ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 2, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I)

Введение

Как известно (см., например, [1]), изучение линейчатой геометрии трехмерного проективного пространства связывается с проективно-дифференциальной геометрией подмногообразий плюккеровой (или грассмановой) гиперквадрики Ω (1, 3) пятимерного пространства. При этом каждая прямая пространства P_3 отображается в точку гиперквадрики Ω (1, 3) и каждый результат для подмногообразия Ω (1, 3) представляет некоторую теорему линейчатой геометрии P_3. Например, линейчатые поверхности в P_3 классифицируются по признаку принадлежности их отображений в P_5 к плоскостям различных измерений (представляющих линейные образы прямых в P_3). Для изучения теории конгруэнций и комплексов прямых большое значение имеют касательные плоскости их отображений и сопряженные направления гиперквадрики Ω (1, 3).

В настоящей работе (так же, как и в работе [2]) рассматривается геометрия многообразий прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. В работе [2] подробно излагается теория линейных многообразий прямых и плоскостей пространства P_4. Каждая прямая (плоскость) отображается в точку грассманова многообразия типа Ω (1, 4) [дуального грассманова многообразия типа Ω (2, 4)] проективного пространства P_9 (см. [4], т. I, стр. 303—340 и т. II стр. 340—424). Линейное многообразие прямых (плоскостей) различных измерений представляется пересечением плоскостей различных измерений пространства P_9 с грассмановым многообразием Ω (1, 4) [с дуальным многообразием Ω (2, 4)].

Линейчатые поверхности в P_4 классифицируются по признаку принадлежности их отображений в P_9 к подпространствам различных измерений. Развертывающиеся поверхности представляются асимптотическими линиями на Ω (1, 4). Тоже самое можно сказать об однопараметрическом семействе плоскостей пространства P_4.

Таким образом, теория многообразий прямых и плоскостей пространства P_4 сводится к теории подмногообразий грассманова многообразия в пространстве P_5. Такой подход позволяет во-первых, использовать некоторые факты из алгебраической геометрии, во-вторых, приложить проективно-дифференциальную теорию поверхностей любого измерения в P_5 к изучению многообразий прямых и плоскостей пространства P_4. Этот подход можно обобщить для многообразия плоскостей любых измерений, погруженного в пространстве P_n.

В первом параграфе рассматривается *касательное трехмерное подпространство линейчатых поверхностей* двупараметрического семейства прямых M_2, т. е. подпространство, в котором лежат все прямые дифференциальной окрестности первого порядка луча линейчатой поверхности. Многообразие касательных пространств для всех проходящих через данный луч линейчатых поверхностей образует однопараметрическое семейство *(касательный конус) второго класса многообразия* M_2. Касательные плоскости всех линейчатых поверхностей в данной точке луча M_2 лежат в определенном трехмерном подпространстве, называемом *касательным подпространством в данной точке луча многообразия* M_2. На луче многообразия M_2 каждая линейчатая поверхность имеет единственную точку (*фокус*), где оба указанные касательные подпространства совпадают. С помощью этих понятий частично фиксируется подвижной репер многообразия M_2.

В § 2 доказывается, что грассманово многообразие $\Omega(1, 4)$ обладает сопряженными направлениями, с помощью которых в P_4 вводится понятие *сопряженности двух линейчатых поверхностей* и выясняется его геометрический смысл.

Касательная прямая и касательная плоскость отображений линейчатой поверхности и многообразия M_2 в P_5 порождают *линейные четырехмерное и трехмерное касательные многообразия* плоскостей пространства P_4. В § 3 найдены эти многообразия, их особые подмногообразия и нуль-системы.

В §§ 4 и 5 с помощью сложного отношения четырех направлений на $\Omega(1, 4)$ вводится сложное отношение четырех линейчатых поверхностей в P_4 и перечисляются некоторые факты из теории конгруэнций многомерных пространств.

В § 6 все полученные выше результаты автоматически повторяются (по принципу двойственности пространства P_4) для многообразий плоскостей. Путем введения дуального подвижного репера для ∞^2 семейства плоскостей, здесь повторяется без изменений и аналитический аппарат, полученный для многообразий прямых.

В § 7 доказывается теорема: двойственный образ конгруэнции прямых в P_4 является многообразием всех касательных плоскостей некоторой поверхности и наоборот. Эта теорема дает возможность по принципу двойственности повторить богатую теорию конгруэнций для мало изученных двумерных поверхностей пространства P_4. В этом параграфе указывается ряд фактов из этой теории. В частности, найдены новые сети (ассоциированные) на поверхности пространства P_4.

Работа выполнена методом подвижного репера и внешних форм Картана [5].

§ 1. Выбор подвижного репера двупараметрического семейства прямых

Если инфинитезимальное перемещение вершин подвижного проективного репера A_i записать в виде

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad \text{где} \quad D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k], \tag{1.1}$$
$$i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$$

а двупараметрическое семейство прямых M_2 описать ребром $A_1 A_2$ репера, то дифференциал аналитической прямой запишется в виде

$$d\overline{12} = (\omega_1^1 + \omega_2^2)\,\overline{12} - \omega_1^3\,\overline{23} - \omega_1^4\,\overline{24} - \omega_1^5\,\overline{25} + \omega_2^3\,\overline{13} + \omega_2^4\,\overline{14} + \omega_2^5\,\overline{15}, \tag{1.2}$$

где $\overline{ik} = -\overline{ki} = (A_i A_k)$ — грассманово произведение вершин A_i и A_k. Так как мы рассматриваем двупараметрическое семейство прямых, то между шестью формами ω_i^k, стоящими в правой части (1.2), должны существовать четыре соотношения. Приняв ω_1^3 и ω_2^4 в качестве независимых форм на M_2, эти соотношения можно упростить, исходя из следующих геометрических соображений. Дифференциальная окрестность первого порядка луча каждой линейчатой поверхности (однопараметрического семейства прямых) в пространстве любой размерности лежит в некотором трехмерном „касательном" подпространстве, ибо каждые два непересекающихся (в том числе и бесконечно близкие) луча определяют единственное трехмерное подпространство в котором они лежат. Каждое линейное соотношение между линейно-независимыми формами выделяет некоторую линейчатую поверхность многообразия M_2. Подвижной репер будем выбирать так, чтобы касательные трехмерные подпространства линейчатых поверхностей $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_2^4 = 0$ совпадали соответственно с подпространствами $A_1A_2A_4A_5$ и $A_1A_2A_3A_5$, что согласно (1.2) приводит к соотношениям

$$[\omega_2^3 \omega_1^3] = 0, \quad [\omega_1^4 \omega_2^4] = 0. \tag{1.3}$$

Точки A_3 и A_4 в этих подпространствах выберем так, чтобы плоскость $A_1A_2A_3$ совпала с касательной в точке A_1 плоскостью линейчатой поверхности $\omega_2^4 = 0$, а $A_1A_2A_4$ — с касательной в точке A_2 плоскостью линейчатой поверхности $\omega_1^3 = 0$. Эти требования приводят к дополнительным условиям

$$[\omega_2^5 \omega_1^3] = 0, \quad [\omega_1^5 \omega_2^4] = 0. \tag{1.4}$$

К а с а т е л ь н о е т р е х м е р н о е п о д п р о с т р а н с т в о в т о ч к е л у ч а M_2. Для дальнейшего выбора подвижного координатного репера найдем совокупность касательных плоскостей всевозможных линейчатых поверхностей многообразия M_2 в неподвижной точке $A_1 + \rho A_2$ луча A_1A_2. Раскрывая (1.3) и (1.4), будем иметь

$$\omega_2^3 = a\omega_1^3,\ \omega_1^4 = a'\omega_2^4,\ \omega_1^5 = \alpha\omega_2^4,\ \omega_2^5 = \alpha'\omega_1^3. \tag{1.5}$$

Касательная плоскость к линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ в точке $A_1 + \rho A_2$ напишется посредством грассманова произведения трех точек $(A_1, A_2, d(A_1 + \rho A_2))$, которое в силу (1.5) напишется в виде

$$(A_1, A_2, (1 + a\rho) A_3 + \rho\alpha' A_5 + \lambda[(a' + \rho) A_4 + \alpha A_5]). \tag{1.6}$$

Все эти плоскости (для различных значений λ) находятся в трехмерном подпространстве

$$(A_1, A_2, (1 + a\rho) A_3 + \rho\alpha' A_5, [(a' + \rho) A_4 + \alpha A_5]). \tag{1.7}$$

Таким образом, *с каждой точкой луча многообразия M_2 связывается некоторое трехмерное подпространство, в котором лежат касательные (в этой точке) плоскости всевозможных линейчатых поверхностей многообразия.* Это подпространство в дальнейшем у нас называется *касательным в данной точке подпространством.*

Из выражения (1.6) одновременно получается касательное трехмерное подпространство линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$:

$$(A_1, A_2, \lambda(aa' - 1) A_4 + (a\alpha\lambda - \alpha') A_5, (aa' - 1) A_3 + (\alpha' a' - \alpha\lambda) A_5). \tag{1.8}$$

Подпространства (1.7) и (1.8) совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\alpha' (a' + \rho) = \alpha\lambda (1 + a\rho). \tag{1.9}$$

С помощью этого уравнения *с каждой точкой $A_1 + \rho A_2$ луча многообразия M_2 связывается единственная линейчатая поверхность $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$, обладающая тем свойством, что ее касательное трехмерное подпространство совпадает с касательным подпространством точки $A_1 + \rho A_2$ многообразия M_2.* Точка $A_1 + \rho A_2$ называется фокусом линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$. Уравнение (1.9) создает возможность дальнейшей фиксации подвижного репера.

Действительно, точки A_1 и A_2 на луче выберем так, чтобы они совпали с фокусами линейчатых поверхностей $\omega_2^4 = 0$, $\omega_1^3 = 0$. Тогда из (1.9) получим $a = 0$, $a' = 0$ и система уравнений (1.5) напишется окончательно в виде

$$\omega_1^4 = 0,\ \ \omega_2^3 = 0,\ \ \omega_1^5 = \alpha\omega_2^4,\ \omega_2^5 = \alpha'\omega_1^3. \tag{1.10}$$

Очевидно, такой выбор координатного репера не нарушает общности многообразия M_2 и система дифференциальных уравнений (1.10) определяет наиболее общее многообразие M_2.

В силу системы (1.5) подпространства (1.7) и (1.8) теперь определяются соответственно грассмановыми произведениями

$$(A_1, A_2, A_3 + \rho\alpha' A_5, \rho A_4 + \alpha A_5) \text{ и } (A_1, A_2, \lambda A_4 + \alpha' A_5, A_3 + \alpha\lambda A_5). \tag{1.11}$$

Если обозначить через u_i координаты этих подпространств, то легко заметить, что каждое из этих подпространств, первое для различных значений ρ, второе для различных значений λ, описывает однопараметрическое семейство подпространств с уравнениями

$$u_1=0,\ u_2=0,\ u_3u_4-\alpha\alpha'(u_5)^2=0. \tag{1.12}$$

Такое семейство называется здесь *касательным конусом* (луч является его вершиной) *второго класса* в том смысле, что через каждую точку пространства проходят два подпространства многообразия (1.12). Таким образом, *с каждым лучом многообразия M_2 связывается единственный касательный конус, которому принадлежат касательные подпространства всех линейчатых поверхностей, проходящих через этот луч.*

Как мы видели, фиксация репера до сих пор связывалась с линейчатыми поверхностями $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$, которые еще могут быть произвольными в многообразии M_2. Следовательно, точки A_1 и A_2 на луче могут передвигаться с изменением линейчатых поверхностей $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$.

§ 2. Сопряженность двух линейчатых поверхностей

Три квадратичные дифференциальные формы. Многообразие прямых M_2 пространства отображается в двумерное подмногообразие m_2 грассманова многообразия Ω (1, 4) девятимерного пространства P_9. Касательная плоскость многообразия m_2 в точке $\overline{12}$ согласно (1.2) и (1.10) определяется тремя точками

$$(\overline{12},\ \overline{14}-\alpha\,\overline{25},\ \overline{23}-\alpha'\overline{15}). \tag{2.1}$$

Эта плоскость в общем случае имеет только одну (двойную) общую точку (точку $\overline{12}$) многообразием Ω (1, 4), ибо двумерная плоскость с шестимерным грассмановым многообразием Ω (1, 4) в P_9 может даже не иметь ни одной общей точки, но у нас, в силу условий поставленной задачи, точка $\overline{12}$ находится в плоскости (2.1). Для того, чтобы плоскость содержала и другие точки грассманова многообразия Ω (1, 4), необходимо и достаточно присутствие таких точек p на плоскости (2.1), координаты которых удовлетворяют $\varphi_i(pp)=0$. Это требование равносильно условиям $\varphi_i(d\,\overline{12},\ d\,\overline{12})=0$, которые в силу (1.10) приводят к трем уравнениям

$$\Phi_1\equiv\omega_1^3\omega_2^4=0,\ \Phi_2=\alpha'(\omega_1^3)^2=0,\ \Phi_3=\alpha(\omega_2^4)^2=0. \tag{2.2}$$

Эта система допускает решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов форм Φ_i

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \alpha' & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

ниже трех. Каждое решение системы (2.2) определяет некоторое направление $\omega_2^4:\omega_1^3$ на многообразии m_2, которое огибает некоторую линию l этого многообразия[1]. Но так как прямая с грассмановым многообразием может пересекаться не более, чем в двух точках, то наличие трех точек пересечения означает, что прямая принадлежит к Ω (1, 4). Следовательно, линия l представляет некоторую развертывающуюся поверхность многообразия M_2 пространства P_4.

Таким образом, *если ранг матрицы (2.3) равен трем, то многообразие M_2 не имеет развертывающихся поверхностей (представляет нефокальное многообразие прямых), если ранг той же матрицы равен двум, то многообразие M_2 обладает одной серией развертывающихся поверхностей и, наконец, если ранг матрицы (2.3) равен единице, то многообразие обладает двумя семействами развертывающихся поверхностей (обладает двумя фокальными поверхностями).*

Многообразие всех прямых пространства P_4, пересекающихся с данной прямой $\overline{12}$, является шубертовым многообразием вида Ω_{14} (см. [4], т. II, стр. 340—424). Эти прямые на Ω (1, 4) представляются всеми точками некоторого конуса с вершиной в точке $\overline{12}$. Образующие этого конуса совпадают со всеми образующими Ω (1, 4), выходящими из точки $\overline{12}$ (поэтому конус называется *асимптотическим*). Методами алгебраической геометрии [4] легко установить, что *размерность асимптотического конуса равна четырем, а порядок — трем.* Асимптотический конус лежит в касательном шестимерном подпространстве многообразия Ω (1, 4) и с общей двумерной плоскостью этого подпространства пересекается в трех точках.

В настоящей работе мы больше уделяем внимания на нефокальные (т. е. наиболее общие) многообразия M_2.

Сопряженные направления на Ω (1, 4). Как известно, многообразие Ω (1, 4) является пересечением трех гиперквадрик в P_9. Каждая такая гиперквадрика устанавливает некоторый поляритет (точка ↔ полярная гиперплоскость). Три полярные (относительно этих трех гиперквадрик) гиперплоскости одной и той же точки x пересекаются по некоторому шестимерному подпространству L_6.

Таким образом, *грассманово многообразие Ω (1, 4) в P_9 порождает поляритет, согласно которому каждой общей точке соответствует определенное шестимерное полярное подпространство, каждой общей прямой соответствует определенное трехмерное полярное подпространство и каждой общей плоскости соответствует некоторая полярная точка.*

---

[1] Касательная шестимерная плоскость многообразия Ω (1, 4) в точке $\overline{12}$ определяется точками $(\overline{12}\cdot\overline{23}\cdot\overline{24}\cdot\overline{25}\cdot\overline{13}\cdot\overline{14}\cdot\overline{15})$. Нетрудно заметить, что в силу (2.2) грассманово произведение $(d^2\,\overline{12}\cdot\overline{12}\cdot\overline{13}\cdot\overline{14}\cdot\overline{15}\cdot\overline{23}\cdot\overline{24}\cdot\overline{25})$ обращается в нуль, а это означает, что линия l асимптотическая для Ω (1, 4), т. е. три ее бесконечно близкие точки принадлежат к Ω (1, 4).

Очевидно, что если одно из этих подпространств инцидентно точке касания и касательной 6-плоскости многообразия $\Omega(1, 4)$, то его полярное подпространство также удовлетворяет этому требованию. Такие направления называются *сопряженными* в полярном $\Omega(1, 4)$ и определяются тремя полярными формами, присоединенными к трем квадратичным формам Φ_i.

Асимптотические (самосопряженные) направления многообразия $\Omega(1, 4)$ совпадают с образующими прямыми асимптотического конуса. Легко заметить, что *два направления на $\Omega(1, 4)$ являются сопряженными тогда и только тогда, когда они гармонически разделяются двумя образующими асимптотического конуса.* Таким образом, плоскость, определяемая двумя сопряженными направлениями, обязательно пересекается с асимптотическим конусом по двум прямым и, следовательно, поверхность (m_2), которой принадлежат сопряженные направления, представляет фокальное семейство прямых, т. е.—конгруэнцию. Итак, *из всех двупараметрических семейств прямых пространства P_4 только конгруэнция обладает сопряженными направлениями.*

Теперь выясним геометрический смысл двух линейчатых поверхностей l и l' с общей образующей прямой, отображения которых в P_9 имеют сопряженные (одно с другим) направления.

Пусть линейчатые поверхности l и l', которые, вообще говоря, могут не принадлежать к многообразию M_2, описаны ребром A_1A_2 репера. Чтобы определить эти линейчатые поверхности, достаточно для каждой из них дать отношения главных форм ребра

$$\frac{\omega_1^3}{a_1}=\frac{\omega_2^4}{a_2}=\frac{\omega_2^3}{a_3}=\frac{\omega_1^4}{a_4}=\frac{\omega_1^5}{a_5}=\frac{\omega_2^5}{a_6},\quad \frac{\omega_1^3}{b_1}=\frac{\omega_2^4}{b_2}=\frac{\omega_2^3}{b_3}=\frac{\omega_1^4}{b_4}=\frac{\omega_1^5}{b_5}=\frac{\omega_2^5}{b_6}.$$

Параметры a_i и b_i определяют соответственно первые и вторые линейчатые поверхности. Не нарушая общности, мы можем координатный репер выбрать так, чтобы первая линейчатая поверхность определялась уравнениями $a_2\omega_1^3=a_1\omega_2^4$, $\omega_2^3=\omega_1^4=\omega_2^5=\omega_1^5=0$, тогда из форм $\Phi_i^{(1)}$ получим условие сопряженности линейчатых поверхностей l и l' в виде

$$b_5=b_6=0,\quad a_1b_2-b_1a_2=0.$$

Касательная плоскость поверхности l в точке $A_1+\rho A_2$ определяется тремя точками $(A_1, A_2, A_2+\rho A_3)$. Она является одновременно касательной плоскостью линейчатой поверхности l' в точке $A_1+\rho' A_2$, если $\rho\rho' a_2b_3-a_1b_2(\rho+\rho')-a_1b_4=0$. Это уравнение допускает замену ρ на ρ', которое означает, что если касательная плоскость поверхности l в точке $A_1+\rho A_2$ совпадает с касательной плоскостью поверхности l в точке $A_1+\rho' A_2$, то касательная плоскость поверхности l в

[1] В общем случае формы Φ_i имеют вид

$$\Phi_1=\omega_1^3\omega_2^4-\omega_1^4\omega_2^3,\quad \Phi_2=\omega_1^3\omega_2^5-\omega_1^5\omega_2^3,\quad \Phi_3=\omega_1^4\omega_2^5-\omega_1^5\omega_2^4.$$

точке $A_1+\rho' A_2$ совпадает с касательной плоскостью поверхности l' в точке $A_1+\rho A_2$. Точки $A_1+\rho A_2$ и $A_1+\rho' A_2$ в этом случае называются *сопряженными* относительно двух сопряженных линейчатых поверхностей l и l'. Очевидно, что все точки луча A_1A_2 разбиваются на пары сопряженных точек для каждой пары сопряженных l и l'. Обратное утверждение также справедливо, а именно если две линейчатые поверхности l и l' имеют общую образующую и две их касательные плоскости в каждой точке образующей совпадают в обратном порядке с касательными плоскостями тех же поверхностей в другой точке той же образующей, то эти линейчатые поверхности сопряжены друг с другом, т. е. их отображения в P_9 имеют сопряженные направления на Ω (1, 4). Таким образом, *отображения двух линейчатых поверхностей на Ω (1, 4) имеют сопряженные направления тогда и только тогда, когда касательная плоскость первой поверхности в каждой точке F общей образующей и касательная плоскость второй поверхности в той же точке касаются соответственно ко второй и к первой линейчатым поверхностям в некоторой другой точке F' той же образующей.* Соответствие $(F)\to(F')$ является инволюцией, две неподвижные точки которой называются фокусами луча A_1A_2.

Плоскость, проходящая через два сопряженные направления на Ω (1, 4), содержит две, проходящие через эту точку, образующие прямые многообразия Ω (1, 4). Эти две пары направлений гармонически разделяют друг друга и этим свойством характеризуется пара сопряженных направлений.

Очевидно, что многообразие прямых M_2 в общем случае [когда ранг матрицы (2.3) равен трем] не содержит сопряженных линейчатых поверхностей, ибо плоскость (2.1) не содержит образующих многообразия Ω (1, 4).

§ 3. Касательные линейные многообразия плоскостей

Касательное четырехмерное линейное многообразие плоскостей линейчатой поверхности. Найдем многообразие всех плоскостей, пересекающихся с двумя бесконечно-близкими лучами линейчатой поверхности $\omega_2^4=\lambda\omega_1^3$ многообразия M_2. Если a_{ik} дуальные грассмановы координаты текущей плоскости, то они должны подчиняться двум условиям

$$a_{12}=0, \quad -a_{23}-\lambda a a_{25}+\lambda a_{14}+\alpha' a_{15}=0, \tag{3.1}$$

ибо условие пересечения плоскости a_{ik} и прямой $\overline{ik}$ ($\overline{ik}$ — грассмановы координаты прямой), как известно [2], пишется в виде $a_{ik}\overline{ik}=0$. Согласно требованию общей задачи плоскость a_{ik} должна пересекаться с двумя прямыми $\overline{12}$ и $d\,\overline{12}\ (\mathrm{mod}\ \omega_2^4-\lambda\omega_1^3)$, что приводит к равенствам (3.1). Так как плоскость a_{ik} имеет десять координат, которые удовлетворяют пяти квадратичным соотношениям

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(aa) &\equiv a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0,\\
\varphi_2(aa) &\equiv a_{12}a_{35} - a_{13}a_{25} + a_{15}a_{23} = 0,\\
\varphi_3(aa) &\equiv a_{12}a_{45} - a_{14}a_{25} + a_{15}a_{24} = 0,\\
\varphi_4(aa) &\equiv a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34} = 0,\\
\varphi_5(aa) &\equiv a_{13}a_{45} - a_{14}a_{34} + a_{15}a_{34} = 0,
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

из которых независимыми являются только три, то система двух линейных уравнений (3.1) выделяет некоторое линейное четырехмерное многообразие плоскостей, которое здесь называется *касательным многообразием* Π_4 *линейчатой поверхности.*

Как известно [2], система (3.1) порождает нуль-систему (гиперплоскость $\leftrightarrow$ точка)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -u_2, & y_1 &= -\lambda u_4 - \alpha' u_5\\
x_2 &= u_1, & y_2 &= u_3 + \lambda\alpha u_5,\\
x_3 &= 0, & y_3 &= -u_2\\
x_4 &= 0, & y_4 &= \lambda u_1,\\
x_5 &= 0, & y_5 &= -\lambda\alpha u_2 + \alpha' u_1,
\end{aligned}
\qquad \text{где} \qquad
\begin{aligned}
&a_{ik} = u_i v_k - u_k v_i,\\
&\Sigma v_i x_i = \Sigma v_i y_i = 0,
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

согласно которой в каждом трехмерном подпространстве лежит пучок плоскостей многообразия Π_4. Так как каждое линейное многообразие прямых или плоскостей в P_4 обладает особыми алгебраическими многообразиями [2], то многообразие Π_4 также обладает этим свойством. Если плоскости Π_4 удовлетворяют уравнениям (3.1), то они удовлетворяют также уравнению вида $a_{12} + t(\lambda a_{14} + \alpha' a_{15} - a_{23} - \lambda\alpha a_{25}) = 0$ для всевозможных значений t. Нуль-система, порожденная этим уравнением, имеет одно особое трехмерное подпространство, зависящее от t. Следовательно, геометрическое место этих подпространств является их некоторым однопараметрическим семейством. Но, как было доказано в [2], это семейство может стать двупараметрическим тогда и только тогда, когда последнее уравнение для некоторого t определяет особое пятимерное многообразие плоскостей (все плоскости, пересекающие неподвижную прямую), т. е. когда коэффициенты этого уравнения для некоторого t являются грассмановыми координатами некоторой прямой. Нетрудно заметить, что формы φ_i от этих коэффициентов имеют вид $\varphi_1 = -\lambda t^2$, $\varphi_2 = -\alpha' t^2$, $\varphi_3 = \alpha\lambda t^2$, $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0$, т. е. для $t = 0$ мы имеем две совпавшие (с прямой $\overline{12}$) прямые, с которыми пересекаются все плоскости многообразия Π_4.

Таким образом, *с каждым лучом линейчатой поверхности пространства* P_4 *однозначно связывается некоторое четырехмерное линейное многообразие плоскостей* Π_4. *Это многообразие порождает нуль-систему* (3.3) *согласно которой в каждом трехмерном подпространстве лежит пучок плоскостей многообразия* Π_4. *Исключение составляют трехмерные подпространства, инцидентные* *с лучом линейчатой поверхности. В каждом таком подпространстве лежит двумерный пучок плоскостей (т. е. лежат плоскости, проходящие через некоторую точку луча) многообразия* Π_4. *Все плоскости касательного подпространства линейчатой поверхности принадлежат к* Π_4.

Из (3.3) нетрудно заметить, что центр двумерного пучка плоскостей, инцидентного подпространству $A_1A_2A_3A_4$ в нуль-системе, порожденной линейчатой поверхностью $\omega_2^4=0$, совпадает с точкой A_1. Тоже самое справедливо для точки A_2 и линейчатой поверхности $\omega_1^3=0$.

Касательное трехмерное линейное многообразие плоскостей многообразия M_2. В [2] было доказано, что каждой плоскости девятимерного пространства P_9 соответствует некоторое линейное трехмерное многообразие плоскостей Π_3 в P_4. Следовательно, касательная плоскость (11) многообразия m_2 в P_9 порождает такое многообразие.

Если a_{ik} грассмановы координаты текущей плоскости многообразия Π_3, то согласно (2.1) они удовлетворяют кроме (3.2) еще трем уравнениям

$$a_{12}=0,\ a_{14}-\alpha a_{25}=0,\ a_{23}-\alpha' a_{15}=0. \tag{3.4}$$

Как известно [2], общее многообразие плоскостей Π_3 порождает нуль-систему, согласно которой в каждом трехмерном подпространстве лежит только одна плоскость многообразия Π_3. Исключение составляют лишь те подпространства, которые принадлежат к особому двумерному многообразию подпространств. В каждом таком подпространстве лежит пучок плоскостей многообразия Π_3.

В нашем случае нуль-система определяется системой

$$\begin{aligned}
&x_1=-u_2, && y_1=-\alpha' u_5, && z_1=-u_4,\\
&x_2=u_1, && y_2=u_3, && z_2=\alpha u_5,\\
&x_3=0, && y_3=-u_2, && z_3=0,\\
&x_4=0, && y_4=0, && z_4=u_1,\\
&x_5=0, && y_5=\alpha' u_1, && z_5=-\alpha u_2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Три точки x, y, z определяют единственную плоскость многообразия Π_3, лежащую в подпространстве u_i. Сложив правые части столбцов (3.5), предварительно умножив второй столбец на t, третий — на s, и приравняв полученные суммы нулю, получим кососимметричную систему относительно неизвестных u_i

$$\begin{aligned}
&u_2+su_4+t\alpha' u_5=0, \quad tu_2=0, \quad su_1=0,\\
&u_1+tu_3+s\alpha u_5=0, \quad t\alpha' u_1-s\alpha u_2=0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Из этой системы, после исключения t и s, получим уравнения особого многообразия $u_1=0$, $u_2=0$. Следовательно, *особое многообразие есть совокупность всех гиперплоскостей, пересекающих луч мно-*

гообразия M_2. Среди этой совокупности выделяется однопараметрическое семейство гиперплоскостей с уравнениями

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 u_4 - \alpha\alpha' (u_5)^2 = 0, \tag{3.7}$$

которое соответствует всем отличным от нуля значениям t и s. Как известно, уравнения (3.7) представляют касательный конус второго класса многообразия M_2.

Ранг матрицы коэффициентов (3.6) равен двум тогда и только тогда, когда формы φ_i от этих коэффициентов равны нулю. Но эти формы имеют вид $\varphi_1 = ts$, $\varphi_2 = \alpha t^2$, $\varphi_3 = \alpha' s^2$, следовательно, они обращаются в нуль для значений $t = s = 0$ и эти коэффициенты становятся грассмановыми координатами прямой $\overline{12}$ [2].

Таким образом, *касательное трехмерное многообразие плоскостей многообразия* M_2 *устанавливает нуль-систему* (3.5), *особое многообразие которой совпадает с совокупностью всех гиперплоскостей проходящих через луч данного* M_2.

§ 4. Сложное отношение четырех линейчатых поверхностей многообразия M_2

Возьмем четыре линейчатые поверхности многообразия M_2 с уравнениями

$$\omega_2^4 = \lambda_i \omega_1^3; \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{4.1}$$

В пункте 1 было доказано, что с каждой точкой $A_1 + \rho A_2$ луча $A_1 A_2$ многообразия M_2 связывается единственное трехмерное касательное подпространство (1.7), которое теперь напишется в виде

$$(A_1, A_2, A_3 + \rho\alpha' A_5, \rho A_4 + \alpha A_5). \tag{4.2}$$

Следовательно, касательные плоскости поверхностей (4.1) в точке $A_1 + \rho A_2$ принадлежат к одному пучку и образуют сложное отношение. Нетрудно заметить, что это сложное отношение равно

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2} \tag{4.3}$$

и, следовательно, не зависит от точки касания.

Каждая линейчатая поверхность (4.1) представляется линией l_i на двумерном подмногообразии m_2 грассманова многообразия. Четыре касательные к линиям l_i лежат на касательной плоскости (2.1) поверхности m_2 и, следовательно, также образуют сложное отношение прямых. Прямой подсчет показывает, что это сложное отношение также равно выражению (4.3). Таким образом, *сложное отношение касательных плоскостей к четырем линейчатым поверхностям многообразия* M_2 *не зависит от положения общей точки касания на луче и равно сложному отношению четырех касательных к отображениям этих линейчатых поверхностей, принадлежащим девятимерному пространству.*

Очевидно, что эта теорема несправедлива для тех четырех линейчатых поверхностей, которые не принадлежат к многообразию M_2, ибо в этом случае четыре касательные к линиям l_i не принадлежат одной плоскости и, следовательно, не могут иметь сложного отношения.

§ 5. Фокальное многообразие M_2

Когда ранг матрицы (2.3) равен единице, т. е. когда $\alpha = \alpha' = 0$, то дифференциальная окрестность первого порядка луча многообразия M_2 принадлежит к трехмерному (касательному) подпространству $A_1A_2A_3A_4$. В этом случае получаем хорошо изученное многообразие прямых, которое называется конгруэнцией [3]. Мы здесь перечислим некоторые известные результаты (связанные с дифференциальной окрестностью 1-го порядка) для того, чтобы потом их автоматически повторить по принципу двойственности для фокального двупараметрического семейства плоскостей, совпадающего, как мы увидим, с многообразием касательных плоскостей некоторой поверхности в P_4.

(I) Дифференциальная окрестность первого порядка луча конгруэнции лежит в трехмерном касательном подпространстве. (II) На каждом луче имеются два фокуса, которые описывают две фокальные поверхности конгруэнций. Луч конгруэнции касается этих фокальных поверхностей в фокусах. (III) В конгруэнции существуют два направления, вдоль которых луч пересекается со своим бесконечно-близким лучом. Эти направления определяют две развертывающиеся поверхности конгруэнции. (IV) Каждой линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ сопряжена другая линейчатая поверхность $\omega_2^4 = -\lambda\omega_1^3$ той же конгруэнции [1].

Некоторые из теорем, указанные в предыдущих пунктах, как легко заметить, теряют силу для конгруэнции прямых.

§ 6. Двойственные результаты окрестности первого порядка многообразия M_2

По принципу двойственности четырехмерного проективного пространства полученные результаты можно повторить для двумерного многообразия плоскостей N_2, во всех формулировках переставляя слова точка — гиперплоскость, прямая — плоскость.

1) Каждая точка M пространства P_4 выражается относительно координатного репера A_i в виде

$$M = x^i A_i$$

где x^i являются точечными координатами точки M относительно репера A_i.

1) Каждая гиперплоскость пространства P_4 выражается относительно координатного дуального репера a_i в виде

$$m = X^i a_i$$

где X^i являются дуальными координатами гиперплоскости m относительно репера a_i.

2) Инфинитезимальное точечное преобразование репера A_i определяется уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k.$$

3) Двупараметрическое семейство прямых M_2 (M_2 описывается лучом A_1A_2) оснащается подвижным репером A_i, характеризуемым уравнениями

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0,\ \omega_1^5 = \alpha\omega_2^4,\ \omega_2^5 = \alpha'\omega_1^3.$$

4) С каждым лучом линейчатой поверхности связывается единственное касательное трехмерное подпространство (A_1, A_2, $\lambda A_1 + \alpha' A_5$, $A_2 + \alpha\lambda A_5$) в котором лежат два бесконечно-близких луча линейчатой поверхности.

5) С каждой точкой луча линейчатой поверхности связывается единственная касательная плоскость. Все касательные плоскости вдоль одного и того луча проходят через этот луч и принадлежат к касательному трехмерному подпространству.

6) С каждой точкой $A_1 + \rho A_2$ луча многообразия M_2 ассоциируется единственное касательное трехмерное подпространство (A_1, A_2, $A_3 + \rho\alpha' A_5$, $\rho A_4 + \alpha A_5$) в котором лежат касательные (в этой точке) плоскости всевозможных линейчатых поверхностей многообразия M_2.

7) С каждой линейчатой поверхностью $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ связывается единственная точка $A_1 + \rho A_2$ (фокус данной линейчатой поверх-

2) Инфинитезимальное дуальное преобразование репера a_i определяется уравнениями

$$da_i = \Omega_i^k a_k.$$

3) Двупараметрическое семейство плоскостей N_2 (N_2 описывается плоскостью a_1a_2, т. е. $A_3A_4A_5$) оснащается подвижным репером a_i, характеризуемым уравнениями

$$\Omega_1^4 = \Omega_2^3 = 0,\ \Omega_1^5 = \alpha\Omega_2^4,\ \Omega_2^5 = \alpha'\Omega_1^3.$$

4) С каждой плоскостью однопараметрического семейства плоскостей N_1 связывается единственная точка *(фокус)* (a_1, a_2, $\lambda a_4 + \alpha' a_5$, $a_3 + \alpha\lambda a_5$) в которой пересекаются две бесконечно-близкие плоскости многообразия N_1. Геометрическое место этих точек является некоторой линией, называемой фокальной линией многообразия N_1.

5) С каждой гиперплоскостью (инцидентной плоскости многообразия N_1) связывается единственная *фокальная прямая*. Все фокальные прямые вдоль одной и той же плоскости принадлежат этой плоскости и проходят через фокальную точку. Таким образом в каждой плоскости семейства N_1 лежит *пучок фокальных прямых*.

6) С каждой гиперплоскостью $a_1 + \rho a_2$, инцидентной с плоскостью многообразия N_2, ассоциируется единственная точка (*фокус*) (a_1, a_2, $a_3 + \rho\alpha' a_5$, $\rho a_4 + \alpha a_5$) через которую проходят фокальные (в этой гиперплоскости) прямые всевозможных семейств N_1 многообразия N_2.

7) С каждым многообразием $\Omega_2^4 = \lambda\Omega_1^3$ связывается единственное трехмерное подпространство $a_1 + \rho a_2$, называемое ка-

ности), определяемая уравнением $\alpha'\rho = \alpha\lambda$ и обладающая тем свойством, что касательное трехмерное подпространство многообразия M_2 в этой точке совпадает с касательным подпространством данной линейчатой поверхности.

8) Две линейчатые поверхности с общей образующей сопряжены тогда и только тогда, когда касательная плоскость первой поверхности в каждой точке F общей образующей и касательная плоскость второй поверхности в той же точке касаются соответственно ко второй и к первой линейчатым поверхностям в некоторой другой точке F' той же образующей.

9) С каждым лучом линейчатой поверхности связывается определенное касательное линейное многообразие плоскостей Π_4 с уравнениями

$$a_{12} = 0, \ a_{23} + \lambda\alpha a_{25} - \lambda a_{14} - \alpha' a_{15} = 0,$$

которое порождает нуль-систему

$$\begin{aligned} x_1 &= -u_2, & y_1 &= -\lambda u_4 - \alpha' u_5, \\ x_2 &= u_1 & y_2 &= u_3 + \lambda\alpha u_5, \\ x_3 &= 0, & y_3 &= -u_2, \\ x_4 &= 0, & y_4 &= \lambda u_1, \\ x_5 &= 0, & y_5 &= -\lambda\alpha u_2 + \alpha' u_1, \end{aligned}$$

согласно которой в каждом трехмерном подпространстве u_i лежит пучок плоскостей многообразия Π_4. Исключение составляют гиперплоскости, инцидентные с данным лучом линейчатой поверхности. В каждой такой гиперплоскости лежит двумерный пу-

сательной гиперплоскостью многообразия N_1, которое определяется уравнением $\alpha'\rho = \alpha\lambda$ и обладает тем свойством, что фокус многообразия N_2 в этом подпространстве совпадает с фокальной точкой данного многообразия плоскостей N_1.

8) Два многообразия N_1 и N_1' с общей плоскостью сопряжены тогда и только тогда, когда фокальная прямая первого многообразия N_1 в каждой гиперплоскости f общей плоскости и фокальная прямая второго многообразия N_1' в той же гиперплоскости являются фокальными прямыми соответственно для второго и первого многообразий в некоторой другой гиперплоскости f', инцидентной с общей плоскостью.

9) С каждой плоскостью многообразия N_1 связывается определенное касательное линейное многообразие прямых L_4 с уравнениями

$$A_{12} = 0, \ A_{23} + \lambda\alpha A_{25} - \lambda A_{14} - \alpha' A_{15} = 0,$$

где A_{ik} — грассмановы координаты текущей прямой многообразия L_4. Это многообразие порождает нуль-систему

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_2, & v_1 &= -\lambda x_4 - \alpha' x_5, \\ u_2 &= x_1, & v_2 &= x_3 + \lambda\alpha x_5, \\ u_3 &= 0, & v_3 &= -x_2, \\ u_4 &= 0, & v_4 &= \lambda x_1, \\ u_5 &= 0, & v_5 &= -\lambda\alpha x_2 + \alpha' x_1, \end{aligned}$$

сосласно которой через каждую точку x_i проходит пучок прямых многообразия L_4. Исключение составляют точки, инцидентные с данной плоскостью многообразия N_1. Через каждую тачок плоскостей (плоскости, проходящие через некоторую точку луча) многообразия Π_4. Все плоскости касательного подпространства линейчатой поверхности принадлежат к Π_4.

10) С каждым лучом многообразия M_2 связывается единственное касательное линейное многообразие плоскостей Π_3, удовлетворяющее уравнениям

$$a_{12}=0,\ a_{14}-\alpha a_{23}=0,$$
$$a_{24}-\alpha' a_{15}=0.$$

Оно порождает нуль-систему

$$\begin{aligned} &x_1=-u_2, && y_1=-\alpha' u_5, && z_1=-u_4,\\ &x_2=u_1, && y_2=u_3, && z_2=\alpha u_5,\\ &x_3=0, && y_3=-u_2, && z_3=0,\\ &x_4=0, && y_4=0, && z_4=u_1,\\ &x_5=0, && y_5=\alpha' u_1, && z_5=\alpha u_2, \end{aligned}$$

согласно которой в каждой гиперплоскости u_i находится единственная плоскость (xyz). Исключение составляют только гиперплоскости, проходящие через луч многообразия M_2.

11) Однопараметрическое семейство касательных трехмерных подпространств всех линейчатых поверхностей (проходящих через данный луч) многообразия M_2 образует конус второго класса с вершиной, совпадающей с данным лучом многообразия. Уравнения этого конуса имеют вид

$$u_1=0,\ u_2=0,\ u_3u_4-\alpha\alpha'(u_5)^2=0.$$

кую точку проходит двумерный пучок прямых (связка в P_3) многообразия L_4. Все прямые фокальной точки многообразия N_1 принадлежат к L_4.

10) С каждой плоскостью многообразия N_2 связывается единственное касательное линейное многообразие прямых L_3, удовлетворяющее уравнениям

$$A_{12}=0,\ A_{14}-\alpha A_{25}=0,$$
$$A_{23}-\alpha' A_{25}=0,$$

где A_{ik} — грассмановы координаты текущей прямой многообразия L_3. Многообразие L_3 порождает нуль-систему

$$\begin{aligned} &u_1=-x_2, && v_1=-\alpha' x_5, && w_1=-x_4,\\ &u_2=x_1, && v_2=x_3, && w_2=\alpha x_5,\\ &u_3=0, && v_3=-x_2, && w_3=0,\\ &u_4=0, && v_4=0, && w_4=x_1,\\ &u_5=0, && v_5=\alpha' x_1, && w_5=-\alpha x_2, \end{aligned}$$

согласно которой через каждую точку x_i проходит единственная прямая (uvw). Исключение составляют только точки, принадлежащие плоскости многообразия N_2.

11) Однопараметрическое семейство фокусов всех подмногообразий N_1 (проходящих через данную плоскость) многообразия N_2 образует фокальную кривую второго порядка, лежащую на данной плоскости многообразия N_2. Уравнения этой кривой имеют вид

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3x_4-\alpha\alpha'(x_5)^2=0.$$

Каждое семейство (проходящее через a_1a_2) имеет одну фокальную точку на этой кривой. Через каждую фокальную точку проходит пучок фокальных прямых семейства N_1, соответствующих различным гиперплоскостям $a_1+\rho a_2$. Если взять фокальные прямые четырех семейств N_i, соответствующие одной и той же гиперплоскости $a_1+\rho a_2$, то они обязательно образуют пучок на (a_1a_2) с центром в некоторой точке фокальной кривой второго порядка, так как их двойственные образы принадлежат одной гиперплоскости, проходящей через луч A_1A_2.

Сложное отношение этих четырех прямых здесь (согласно принципу двойственности) называется *сложным отношением четырех однопараметрических семейств плоскостей* N_i, соответствующих гиперплоскости $a_1+\rho a_2$. Таким образом

12) Сложное отношение четырех линейчатых поверхностей

$$\omega_2^4=\lambda_i\omega_1^3 \text{ равно } \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}$$

и, следовательно, не зависит от положения точки касания $A_1+\rho A_2$.

12) Сложное отношение четырех однопараметрических семейств плоскостей

$$\Omega_2^4=\lambda_i\Omega_1^3 \text{ равно } \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}$$

и, следовательно, не зависит от положения соответствующей общей гиперплоскости $a_1+\rho a_2$.

Последний результат находится в согласии с теоремой из аналитической геометрии: если некоторую точку кривой второго порядка соединить прямыми с четырьмя фиксированными точками той же кривой, то сложное отношение этих прямых не зависит от положения центра этого пучка.

Очевидно, что только те четыре однопараметрические семейства плоскостей могут обладать сложным отношением, которые принадлежат некоторому двупараметрическому семейству плоскостей N_2 и имеют общую плоскость.

§ 7. Двойственные результаты фокальных многообразий M_2 (теория двумерных поверхностей в P_4)

До сих пор мы рассматривали только наиболее общее многообразие прямых M_2, т. е. полагали, что ранг матрицы (2.3) равен трем. Оставляя в стороне менее интересный случай, когда ранг той же матрицы равен двум (в этом случае каждый луч многообразия имеет один фокус), мы здесь рассматриваем случай, когда многообразие M_2 является конгруэнцией (ранг равен единице) и перечисляем результаты для двойственных ему образов. Прежде всего докажем теорему. *Двойственный образ конгруэнции прямых в P_4 является многообразием всех касательных плоскостей некоторой двумерной поверхности, и наоборот.* Действительно, конгруэнция характеризуется уравнениями

$$\alpha=\alpha'=0. \tag{7.1}$$

Из (1.2) вытекает, что дифференциальная окрестность первого порядка луча $\overline{12}$ принадлежит к трехмерному подпространству тогда и только тогда, когда выполняются условия (7.1). Следовательно, двойственный образ конгруэнции есть двумерное многообразие таких плоскостей (a_1a_2), дифференциальная окрестность первого порядка каждой из которых принадлежит некоторой точке. Геометрическое место этих точек дает некоторую поверхность, огибающую все плоскости многообразия. В справедливости этой теоремы можно убедиться также непосредственным подсчетом. Так как $(a_1a_2) = (A_3A_4A_5)$, то, дифференцируя и сравнивая формы в различных частях уравнения, получим $\omega_5^1 = 0$, $\omega_5^2 = 0$. Это означает, что точка A_5 описывает поверхность, касательная плоскость которой совпадает с плоскостью $A_3A_4A_5$.

Известно много фактов, связанных как с конгруэнцией, так и с двумерными поверхностями пространства P_4. Мы перечислим эти факты вместе с их двойственными результатами.

1) Дифференциальная окрестность первого порядка каждого луча (A_1A_2) конгруэнции принадлежит касательной гиперплоскости $A_1A_2A_3A_4$. Геометрическое место этих гиперплоскостей является их двупараметрическим семейством, называемым касательным семейством конгруэнции.	1) Дифференциальная окрестность первого порядка каждой плоскости фокального многообразия N_2 принадлежит фокальной точке $(a_1a_2a_3a_4)$. Геометрическое место этих точек является их двупараметрическим семейством (поверхностью), называемым фокальной поверхностью или огибающей семейства плоскостей N_2.
2) На каждом луче A_1A_2 конгруэнции имеются два фокуса A_1 и A_2, которые описывают две фокальные поверхности конгруэнции. Касательные плоскости этих поверхностей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ проходят через луч A_1A_2 конгруэнции.	2) Через каждую касательную плоскость a_1a_2 поверхности x_2 проходят две касательные гиперплоскости a_1 и a_2, которые описывают два ∞^2 касательных семейства. Фокальные прямые $a_1a_2a_3$ и $a_1a_2a_4$ этих семейств находятся на касательной плоскости данной поверхности x_2.

Развертывающиеся поверхности в конгруэнции, как известно, соответствуют таким смещениям, по которым луч $\overline{12}$ конгруэнции пересекается со своим бесконечно-близким лучом, т. е. эти прямые лежат в одной плоскости (фокальной). По принципу двойственности на x_2 этим смещениям соответствуют такие направления, вдоль которых касательная плоскость со своей бесконечно-близкой касательной плоскостью лежат в одном трехмерном подпространстве, т. е. эти плоскости пересекаются по прямой (фокальной). Эти два направления, как известно, определяют единственную сопряженную сеть на x_2.

Таким образом, *развертывающимся поверхностям конгруэнции по принципу двойственности соответствуют те однопараметрические семейства касательных плоскостей, которые касаются поверхности x_2 по сопряженным линиям. Следовательно, фокальные прямые на поверхности x_2 имеют сопряженные направления.*

Без особого труда отсюда вытекает, что *последовательность Лапласа, порожденная конгруэнцией, двойственна с последовательностью Лапласа поверхности x_2.*

Ассоциированные направления на поверхности x_2. Выше, с помощью сопряженных направлений на Ω (1, 4) мы установили сопряженность двух пересекающихся (по общей образующей) линейчатых поверхностей и по принципу двойственности перенесли это понятие для двух ∞^1 семейств плоскостей N_1 и N_1'. На дуальном грассмановом многообразии Ω (2, 4) семействам N_1 и N_1' соответствуют две кривые, которые в общей точке пересечения имеют сопряженные направления, т. е. касательные к этим кривым гармонически разделяют пару образующих прямых асимптотического конуса. Это означает, что *из всех ∞^2 семейств плоскостей пространства P_3 только то семейство допускает сопряженные подсемейства, которое является геометрическим местом касательных плоскостей некоторой поверхности.* Линии, по которым эти подсемейства касаются поверхности x_2, определяют два направления в данной точке поверхности x_2, называемые *ассоциированными направлениями*. Сеть кривых, имеющих в каждой точке поверхности x_2 ассоциированные направления, называется *ассоциированной сетью*. Одно семейство этой сети можно задать произвольно, тогда второе семейство определяется однозначно. *Единственная пара сопряженных направлений в каждой точке поверхности x_2 гармонически разделяет все ассоциированные пары направлений.*

Здесь мы дадим еще одно характеризующее свойство ассоциированных линий поверхности x_2. Касательные плоскости в точках этих линий, как сказано было выше, образуют два однопараметрические семейства плоскостей, фокальные линии которых совпадают с ассоциированными линиями на x_2. Так как отображения этих (и только этих) семейств в P_3 имеют сопряженные направления на Ω (2, 4), то по этой причине такие два семейства называем сопряженными. В общей плоскости эти два семейства должны иметь совпавшие друг с другом фокусы $(a_1a_2a_3a_4)$, которые одновременно совпадают с той точкой поверхности x_2, в которой общая плоскость двух семейств касается x_2. Но так как через каждый фокус плоскости (a_1a_2) однопараметрического семейства плоскостей проходит пучок фокальных прямых данного семейства, соответствующих различным гиперплоскостям $a_1 + \rho a_2$, то в общем фокусе мы будем иметь два пучка прямых, лежащих в общей плоскости двух ∞^1 семейств плоскостей. Между прямыми этих двух пучков устанавливается проективное соответствие (две прямые из разных пучков соответствуют друг другу в этом проективитете, если они соответствуют одному и тому же значению ρ). Согласно принципу двойственности эти два семейства плоскостей сопряжены тогда и только тогда, когда последнее проективное соответствие является инволюцией.

Таким образом, *два однопараметрические семейства плоскостей являются сопряженными друг с другом (или, что тоже самое, их фокальные линии являются ассоциированными друг с другом) тогда и только тогда, когда 1) фокусы их общей плоскости совпадают и 2) проективитет, установленный между двумя фокальными пучками прямых, является инволюцией.*

Армянский педагогический институт
имени Х. Абовяна.
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 VI 1961

Ս. Է. Կարապետյան

ՔԱՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՉԱՓ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննարկված են քառաչափ տարածության ուղիղների և հարթությունների երկչափ ընտանիքների շոշափող գծային բազմաձևությունները և վերջինների գոյության սխեմաները:

Երկվության սկզբունքի համաձայն, այդ արդյունքները կիրառված են հարթությունների ընտանիքների համար: Որպես մասնավոր դեպք, ստացված է հարթությունների այնպիսի ընտանիք, որը պարուրում է մի երկչափ մակերևույթ P_4-ում: Այդպիսի մակերևույթների վրա հայտնաբերված են գծերի նոր ընտանիքներ, որոնք աշխատության մեջ անվանված են ինվոլյուցիոն ցանցեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян С. Е.* Сопряженные многообразия и их приложения. ДАН СССР, **133**, № 5, 1960.
2. *Карапетян С. Е.* Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 1, 1962.
3. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
4. *Ходж В.* и *Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. ИЛ, т. I, II, М., 1954.
5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М.—Л., 1948.