \right)^2}.$$

в частности

$$\log \log M(2^{-k-1}) - \frac{\pi}{2} \int_{0_+}^{v^{-1}\left(\frac{2^{-k}}{A}\right)} \frac{dt}{v(t)} \approx -c \frac{2^{2(k-1)}}{k^2}.$$

Отсюда следует, что

$$J_1 < \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-c \frac{2^{2(k-1)}}{k^2}\right) < \infty.$$

Мы получили, что интеграл J_1 равномерно ограничен в области D . Аналогичным образом можно доказать, что интеграл J_2 тоже равномерно ограничен в области D . Итак, в области D класс H_M равномерно ограничен. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы мы воспользовались соотношением

$$\log \log M(t) = o\left(\frac{1}{t^2 \left(\log \frac{1}{t} \right)^2}\right)$$

которое следует из (3) при малых t . Следовательно, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Класс H_M равномерно ограничен внутри круга $|z| < 1$, если

$$\log \log M(t) = o\left(\frac{1}{t^2 \left(\log \frac{1}{t} \right)^2}\right).$$

Теперь построим пример класса H_M , для которого

$$\sup_{f(z) \in H_M} |f(a)| = \infty,$$

где a — начальная точка спирали S , и оценим порядок роста функции $M(t)$.

Обозначим через φ_h корень уравнения

$$\frac{a}{\varphi (\log \varphi)^2} = h \quad (0 < h < t_0). \quad (4)$$

Ясно, что $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h = \infty$. Как было показано выше, для малых h

$$\varphi_h \approx \frac{a}{h \left(\log \frac{1}{h} \right)^2}.$$

Легко видеть, что корень уравнения

$$\frac{A}{2} \left[e^{-\frac{1}{\log(z+2\pi)}} - e^{-\frac{1}{\log z}} \right] = h$$

эквивалентен корню φ_h уравнения (4) при малых h .

Пусть $z_h = \exp \left(-\frac{1}{\log \varphi_h} + i\varphi_h \right)$. Соединим точку $z=0$ с точкой z_h прямым отрезком и продолжим этот отрезок до точки b , где $|b|=1+h$. Обозначим через L_h кривую, которая состоит из части спирали S , заключенной между точками a и z_h , и прямым отрезком $[z_h, b]$. Пусть G_h означает множество точек плоскости, расстояние которых до кривой L_h меньше чем h , а E_h означает множество точек круга $|z| \leq 1$, расстояния которых до кривой L_h больше или равны h . Ясно, что G_h односвязная область, а E_h — замкнутое ограниченное множество, которое не делит плоскость.

Пусть $P_h(z)$ многочлен, который имеет следующие свойства

- 1) $|P_h(z)| \leq 1$ при $z \in E_h$,
 - 2) $|P_h(a)| = \frac{1}{h^2}$ ($h > 0$).
- (5)

Как мы отметили выше, такой многочлен существует. Обозначим

$$M(h) = \inf_{|P_h(z)|} \left[\max_{|z| \leq 1} |P_h(z)| \right],$$

где $|P_h(z)|$ — семейство всех многочленов, которые имеют свойства

(5). Ясно, что $M(h) \geq \frac{1}{h^2} > 1$. Оценим порядок роста функции $M(h)$. По вышеуказанной лемме (см. [4], стр. 21) для любого $\epsilon > 0$

существует рациональная функция $R\left(\frac{1}{z-b}\right)$, которая имеет следующие свойства

$$1) \left| \frac{1}{z-a} - R\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ если } z \in E_h.$$

$$2) \left| R\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \exp \left[\left(1 + \log \frac{4}{\varepsilon h} \right) e^{e' \frac{\sqrt{h}}{h}} \right] \text{ при } |z| \leq 1.$$

Так как рациональная функция $R\left(\frac{1}{z-b}\right)$ голоморфна в круге $|z| \leq 1$, то существует такой многочлен $Q(z)$, что

$$\left| R\left(\frac{1}{z-b}\right) - Q(z) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ при } |z| \leq 1.$$

Обозначим

$$P(z) = 1 - (z-a)Q(z).$$

Многочлен $P(z)$ имеет следующие свойства

$$1) |P(z)| < \varepsilon, \text{ если } z \in E_h.$$

$$2) P(a) = 1,$$

$$3) |P(z)| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} + 2 \exp \left[\left(1 + \log \frac{4}{\varepsilon h} \right) e^{e' \frac{\sqrt{h}}{h}} \right] \text{ при } |z| \leq 1.$$

Если возьмем $\varepsilon = h^s$, то многочлен $P_h(z) = \frac{P(z)}{h^s}$ имеет следующие свойства

$$1) |P_h(z)| < 1, \text{ если } z \in E_h.$$

$$2) P_h(a) = \frac{1}{h^s},$$

$$3) |P_h(z)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{h^s} + \frac{2}{h^s} \exp \left[\left(1 + \log \frac{1}{h^{1+s}} \right) e^{e' \frac{\sqrt{h}}{h}} \right] \text{ при } |z| \leq 1.$$

Отсюда следует, что $M(h) \leq G(h)$, где

$$\log \log G(h) = \frac{C}{h^2 \left(\log \frac{1}{h} \right)^2}.$$

Легко видеть, что функция $G(h)$ монотонно убывает. Обозначим через $P_h^*(z)$ многочлен, для которого

$$\max_{|z| \leq 1} |P_h^*(z)| = M(h).$$

Покажем, что многочлен $P_h^*(z)$ принадлежит классу H_0 . В самом деле, если $z \in E_h$, то ввиду $G(h) > 1$ получим

$$|P_h^*(z)| \leq 1 < G[d(z)].$$

Если же $z \notin E_h$, то $d(z) < h$, следовательно,

$$|P_h^*(z)| \leq M(h) \leq G(h) < G[d(z)].$$

Для класса H_0 имеем

$$\sup_{f(z) \in H_0} |f(a)| \geq \sup_h |P_h^*(a)| = \infty.$$

Таким образом мы построили пример класса H_M , который неограничен внутри круга $|z| < 1$. Для этого класса

$$\log \log M(t) = O\left(\frac{1}{t^2 \left(\log \frac{1}{t}\right)^2}\right).$$

Соединяя этот факт с приведенным выше замечанием, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Для того, чтобы класс H_M был равномерно ограничен внутри круга $|z| < 1$, необходимо и достаточно чтобы

$$\log \log M(t) = o\left(\frac{1}{t^2 \left(\log \frac{1}{t}\right)^2}\right).$$

3. Обозначим через S спираль

$$r = a\varphi$$

($\varphi > \varphi_0 > 0$, a — некоторая постоянная), а через $d(z)$ — расстояние точки z комплексной плоскости от S . Пусть H есть класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq M(z) \cdot G[d(z)],$$

где $M(z)$ и $G(h)$ — положительные, монотонные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} M(z) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} G(h) = \infty.$$

Поставим следующую задачу. Каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять функции $M(z)$ и $G(h)$, чтобы класс H был равномерно ограниченным в любой конечной части плоскости z , т. е. всякому кругу $|z| < R$ соответствовало бы постоянное C_R такое, что все функции $f(z)$ класса H в замкнутом круге $|z| < R$ удовлетворяли бы неравенству

$$|f(z)| \leq C_R?$$

Достаточно рассмотреть следующую задачу. Каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять функции $M(z)$ и $G(h)$, чтобы все функции класса H были равномерно ограниченными в некоторой окрестности спирали S ?

Не ограничивая общности предположим, что $a = 1$.

Пусть функция $v(\varphi)$ имеет следующие свойства

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} v(\varphi) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varphi \rightarrow \infty} v'(\varphi) = 0.$$

Обозначим через Γ_+ кривую $r = r_+(\varphi) = \varphi e^{-v(\varphi)}$, а через Γ_- — кривую $r = r_-(\varphi) = \varphi e^{v(\varphi)}$. Пусть Γ есть кривая, которая состоит из кривых Γ_+ , Γ_- и из дуги окружности, соединяющей начальные точки кривых Γ_+ , Γ_- . Обозначим через D область, ограниченную кривой Γ и содержащую спираль S . Функция $\log |f(z)|$ ($f(z) \in H$) субгармонична в области D . Следовательно, в области D

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |f(\xi)| d\omega(z, \xi)$$

или

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log M(\xi) d\omega(z, \xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log G[d(\xi)] d\omega(z, \xi),$$

где $d\omega(z, \xi)$ — гармоническая мера элемента кривой Γ в точке z относительно области D . Обозначим через $\bar{\Gamma}_+$ ту часть кривой Γ , которую описывает точка $z = re^{i\varphi}$ ($\varphi \geq \varphi_0 = \min_{z \in \Gamma} \{\varphi\}$, $\varphi_0 \leq \varphi_1$), все время находясь справа от области D , а через $\bar{\Gamma}_-$ — остальную часть кривой Γ . Тогда

$$\begin{aligned} \log |f(z)| \leq & \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_+} \log M(\xi) d\omega(z, \xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_+} \log G[d(\xi)] d\omega(z, \xi) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_-} \log M(\xi) d\omega(z, \xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_-} \log G[d(\xi)] d\omega(z, \xi). \end{aligned}$$

Обозначим

$$J = \int_{\bar{\Gamma}_+} \log M(\xi) d\omega(z, \xi) + \int_{\bar{\Gamma}_+} \log G[d(\xi)] d\omega(z, \xi).$$

Пусть $\varphi_k v(\varphi_k) = 2^{-k}$. Не нарушая общности, можно считать, что $\varphi_0 v(\varphi_0) = \frac{1}{2}$. Тогда

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \log M(\xi) d\omega(z, \xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \log G[d(\xi)] d\omega(z, \xi) \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{\infty} \log M(\xi_{k+1}) \omega(z, \xi_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \log G[d(\xi_{k+1})] \cdot \omega(z, \xi_k),$$

где $\omega(z, \xi_k)$ — гармоническая мера той бесконечной части кривой Γ_z в точке z относительно области D , которую пробегает точка $(\varphi, \varphi e^{-\nu(\varphi)})$, когда φ изменяется в интервале $[\varphi_k, \infty)$. Как и выше, для $\omega(z, \xi_k)$ по теореме Варшавского (см. [2], стр. 115) можно получить следующую оценку

$$\omega(z, \xi_k) \leq \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \frac{dt}{\nu(t)} \right].$$

Следовательно,

$$J \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\log \log M(\xi_{k+1}) - \frac{\pi}{2} \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \frac{dt}{\nu(t)} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\log \log G[d(\xi_{k+1})] - \frac{\pi}{2} \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \frac{dt}{\nu(t)} \right].$$

Рассмотрим следующие случаи.

Первый случай. Предположим, что

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log M(z)}{\log |z|} = A, \quad (A)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \log \log G(h)}{\log \frac{1}{h}} = B. \quad (B)$$

В качестве $\nu(t)$ возьмем функцию

$$\nu(t) = \frac{1}{t^{r+1}}, \quad (r > 0).$$

Тогда

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_0} t^{r+1} dt \approx \frac{2}{r+2} \frac{k(r+2)}{r} \quad \text{при больших } k \text{ и } |\xi_{k+1}| = \varphi_{k+1} = 2^{\frac{k+1}{r}}. \text{ Из условия (A) следует, что}$$

$$\log \log M(\xi_{k+1}) \leq (1 + \varepsilon_k) \cdot |\xi_{k+1}|^A = (1 + \varepsilon_k) 2^{\frac{A}{r}(k+1)},$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\log \log M(\xi_{k+1}) - \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{r}} \frac{dt}{v(t)} \right] < \infty$$

если

$$r > A - 2. \quad (6)$$

Если $\xi \in \Gamma$, то $d(\xi) \approx \varphi(\varphi)$ (где $\xi = re^{i\varphi}$) при больших φ . Из условия (B) следует, что

$$\log \log G[d(\xi_{k+1})] \leq (1 + \delta_k) [d(\xi_{k+1})]^{-B} = (1 + \delta_k) \cdot 2^{\frac{B}{r}(k+1)},$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left\{ \log \log G[d(\xi_{k+1})] - \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{r}} \frac{dt}{v(t)} \right\} < \infty,$$

если

$$r < \frac{2}{B-1}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что если число r удовлетворяет условиям (6) и (7), то класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости z . Объединяя условия (6) и (7), мы получим, что класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости z , если

$$A < \frac{2B}{B-1}, \text{ или } B < \frac{A}{A-2}, \text{ или же } \frac{2}{A} + \frac{1}{B} > 1.$$

Из неравенства

$$A < 2 + \frac{2}{B-1}$$

следует, что класс H равномерно ограничен при любом B , если $A < 2$. Аналогичным образом из неравенства

$$B < 1 + \frac{2}{A-2}$$

следует, что класс H равномерно ограничен при любом A , если $B < 1$.

Таким образом можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть функция $M(z)$ удовлетворяет условию (A), а функция $G(h)$ — условию (B). Тогда класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости z .

- а) при любом A , если $B \leq 1$,
 б) при любом B , если $A \leq 2$,
 в) при любых A и B , которые удовлетворяют условию

$$\frac{2}{A} + \frac{1}{B} > 1. \quad (8)$$

Второй случай. Теперь предположим, что функция $G(h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \log \log \log G(h)}{\log \frac{1}{h}} = C, \quad (C)$$

а функция $M(z)$ удовлетворяет условию (A), где $A < 2$. В качестве $v(t)$ возьмем функцию $v(t) = \frac{1}{t(\log t)^r}$ ($r > 0$). Тогда

$$\int_{\tau_0}^{\tau_k} t (\log t)^r dt \approx 2^{k-1} e^{2^{1+\frac{k}{r}}} \text{ при больших } k.$$

Из условия (C) следует, что

$$\log \log G[d(\xi_{k+1})] < (1 + \varepsilon_k) e^{2^{C(k+1)}}, \text{ где } \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\log \log G[d(\xi_{k+1})] - \frac{\pi}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{dt}{v(t)} \right] < \infty$$

при

$$r < \frac{1}{C}. \quad (9)$$

Если $C \leq 1$, то ряд сходится при

$$r < \frac{1}{C}. \quad (9')$$

Из условия (A) следует, что

$$\log \log M(\xi_{k+1}) < (1 + \varepsilon_k) e^{A \cdot 2^{\frac{k+1}{r}}}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\log \log M(\xi_{k+1}) - \frac{\pi}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{dt}{v(t)} \right] < \infty$$

при

$$r > \frac{\log 2}{\log 2 - \log A}. \quad (10)$$

Итак, класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости, если число r удовлетворяет условиям (9) и (10). Иначе говоря, класс H равномерно ограничен, если

$$\frac{1}{C} > \frac{\log 2}{\log 2 - \log A} \quad \text{или} \quad C + \frac{\log A}{\log 2} < 1.$$

Из последнего неравенства и неравенства (9') следует, что при $A=1$ класс H равномерно ограничен при любом $C \leq 1$. Если $1 < A < 2$, то класс H равномерно ограничен при таких C , для которых

$$C + \frac{\log A}{\log 2} < 1,$$

а если $0 < A < 1$, то класс H равномерно ограничен при таких C , для которых

$$C + \frac{\log A}{\log 2} < 1.$$

В этом случае C может быть больше единицы. Если $A=0$, то класс H равномерно ограничен при любом C .

Таким образом можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть функция $M(z)$ удовлетворяет условию (A), $A < 2$, а функция $G(h)$ — условию (C). Тогда класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости z

а) при $1 < A < 2$ для таких C , которые удовлетворяют условию

$$C + \frac{\log A}{\log 2} < 1,$$

в) при $A=1$ для всех $C \leq 1$,

с) при $0 < A < 1$ для таких C ($C > 1$), которые удовлетворяют условию

$$C + \frac{\log A}{\log 2} < 1,$$

д) при $A=0$ для всех C .

Аналогично можно доказать, что если $A=0$, то класс H равномерно ограничен для любой функции $G(h)$, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \dots \log G(h)}{\log \frac{1}{h}} = C_p \quad (p > 0).$$

Чтобы доказать это, достаточно взять функцию

$$\nu(t) = \frac{1}{t \underbrace{(\log \dots \log t)}_{p \text{ раз}}} r \quad (r > 0).$$

где $r > \frac{1}{C_p}$.

Третий случай. Предположим, что функция $M(z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log \log M(z)}{\log |z|} = D, \quad (D)$$

а функция $G(h)$ удовлетворяет условию (B), где $B < 1$. Возьмем

функцию $\nu(t) = \frac{1}{t} \cdot e^{-t^r} \quad (r > 0)$. Тогда

$$\int_{\tau_0}^{\tau_k} t e^{t^r} dt \approx \frac{2^k}{r} \cdot k^{\frac{2-r}{r}} (\log 2)^{\frac{2-r}{r}} \quad \text{при больших } k.$$

Из условия (D) получим, что

$$\log \log M(\xi_{k+1}) \leq (1 + \varepsilon_k) e^{(\log 2^k)^{\frac{D}{2}}}, \quad \text{где } \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0.$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\log \log M(\xi_{k+1}) - \frac{\pi}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{dt}{\nu(t)} \right]$$

сходится при

$$r \geq D.$$

Если $B = 1$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left\{ \log \log G[d(\xi_{k+1})] - \frac{\pi}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{dt}{\nu(t)} \right\}$$

сходится при $r < 2$, а если $B < 1$, то ряд сходится при любом r .

Следовательно, если $B = 1$, то класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости при любом $D < 2$, а если $B < 1$, то класс H равномерно ограничен при любом D .

Если функция $M(z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log \dots \log M(z)}{\underbrace{(p+3) \text{ раз}}_{\log |z|}} = D_p, \quad (11)$$

а функция $G(h)$ удовлетворяет условию (B), где $B < 1$, то аналогичным образом, как и в предыдущем случае, можно показать, что класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости

при всех $p > 1$. Для этого достаточно в качестве $v(t)$ взять функцию

$$v(t) = \frac{1}{t} \exp \left(- \frac{\exp \dots \exp t^r}{(p-1) \text{ раз}} \right),$$

где $r > D_p$.

Следовательно, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть функция $M(z)$ удовлетворяет условию (11) $p > 1$, а функция $G(h)$ — условию (B), где $B \leq 1$. Тогда класс H равномерно ограничен в любой конечной части плоскости

а) при $D = D_1 < 2$, если $B = 1$,

б) при любом D_p ($p > 1$), если $B < 1$.

Теперь получим одно необходимое условие для равномерной ограниченности класса H .

Опишем вокруг спирали S спиралеобразующую область шириной $2h$ ($h > 0$). Через E_h обозначим дополнение этой области. Пусть a — начальная точка S , а s означает длину дуги спирали, считая от a . Здесь мы используем одно следствие вышеупомянутой леммы (см. [4], стр. 24–25). Для $s(R)$ здесь получим $s(R) = \frac{R^2}{2}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция $G_h(z)$ такая, что

$$1) \quad \left| \frac{1}{z-a} - G_h(z) \right| < \varepsilon \quad \text{при } z \in E_h,$$

$$2) \quad |G_h(z)| \leq c_1 \exp \left[\exp \left(\frac{|z|^2}{2} \right) \right], \quad \text{где } c_1 \text{ — постоянная. Введем}$$

обозначения: $\varepsilon = h^\delta$, $\delta > 0$, $F_h(z) = \frac{1}{h^\delta} [1 - (z-a)G_h(z)]$. Тогда

$$1) \quad |F_h(z)| < c_2 |z| \quad \text{при } z \in E_h,$$

$$2) \quad F_h(a) = \frac{1}{h^\delta}.$$

$$3) \quad |F_h(z)| \leq c_3 \exp \left[\exp \left(\frac{|z|^2}{2} \right) \right].$$

Из последнего неравенства получим, что

$$|F_h(z)| \leq C \exp(\exp c |z|^4) \cdot \exp \left(\exp \frac{1}{h^2} \right).$$

Следовательно, если в качестве функции $M(z)$ взять

$$M(z) = C \exp(\exp c |z|^4),$$

а в качестве функции $G(h)$ —

$$G(h) = \exp \left(\exp \frac{1}{h^2} \right).$$

то класс H не будет равномерно ограниченным, так как

$$\sup_{f(z) \in H} |f(a)| = \infty.$$

Таким образом, при $A=4$ и $B=2$ класс H не является равномерно ограниченным. Следовательно, в этом случае условие (8) является необходимым и достаточным условием для равномерной ограниченности класса H в любой части плоскости.

Здесь можно ожидать, что полученные выше достаточные условия для равномерной ограниченности класса H являются также и необходимыми.

В заключение выражаю благодарность С. Н. Мергеляну за постановку задач и оказанную помощь при выполнении настоящей работы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 XII 1961

ժ. Ն. Քեֆեջյան

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ՆՈՐՄԱԼՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգրվածում ստացված են տրամադրով ճեղքված շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների ընտանիքի նորմալության հատանիշի մի նոր ապացույց, ինչպես նաև դեպի շրջանագիծը ձգտող սպիրալով ճեղքված շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների ընտանիքի նորմալության համար անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ:

Ստանալիս ճեղքված են նաև սպիրալով ճեղքված հարթության մեջ տեղադրված ֆունկցիաների ընտանիքի նորմալության մի քանի հարցեր:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Levinson N. Gap and density theorems. Amer. Math. Soc., 1940.
2. Варшавский С. Е. Конформное отображение бесконечных полос. Математика, III, период 2:4, 1958.
3. Джрбашян М. М. О полноте системы функций (z^k) в круге с радиальным вырезом. ДАН СССР, 74, 1954.
4. Мергелян С. Н. О полноте систем аналитических функций. УМН, 8, вып. 4 (56), 1953.