

МАТЕМАТИКА

В. С. Виденский

Замечания к теореме В. А. Маркова о двух
многочленах, нули которых перемежаются

1. Если $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — алгебраические многочлены, все нули которых вещественны и перемежаются, то перемежаются нули производных этих многочленов $P'_n(x)$ и $Q'_n(x)$.

Эта глубокая теорема, принадлежащая В. А. Маркову [1], впоследствии привлекала внимание многих математиков, которые нашли новые ее доказательства, получили некоторые ее обобщения или аналоги (см. П. Монтель [2], Д. А. Граве [3], Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман [4], Т. Поповичу [5], Ф. Константинеску [6]).

Все эти весьма интересные работы касались лишь алгебраических многочленов и основывались на интерполяционной формуле Лагранжа. Между тем, теорема Маркова может быть существенно обобщена и распространена на случай двух непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, нули которых перемежаются, а любая линейная комбинация производных $\mu_1 f'(x) + \mu_2 \varphi'(x)$ ($\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$) имеет $\leq n$ нулей. Два различных доказательства упомянутой теоремы приведены в [7] и [8]. В отличие от алгебраического случая, в обоих доказательствах не фигурируют никакие специальные формулы, а используются лишь основные теоремы анализа и следующее простейшее соображение, представляющее собой некоторый вариант принципа Дирихле: если на m мест размещается несколько предметов, причем так, что на каждое место попадает не менее одного предмета и хотя бы на одно место попадает ≥ 2 предмета, то число всех предметов $\geq m - 1$. В работах [7—10] на обобщенную теорему В. А. Маркова опирается вывод некоторых экстремальных неравенств для производных от алгебраических и тригонометрических многочленов.

В настоящей статье обобщенная теорема Маркова применяется для исследования вопроса о взаимном расположении нулей тригонометрических многочленов, а также многочленов вида

$$a_0 e^{\lambda_0 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{\lambda_n x} \quad \text{или} \quad a_0 x^{\lambda_0} + a_1 x^{\lambda_1} + \dots + a_n x^{\lambda_n},$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ — произвольные вещественные числа. Применения, о которых идет речь, основаны на простом соображении: рассматриваются функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие условиям обобщенной теоремы Маркова, и выбирается такой положительный множитель

$M(x)$, что функции $M(x)f(x)$ и $M(x)\varphi(x)$ снова удовлетворяют условиям этой теоремы. Таким образом, в наших рассуждениях никакой особой роли не играет вид изучаемых многочленов, — существенны лишь те или иные их свойства, которые можно было бы высказать в общем виде. Однако, это сделало бы формулировки результатов слишком громоздкими и непрозрачными.

Для цельности изложения в следующем пункте приводится доказательство обобщенной теоремы Маркова, которое воспроизводит несколько подробнее доказательство, данное в заметке [7].

2. Теорема 1. Пусть на отрезке $[a, b]$ даны две непрерывно дифференцируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ n нулей $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, функция $\varphi(x)$ имеет на том же отрезке n нулей $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, которые перемежаются с нулями функции $f(x)$, то-есть

$$\alpha_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n < \alpha_n; \quad (1)$$

2) любая линейная комбинация $\mu_1 f'(x) + \mu_2 \varphi'(x)$ ($\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$) имеет на рассматриваемом отрезке $\leq n-1$ нулей.

Если $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ — нули $f'(x)$, а $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1}$ — нули $\varphi'(x)$ на $[a, b]$, то справедливы неравенства

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-2} < x_{n-1} < \xi_{n-1}, \quad (2)$$

то-есть перемежаются нули производных $f'(x)$ и $\varphi'(x)$.

Замечание. Теорема 1 остается в силе, если линейные комбинации $\mu_1 f(x) + \mu_2 \varphi(x)$ и $\mu_1 f'(x) + \mu_2 \varphi'(x)$ могут иметь $\leq n$ нулей на $[a, b]$, и в частности, если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ или одна из этих производных имеют n нулей на $[a, b]$.

Для того, чтобы разъяснить схему приводимого ниже доказательства теоремы 1, рассмотрим графики функций $f^2(x)$ и $\varphi^2(x)$. Так как нули обеих функций перемежаются, то между двумя нулями α_k и α_{k+1} функции $f^2(x)$ лежат ≥ 2 точки пересечения графиков функций $f^2(x)$ и $\lambda^2 \varphi^2(x)$ при любом вещественном $\lambda \neq 0$. Точно также между двумя нулями α_k и α_{k+1} функции $\varphi^2(x)$ лежат ≥ 2 точки пересечения графиков $f^2(x)$ и $\lambda^2 \varphi^2(x)$. Таким образом, в интервале (α_1, α_n) лежит $\geq 2n-1$ точек пересечения графиков $f^2(x)$ и $\lambda^2 \varphi^2(x)$, то-есть функция

$$\Phi(x, \lambda) = f^2(x) - \lambda^2 \varphi^2(x) \quad (3)$$

имеет $\geq 2n-1$ нулей в (α_1, α_n) . Но с другой стороны, в силу условия 2) нашей теоремы по теореме Ролля каждая из функций $f(x) - \lambda \varphi(x)$ и $f(x) + \lambda \varphi(x)$ может иметь $\leq n$ нулей на $[a, b]$, а потому $\Phi(x, \lambda)$ может иметь $\leq 2n$ нулей. Если затем предположить, что хотя бы при одном значении λ нарушаются неравенства (2), то простые геометрические соображения немедленно приводят к заключению, что при подходяще выбранном значении λ графики функций $f^2(x)$ и $\lambda^2 \varphi^2(x)$ пересекутся в интервале (α_1, α_n) по крайней мере в $2n+1$ точках, что невозможно.

После этих предварительных замечаний перейдем к строгому доказательству теоремы 1. Ясно, что $a_k < x_k < a_{k+1}$, $a_k < \xi_k < a_{k+1}$ ($k=1, \dots, n-1$). Из этих неравенств и из неравенств (1) следует, что

$$\xi_{k-2} < a_{k-1} < a_k < x_k < a_{k+1} < a_{k+1} < \xi_{k+1}.$$

Таким образом, мы имеем $\xi_{k-2} < x_k < \xi_{k+1}$. Для того, чтобы доказать неравенства (2) остается показать, что $\xi_{k-1} < x_k < \xi_k$. Рассмотрим функцию $\Phi(x, \lambda)$, определенную равенством (3). В силу неравенств ($\lambda \neq 0$)

$$\Phi(a_k, \lambda) < 0, \quad \Phi(a_{k+1}, \lambda) > 0 \quad (4)$$

функция $\Phi(x, \lambda)$ меняет знак $2n$ раз на отрезке $[a_1, a_n]$, следовательно, в интервале (a_1, a_n) имеет $2n - 1$ нулей.

Кроме того, как было уже отмечено выше, число нулей $\Phi(x, \lambda)$ на отрезке $[a, b]$ не превосходит $2n$. Предположим, что при некотором фиксированном k неравенства (2) нарушаются и что $\xi_k < x_k$. Тогда имеем

$$a_k < \xi_k < x_k < a_{k+1}.$$

Мы покажем сейчас, что можно выбрать λ ($\lambda \neq 0$) так, чтобы выполнялись неравенства

$$\Phi(a_k, \lambda) > 0, \quad \Phi(\xi_k, \lambda) < 0, \quad \Phi(x_k, \lambda) > 0, \quad \Phi(a_{k+1}, \lambda) < 0. \quad (5)$$

Из этих неравенств следует, что в интервале (a_k, a_{k+1}) лежит > 3 нуля функции $\Phi(x, \lambda)$. Так как, с другой стороны, неравенства (4) остаются в силе при любом $\lambda \neq 0$, то из (4) и (5) следует, что функция $\Phi(x, \lambda)$ в интервале (a_1, a_n) имеет $> 2n + 1$ нулей. Итак, чтобы закончить доказательство теоремы 1, остается подобрать такое λ , при котором осуществляются неравенства (5). Допустим сначала, что $\varphi(x_k) \neq 0$, и выберем λ_1 по условию $\Phi(x_k, \lambda_1) = 0$. Тогда $\Phi(\xi_k, \lambda_1) < 0$, так как в точках x_k и ξ_k функции $f^2(x)$ и $\varphi^2(x)$ имеют соответственно относительный максимум и, следовательно, $f^2(x_k) > f^2(\xi_k)$, $\varphi^2(x_k) < \varphi^2(\xi_k)$, так что $\Phi(\xi_k, \lambda_1) < \Phi(x_k, \lambda_1) = 0$. Выберем теперь λ_2 по условию $\Phi(\xi_k, \lambda_2) = 0$, тогда $\Phi(x_k, \lambda_2) > 0$. Теперь положим $2\lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$, и тогда все неравенства (5) будут выполнены. Если же $\varphi(x_k) = 0$, то $\Phi(x_k, \lambda) > 0$ при любом λ ; можно всегда выбрать λ столь большим, чтобы $\Phi(\xi_k, \lambda) < 0$. Аналогично проверяется, что невозможны случаи $x_k = \xi_k$, $x_k \leq \xi_{k-1}$, и теорема 1 доказана.

Метод, который применен здесь для доказательства теоремы 1, использован в заметке [11] для изучения вопроса о взаимном расположении нулей двух последовательных многочленов, наименее уклоняющихся от нуля.

В статье [8] приведено иное доказательство теоремы 1. Оно основано на исследовании функции

$$F(x) = f'(x) \varphi(x) - f(x) \varphi'(x).$$

Доказывается, что $F(x) \neq 0$ на $[a, b]$. Из этого уже легко вытекает, что нули $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ перемежаются. Рассуждения, с помощью ко-



торых мы приходим к этому выводу, подобны тем, которые применяются в теории уравнений Штурма — Лиувилля.

3. Перейдем к рассмотрению тригонометрических многочленов. Как известно, тригонометрический многочлен

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка n может иметь $\leq 2n$ нулей в промежутке $[0, 2\pi)$. Если $s_n(x)$ имеет $2n$ нулей в промежутке $[0, 2\pi)$, то его производная $s'_n(x)$ также имеет $2n$ нулей в $[0, 2\pi)$. Действительно, если $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$ — нули $s_n(x)$ в этом промежутке, то по теореме Ролля на отрезке $[x_1, x_{2n}]$ лежит $\geq 2n - 1$ нулей производной $s'_n(x)$. Кроме того, $s'_n(x)$ имеет не менее, чем по одному нулю в каждом из промежутков $(x_{2n} - 2\pi, x_1)$ и $(x_{2n}, x_1 + 2\pi)$, но, разумеется, только один из них попадает в $[0, 2\pi)$. Ясно, что к тригонометрическим многочленам применима теорема 1. Так что, если $s_n(x)$ и $\tau_n(x)$ — тригонометрические многочлены порядка n , каждый из которых имеет $2n$ простых нулей в $[0, 2\pi)$ и если нули этих многочленов перемежаются, то перемежаются нули их производных $s'_n(x)$ и $\tau'_n(x)$.

Но справедлива также следующая более общая теорема.

Теорема 2. Пусть

$$h(x) = \prod_{k=1}^m (x - z_k) = \prod_{k=1}^m a_k x^k$$

алгебраический многочлен, все нули которого вещественны. Если $s_n(x)$ и $\tau_n(x)$ — тригонометрические многочлены, удовлетворяющие формулированным выше условиям, то каждый из двух тригонометрических многочленов

$$h(D)s_n(x) = \sum_{k=0}^m a_k s_n^{(k)}(x), \quad h(D)\tau_n(x) = \sum_{k=0}^m a_k \tau_n^{(k)}(x)$$

имеет $2n$ нулей в $[0, 2\pi)$, причем эти нули перемежаются.

Эта теорема аналогична теореме Ф. Константианеску [6] для алгебраических многочленов.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим функции

$$f_1(x) = e^{-iz_1 x} s_n(x) \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = e^{-iz_1 x} \tau_n(x).$$

Эти функции удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно, перемежаются нули их производных $f'_1(x)$ и $\varphi'_1(x)$, то-есть перемежаются нули тригонометрических многочленов

$$-iz_1 s_n(x) + s'_n(x) \quad \text{и} \quad -iz_1 \tau_n(x) + \tau'_n(x).$$

Рассматриваем затем функции

$$f_2(x) = e^{-iz_2 x} [-iz_1 s_n(x) + s'_n(x)] \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = e^{-iz_2 x} [-iz_1 \tau_n(x) + \tau'_n(x)],$$

которые также удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно,

перемежаются нули производных $f'_2(x)$ и $\varphi'_2(x)$, то-есть перемежаются нули тригонометрических многочленов

$$\alpha_1 \alpha_2 S_n(x) - (\alpha_1 + \alpha_2) S'_n(x) + S''_n(x)$$

и

$$\alpha_1 \alpha_2 \sigma_n(x) - (\alpha_1 + \alpha_2) \sigma'_n(x) + \sigma''_n(x).$$

Повторяя это рассуждение, мы приходим к заключению теоремы 2.

Докажем теперь другую теорему, подобную теореме П. Монтея [2] для алгебраических многочленов.

Теорема 3. Пусть

$$h(x) = \prod_{k=1}^m (x - \alpha_k) = \sum_{k=0}^m a_k x^k,$$

$$g(x) = \prod_{k=1}^m (x - \beta_k) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

алгебраические многочлены, нули которых вещественны и перемежаются: $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < \beta_m$.

Если $S_n(x)$ — тригонометрический многочлен порядка n , который имеет $2n$ простых нулей в промежутке $[0, 2\pi)$, то каждый из двух тригонометрических многочленов

$$h(D) S_n(x) = \sum_{k=0}^m a_k S_n^{(k)}(x), \quad g(D) S_n(x) = \sum_{k=0}^m b_k S_n^{(k)}(x)$$

в $[0, 2\pi)$ имеет $2n$ нулей, причем эти нули перемежаются.

Рассмотрим функцию

$$y_\omega(x) = e^{-\omega x} S_n(x).$$

Ее производная

$$y'_\omega(x) = e^{-\omega x} [-\omega S_n(x) + S'_n(x)] = e^{-\omega x} (D - \omega) S_n(x)$$

имеет $2n$ нулей в $[0, 2\pi)$. Исследуем, как изменяются эти нули при возрастании величины ω . Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$ — нули многочлена $S_n(x)$ в $[0, 2\pi)$, а $\xi_1(\omega) < \xi_2(\omega) < \dots < \xi_{2n-1}(\omega)$ — нули $y'_\omega(x)$ в интервале (x_1, x_{2n}) , так что $x_k < \xi_k(\omega) < x_{k+1}$. Предположим для определенности, что в интервале (x_k, x_{k+1}) многочлен $S_n(x) > 0$, и обозначим нуль его производной $S'_n(x)$, лежащий в этом интервале, через ξ_{k0} . При наших допущениях $S'_n(x_k) > 0$, $S'_n(x_{k+1}) < 0$. Если $\omega > 0$, то имеем

$$y'_\omega(x_k) > 0, \quad y'_\omega(\xi_{k0}) < 0,$$

следовательно, $x_k < \xi_k(\omega) < \xi_{k0}$. Если $\omega_1 > \omega$, то ясно, что

$$y'_{\omega_1}(x_k) > 0, \quad y'_{\omega_1}(\xi_k(\omega)) < 0,$$

следовательно, $x_k < \xi_k(\omega_1) < \xi_k(\omega)$. Таким образом, при положительных ω функция $\xi_k(\omega)$ монотонно убывает. Нетрудно убедиться, что $\xi_k(\omega)$ убывает и при отрицательных ω . Кроме рассмотренных нами

нулей $\xi_k(\omega)$ ($k=1, \dots, 2n-1$), функция $y'_\omega(x)$ имеет в $[0, 2\pi)$ еще один нуль, либо в $[0, x_1)$, либо в $(x_{2n}, 2\pi)$; в первом случае обозначим его $\xi_0(\omega)$, во втором $\xi_{2n}(\omega)$.

Обратимся теперь к тригонометрическим многочленам

$$\sigma_1(x) = (D - \alpha_1) S_n(x) = -\alpha_1 S_n(x) + S'_n(x),$$

$$\sigma_2(x) = (D - \beta_1) S_n(x) = -\beta_1 S_n(x) + S'_n(x)$$

и покажем, что их нули перемежаются. Действительно, так как $\alpha_1 < \beta_1$, то $\xi_k(\alpha_1) > \xi_k(\beta_1)$ ($k=1, \dots, 2n-1$). Если кроме того, многочлен $\sigma_1(x)$ имеет нуль $\xi_0(\alpha_1)$, то может представиться два случая:

1) многочлен $\sigma_2(x)$ имеет нуль $\xi_0(\beta_1) \in [0, x_1)$, тогда имеем

$$\xi_0(\beta_1) < \xi_0(\alpha_1) < \xi_1(\beta_1) < \dots < \xi_{2n-1}(\beta_1) < \xi_{2n-1}(\alpha_1);$$

2) многочлен $\sigma_2(x)$ имеет нуль $\xi_{2n}(\beta_1) \in (x_{2n}, 2\pi)$, тогда имеем

$$\xi_0(\alpha_1) < \xi_1(\beta_1) < \xi_1(\alpha_1) < \dots < \xi_{2n-1}(\alpha_1) < \xi_{2n}(\beta_1).$$

Итак, в обоих случаях нули многочленов $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ перемежаются. Рассмотрения аналогичны, когда $\sigma_1(x)$ имеет нуль $\xi_{2n}(\alpha_1)$.

Теперь нужно доказать, что в промежутке $[0, 2\pi)$ перемежаются нули функций

$$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1) S_n(x) \quad \text{и} \quad (D - \beta_2)(D - \beta_1) S_n(x). \quad (6)$$

С этой целью рассмотрим три функции

$$z_1 = e^{-\alpha_1 x} \sigma_1(x), \quad z_2 = e^{-\alpha_1 x} \sigma_2(x), \quad z_3 = e^{-\beta_1 x} \sigma_2(x).$$

Функции z_1 и z_2 удовлетворяют условиям теоремы 1, поэтому нули их производных z'_1 и z'_2 перемежаются. Функции z_2 и z_3 устроены точно так же, как исследованная только что функция $y_\omega(x)$, следовательно, перемежаются нули их производных z'_2 и z'_3 . Так как понятие перемежаемости нулей, вообще говоря, не транзитивно, то отсюда еще нельзя непосредственно заключить, что перемежаются нули функций z'_1 и z'_3 . Однако, в нашем случае, учитывая, что нули z'_3 лежат левее соответствующих нулей z'_2 , а эти последние лежат левее соответствующих нулей z'_1 , мы приходим к выводу, что перемежаются нули функций z'_1 и z'_3 , стало быть, перемежаются нули тригонометрических многочленов (6).

Точно так же, доказывается, что перемежаются нули многочленов

$$(D - \alpha_3)(D - \alpha_2)(D - \alpha_1) S_n(x), \quad (D - \beta_3)(D - \beta_2)(D - \beta_1) S_n(x)$$

и т. д. Теорема 3 доказана.

4. Рассмотрим теперь многочлены

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{\lambda_k x} \quad (7)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ — вещественные числа, $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. На всей вещественной оси такой многочлен может иметь $\leq n$ нулей. Кроме того, справедливо обобщенное правило знаков Декарта: если W — число перемен знака в последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n$, а N — число вещественных нулей многочлена $v_n(x)$, то $W - N$ представляет собой неотрицательное четное число (см. [12], отдел V, задачи 76, 77).

Если $v_n(x)$ и $\omega_n(x)$ — многочлены вида (7), каждый из которых имеет n вещественных простых нулей и если нули этих многочленов перемежаются, то в силу теоремы 1 перемежаются нули их производных $v'_n(x)$ и $\omega'_n(x)$.

Можно доказать также теоремы, аналогичные установленным в предыдущем пункте.

Теорема 4. Пусть

$$h(x) = \prod_{k=1}^m (x - \alpha_k) = \sum_{k=0}^m A_k x^k$$

алгебраический многочлен, все нули которого вещественны и не принадлежат отрезку $[\lambda_0, \lambda_n]$. Если многочлены

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{\lambda_k x}, \quad \omega_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k e^{\lambda_k x}$$

удовлетворяют формулированным выше условиям, то каждый из многочленов

$$h(D) v_n(x) = \sum_{k=0}^m A_k v_n^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k h(\lambda_k) e^{\lambda_k x},$$

$$h(D) \omega_n(x) = \sum_{k=0}^m A_k \omega_n^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n b_k h(\lambda_k) e^{\lambda_k x}$$

имеет n вещественных нулей, причем эти нули перемежаются.

Полагая

$$f_1(x) = e^{-\alpha_1 x} v_n(x), \quad \varphi_1(x) = e^{-\alpha_1 x} \omega_n(x),$$

имеем

$$F_n(x) = e^{\alpha_1 x} f_1'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_k - \alpha_1) e^{\lambda_k x},$$

$$\Phi_n(x) = e^{\alpha_1 x} \varphi_1'(x) = \sum_{k=0}^n b_k (\lambda_k - \alpha_1) e^{\lambda_k x}.$$

По теореме Ролля каждый из многочленов $F_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ имеет $\geq n - 1$ вещественных нулей. С другой стороны, так как $\alpha_1 \in [\lambda_0, \lambda_n]$, то в ряде коэффициентов этих многочленов имеется столько же перемен знака, сколько в ряде коэффициентов многочленов $v_n(x)$ и $\omega_n(x)$, то-есть n . Принимая во внимание правило знаков Декарта,

заключаем, что оба многочлена $F_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ имеют по n вещественных нулей. Итак, функции $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно, перемежаются нули многочленов $F_n(x)$ и $\Phi_n(x)$. Затем, рассматривая аналогичным образом функции $f_2(x) = e^{-\alpha_2 x} F_n(x)$ и $\varphi_2(x) = e^{-\alpha_2 x} \Phi_n(x)$, применяем к ним снова теорему 1 и т. д.

Теорема 5. Пусть

$$h(x) = \prod_{k=1}^m (x - \alpha_k) = \sum_{k=0}^m A_k x^k,$$

$$g(x) = \prod_{k=1}^m (x - \beta_k) = \sum_{k=0}^m B_k x^k$$

алгебраические многочлены, все нули которых вещественны, не принадлежат отрезку $[\lambda_0, \lambda_n]$ и перемежаются. Если многочлен

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{\lambda_k x}$$

имеет n вещественных простых нулей, то каждый из двух многочленов

$$h(D) V_n(x) = \sum_{k=0}^m A_k V_n^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k h(\lambda_k) e^{\lambda_k x},$$

$$g(D) V_n(x) = \sum_{k=0}^m B_k V_n^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k g(\lambda_k) e^{\lambda_k x}$$

имеет n вещественных нулей, причем эти нули перемежаются.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы, так как оно мало отличается от доказательства теоремы 3. Требование, чтобы нули многочленов $h(x)$ и $g(x)$ не принадлежали отрезку $[\lambda_0, \lambda_n]$, обеспечивает наличие n вещественных нулей функции

$$(D - \alpha_1) \cdots (D - \alpha_m) V_n(x) \text{ и } (D - \beta_1) \cdots (D - \beta_m) V_n(x)$$

и, следовательно, можно применять теорему 1.

Подстановка $y = e^x$ переводит вещественную прямую $-\infty < x < \infty$ в полупрямую $0 < y < \infty$, а многочлены вида (7) — в многочлены

$$v_n(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^{\lambda_k} \quad (8)$$

К многочленам вида (8) на $(0, \infty)$ применима теорема 1. Если $v_n(x)$ и $\omega_n(x)$ — многочлены вида (8), каждый из которых имеет n простых нулей в $(0, \infty)$ и если нули этих многочленов перемежаются, то перемежаются нули их производных $v'_n(x)$ и $\omega'_n(x)$.

Кроме того, непосредственно из теорем 4 и 5 вытекают с помощью подстановки $y = e^x$ следующие теоремы.

Теорема 6. Если $h(x)$ — алгебраический многочлен, определенный в теореме 4, а многочлены

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}, \quad w_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^{\lambda_k}$$

удовлетворяют формулированным выше условиям, то каждый из двух многочленов

$$\sum_{k=0}^n a_k h(\lambda_k) x^{\lambda_k}, \quad \sum_{k=0}^n b_k h(\lambda_k) x^{\lambda_k}$$

имеет n нулей в $(0, \infty)$, причем эти нули перемежаются.

Теорема 7. Если $h(x)$ и $g(x)$ — алгебраические многочлены, определенные в теореме 5 и если многочлен

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}$$

имеет n простых нулей в $(0, \infty)$, то каждый из двух многочленов

$$\sum_{k=0}^n a_k h(\lambda_k) x^{\lambda_k}, \quad \sum_{k=0}^n a_k g(\lambda_k) x^{\lambda_k}$$

имеет n нулей в $(0, \infty)$, причем эти нули перемежаются.

Разумеется, обе последние теоремы можно доказать и непосредственно. Для этого нужно в первом случае рассмотреть функции $x^{-\alpha} v_n(x)$ и $x^{-\alpha} w_n(x)$, а во втором — функции $x^{-\alpha} V_n(x)$ и $x^{-\beta} V_n(x)$.

Нет сомнения, что можно будет найти еще иные применения теоремы 1, а также указать различные другие обобщения теоремы В. А. Маркова.

Математический институт им В. А. Стеклова

АН СССР

Поступила 29 XI 1961

Վ. Ս. ՎԻԳԵՆՏԵՐ

ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԻՐԱՐ ՀԱՋՈՐԴՈՂ ԶԵՐՈՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԵՐԿՈՒ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ Վ. Ա. ՄԱՐԿՈՎԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ՎԵՐԱԲԵՅԱԼ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ խոսվում է Վ. Ա. Մարկովի ալի հայտնի թեորեմի դանադան ընդհանրացումների ու անալոգների մասին, որը պնդում է՝ եթե $P_n(x)$ -ը և $Q_n(x)$ -ը հանրահաշվական բազմանդամներ են, որոնց բոլոր գերոնները դրական են և հաջորդում են միմյանց, ապա միմյանց հաջորդում են նաև ալի բազմանդամների ածանցյալների գերոնները: Վ. Ա. Մարկովի թեորեմն ընդհանրացվում է հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 1. Նրբ $[a, b]$ -ում անընդհատ դիֆերենցելի $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաներն այնպիսիք են, որ՝ 1) նրանցից յուրաքանչյուրն $[a, b]$ -ում ունի n զերո, ընդ որում այդ ֆունկցիաների զերոները միմյանց հաջորդում են, 2) $\mu f'(x) + \lambda \psi'(x)$ կամայական զձային կոմբինացիան ունի ոչ ավելի, քան $n-1$ զերոներ, ապա $f'(x)$ -ի և $\psi'(x)$ -ի զերոները հաջորդում են միմյանց:

Այս թեորեմը երկու տարբեր եղանակներով ապացուցված է [7] և [8] աշխատություններում: [7] աշխատության մեջ նախկինում համառոտակի շարադրված ապացույցը այստեղ բերվում է մանրամասնորեն: 2—7 թեորեմներն իրենցից ներկայացնում են ինչպիսի եռանկյունաչափական բազմանդամների, այնպես էլ (7) և (8) տեսքի բազմանդամների զերոների փոխադարձ դասավորման հետադոտություն համար 1-ն թեորեմի կիրառման օրինակներ: Բերենք, մասնավորապես, 3-րդ թեորեմը:

Թեորեմ 3. Նրբ $h(x)$ -ը և $g(x)$ -ը m աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամներ են, որոնց բոլոր զերոները իրական են և միմյանց հաջորդում են, իսկ $S(x)$ -ը n կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամ է, որը $[0, 2\pi]$ -ում ունի $2n$ պարզ զերոներ, ապա $h(D)S_n(x)$ և $g(D)S_n(x)$ երկու եռանկյունաչափական բազմանդամներից յուրաքանչյուրը $[0, 2\pi]$ -ում ունի n զերոներ, ընդ որում այդ զերոները հաջորդում են միմյանց:

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.
2. Montel P. Sur les fractions rationnelles à termes enlacés. *Mathematica (Cluj)*, **5**, 1931, 110—129.
3. Граве Д. А. Трактат по алгебраическому анализу, том I, Кисв, 1938.
4. Чеботарева Н. Г. и Мейман Н. Н. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, **26**, 1949.
5. Popoviciu T. Sur un théorème de W. A. Markov. *Mathematica (Cluj)*, **2** (25), вып. 2, 1960, 299—321.
6. Constantinescu F. Sur un théorème de W. A. Markov. *Mathematica (Cluj)*, **2** (25), вып. 2, 1960, 211—216.
7. Виденский В. С. О неравенствах относительно производных многочлена. ДАН СССР, **67**, 1949, 777—780.
8. Виденский В. С. Об оценках производных многочлена. Известия АН СССР, серия матем., **15**, 1951, 401—420.
9. Виденский В. С. Обобщение неравенств В. А. Маркова. ДАН СССР, **120**, 1958, 447—449.
10. Виденский В. С. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем чем период. ДАН СССР, **130**, 1960, 13—16.
11. Виденский В. С. О взаимном расположении нулей последовательных полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. ДАН СССР, **116**, 1957, 723—726.
12. Полюа Г. и Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, ч. II. М., 1956.