

Г. В. Бадалян

Условие разложимости функций в квази-степенной ряд при медленном росте последовательности $\{\gamma_n\}$

В работе [1] получено условие разложимости функций в обобщенный степенной ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(u, t), \quad (1)$$

где $t \in (0, u]$, $u > 0$,

$$\omega_n(u, t) = \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \cdots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dt_n, \quad (2)$$

а последовательность

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \infty$$

удовлетворяет еще условию

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}$$

для всех $n \geq n_0$.

В работе [2] найдено аналогичное условие, когда последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет существенно менее ограничительному условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{n(r)} \int_r^{\infty} \frac{n(t) dt}{(t^2 + r^2)t} < C, \quad (4)$$

где $n(r)$ — числовая функция последовательности $\{\gamma_n\}$, а $C > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

В частности, условие (4) удовлетворяется, когда

$$\sup_{t > r} \frac{n(t)}{t} < C \frac{n(r)}{r} \quad (4')$$

и тем более, когда

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}$$

так как в последнем случае, как нетрудно заметить,

$$\frac{n(\gamma_n)}{\gamma_n} = \frac{n}{\gamma_n}$$

начиная с некоторого n_0 монотонно убывает.

В работе [3] путем введения новой классификации бесконечно дифференцируемых функций (где учитывается не только оценка сверху модулей последовательных производных функции в рассматриваемом промежутке, но и взаимная связь между последовательными производными функции) получено необходимое и достаточное условие их разложимости в ряд вида (1).

Таким образом, в терминах предложенной нами классификации проблема представимости функций квазианалитических классов аналогом степенного ряда полностью разрешена.

Однако, для конкретного квазианалитического класса функций в Карлемановской классификации в общем случае неизвестно как подбирается последовательность чисел

$$\{\gamma_n\}$$

для которой производится разложение функций заданного квазианалитического класса функций в смысле Карлемана.

Поэтому нам кажется, что основной результат работы [2] следует дополнить рассмотрением случая медленного роста последовательности чисел $\{\gamma_n\}$.

В настоящей работе рассматривается вопрос разложимости функций в ряд (1) в промежутке $t \in (0, u]$, который мы называем основным промежутком, когда числовая функция $n(r)$ последовательности

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \infty$$

удовлетворяет условию

$$n(r) \Delta \gg r, \quad (5)$$

где $\Delta > 0$ — некоторое число.

Нетрудно заметить, что в последнем случае числовая функция последовательности $\{\gamma_n\}$ может не удовлетворять условию (4).

Анализ результатов работы [1] показывает, что использованные там средства в последнем случае не дают ожидаемого результата, поэтому этот вопрос следует изучить отдельно, что и делается в настоящей работе.

Предварительно отметим некоторые, нужные для изложения вопроса, факты.

Определение 1. Функции (если они существуют)

$$\varphi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{t^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} \right)', \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad 0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$$

называются последовательными обобщенными производными функции $\varphi(t)$ при последовательности $\{\tau_j\}$.

Такие же производные порядка k функции $\psi_m(t)$, где m — индекс, будут обозначены через

$$\psi_m^{(k)}(t).$$

Известно, что (см. [4]) полиномы Лежандра для отрезка $[0, 1]$ имеют представление

$$X_0(t) = 1, \quad X_m(t) = \frac{K_m}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=1}^m \frac{\zeta + \nu}{\zeta - \nu} \frac{t d\zeta}{\zeta}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $K_m = (2m+1)^{1/2}$, а простой контур C здесь и впредь везде в аналогичных случаях охватывает окрестности нулей знаменателя подынтегральной функции.

Определение 2. Функция $\varphi(t)$ на $[0, 1]$ принадлежит классу функции $C_{\{m_n\}}$ (в смысле Карлемана), если удовлетворяются условия

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq m_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где последовательность $\{m_n\}$ выпукло регуляризована относительно логарифмов (см. [5]).

Определение 3. Условимся говорить, что

$$\varphi(t) \in C_{\{m_n, x\}}([0, 1]), \quad (9)$$

если

$$t^x \varphi(t) \in C_{\{m_n\}}([0, 1]),$$

где $x > 0$ — произвольное число, $t \in [0, 1]$.

Классы функций

$$C_{\{m_n\}}([0, 1]) \text{ и } C_{\{m_n, x\}}([0, 1])$$

друг от друга отличаются тем, что в последнем случае $\varphi(t)$ в окрестности $t=0+$ может не быть ограниченной.

Заметим, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (9), то ее можно представить в виде

$$t^x \varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m(t) \quad (10)$$

или

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m(t) t^{-x}, \quad (10')$$

где $X_m(t)$ — нормированные полиномы Лежандра для промежутка $[0, 1]$.

Заметим также, что ряд (10') не только сходится в $(0, 1]$, но и в $(0, 1]$ его можно почленно дифференцировать, а следовательно, обобщенно дифференцировать, согласно определению 1, любое число раз.

Так как нам впоследствии придется обобщенно дифференцировать

$$\varphi(t) \in C_{[m, z]}([0, 1])$$

при последовательности $\{\gamma_n\}$, то очевидно, что будут нужны оценки сверху как $|A_m|$, так и

$$[X_m(t) t^{-z}]^{(n)}, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Этим и заранее займемся.

Лемма 1. Для всякого

$$\varphi(t) \in C_{[m, z]}([0, 1])$$

и

$$A_m = \int_0^1 t^z \varphi(t) X_m(t) dt, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

справедливо неравенство

$$|A_m| \leq \inf_{p \geq 1} \frac{6^{p+1} p^p (p+1)}{p!} \frac{m_{p+1}}{m^{p+1}}. \quad (11)$$

Действительно, обозначим

$$E_m(\varphi, z) = \inf_{P_m} \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |\varphi(t) t^z - P_m(t)| \right\}, \quad (12)$$

где $P_m(t)$ — полином степени не выше m .

Пусть $P_m^*(t)$ осуществляет равенство в (12). Тогда

$$\begin{aligned} E_m^2(\varphi, z) &\geq \int_0^1 |\varphi(t) t^z - P_m^*(t)|^2 dt \geq \\ &\geq \int_0^1 |\varphi(t) t^z - S_m(\varphi, z, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

где

$$S_m(\varphi, z, t) = \sum_{k=0}^m A_k X_k(t).$$

Это значит, что

$$E_m^2(\varphi, z) \geq \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_k|^2,$$

следовательно,

$$|A_{m+1}| \leq E_m(\varphi, x), \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Для завершения оценки сверху $|A_{m+1}|$ нам достаточно использовать следующее предложение Джексона.

Если на отрезке $[a, b]$ у функции $f(x)$ существует ограниченная производная $f^{(p+1)}(x)$, причем $|f^{(p+1)}(x)| \leq m_{p+1}$, то

$$E_m(f) \leq \frac{C_p (b-a)^{p+1} m_{p+1}}{m^{p+1}},$$

где

$$C_p = \frac{6^{p+1} p^p (p+1)}{p!}$$

(см., например, [6]).

Это значит, что в условиях леммы

$$|A_{m+1}| \leq E_m(\varphi, x) \leq \frac{6^{p+1} p^{p+1} (p+1)}{p!} \cdot \frac{m_{p+1}}{m^{p+1}},$$

где p может быть выбрано подходящим образом.

Лемма 2. Для последовательности $0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leq \dots \rightarrow \infty$, удовлетворяющей условию (5), справедливо неравенство

$$| [X_m(t) t^{-x}]^{[n+1]} | \leq 2\Delta^2 \frac{n^2(m) (3^2 \cdot 2m)^{n(m)}}{n!} \cdot \prod_{v=1}^n (\gamma_v + x) t^{-x - \gamma_n - 1}, \quad (14)$$

где Δ определено в (5), $t \in (0, 1]$.

Действительно, нетрудно заметить, что

$$[X_m(t) t^{-x}]^{[n+1]} = \frac{K_m}{2\pi i} \int_C \prod_{v=1}^n \frac{\zeta + \gamma_v}{\zeta - \gamma_v} \prod_{v=1}^n (\zeta - \gamma_v - x) t^{-\zeta - x - \gamma_n - 1} d\zeta.$$

В качестве контура интегрирования C возьмем окружность $|\zeta - m| = m$. Тогда зная, что

$$\max_{\zeta \in C} \prod_{v=1}^n \left| \frac{\zeta + \gamma_v}{\zeta - \gamma_v} \right| = \prod_{v=1}^n \frac{2m + \gamma_v}{2m - \gamma_v} < 3^n$$

получим

$$\begin{aligned} | [X_m(t) t^{-x}]^{[n+1]} | &\leq \frac{3^n K_m t^{-x - \gamma_n - 1}}{2\pi} \int_{|\zeta - m| = m} \prod_{v=1}^n |\zeta - \gamma_v - x| \cdot |d\zeta| = \\ &= \frac{3^n K_m t^{-x - \gamma_n - 1}}{2\pi} \int_{|\zeta - m| = m} \prod_{v=1}^n \left| \frac{\zeta - \gamma_v - x}{\zeta - \gamma_v} \right| \cdot \prod_{v=1}^n |\zeta - \gamma_v| \cdot |d\zeta|. \end{aligned}$$

Заметив еще, что

$$\max_{|\zeta - m| = m} \prod_{v=1}^n \left| \frac{\zeta - \gamma_v - x}{\zeta - \gamma_v} \right| = \prod_{v=1}^n \frac{\gamma_v + x}{\gamma_v}$$

получим

$$|X_m(t) t^{-\alpha}|^{[n+1]} \leq 3^m K_m t^{-\alpha-\gamma_n-1} \prod_{s=1}^n \frac{\gamma_s + \alpha}{\gamma_s} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-m|=-m}^n \prod_{s=1}^n |\zeta - \gamma_s| \cdot |d\zeta|. \quad (15)$$

Разберем два случая:

1) $n \geq n(m)$,

2) $n < n(m)$.

В первом случае имеем

$$|X_m(t) t^{-\alpha}|^{[n+1]} \leq 3^m K_m t^{-\alpha-\gamma_n-1} \prod_{s=1}^n \frac{\gamma_s + \alpha}{\gamma_s} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-m|=-m}^{n(m)} \prod_{s=1}^{n(m)} |\zeta - \gamma_s| \prod_{s=n(m)+1}^n |\zeta - \gamma_s| \cdot |d\zeta|. \quad (15')$$

Но

$$\max_{|\zeta-m|=-m} \prod_{s=1}^{n(m)} |\zeta - \gamma_s| \leq (2m)^{n(m)},$$

$$\max_{|\zeta-m|=-m} \prod_{s=n(m)+1}^n |\zeta - \gamma_s| = \prod_{s=n(m)+1}^n \gamma_s.$$

В силу последних неравенств из (15') получаем

$$|X_m(t) t^{-\alpha}|^{[n+1]} \leq 3^m K_m t^{-\alpha-\gamma_n-1} \prod_{s=1}^n \frac{\gamma_s + \alpha}{\gamma_s} m \cdot (2m)^{n(m)} \prod_{s=n(m)+1}^n \gamma_s$$

или

$$|X_m(t) t^{-\alpha}|^{[n+1]} \leq 2 \prod_{s=1}^n (\gamma_s + \alpha) t^{-\alpha-\gamma_n-1} \frac{m^2 \cdot 3^m \cdot (2m)^{n(m)}}{\prod_{s=1}^{n(m)} \gamma_s}.$$

Используя теперь условия (5) будем иметь

$$3^m < 3^{n(m)+1}, \quad m^2 < n^2(m) \Delta^2,$$

следовательно в первом случае

$$|X_m(t) t^{-\alpha}|^{[n+1]} \leq 2 \Delta^2 \prod_{s=1}^n (\gamma_s + \alpha) t^{-\alpha-\gamma_n-1} \frac{n^2(m) (3^3 - 2m)^{n(m)}}{\prod_{s=1}^{n(m)} \gamma_s}. \quad (15'')$$

Разберем теперь второй случай.

Из (15) при $n(m) > n$ получим

$$|X_m(t) t^{-\alpha}|^{[n+1]} \leq 3^m K_m t^{-\alpha-\gamma_n-1} \prod_{s=1}^n \frac{\gamma_s + \alpha}{\gamma_s} m \cdot \max_{|\zeta-m|=-m} \prod_{s=1}^n |\zeta - \gamma_s|. \quad (15''')$$

Но нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \max_{|z-m|=m} \prod_{v=1}^n |\zeta_v - \gamma_v| &\leq (2m)^n = \frac{(2m)^n \cdot m^{n(m)}}{m^{n(m)}} = \\ &= \prod_{v=1}^{n(m)} \gamma_v \cdot \frac{m^n \cdot 2^{n(m)} \cdot m^{n(m)}}{m^{n(m)} \prod_{v=1}^n \gamma_v} = \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot \frac{(2m)^{n(m)} \prod_{v=n+1}^{n(m)} \gamma_v}{m^{n(m)} \prod_{v=1}^n \gamma_v} \leq \\ &\leq \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot \frac{(2m)^{n(m)} \cdot m^{n(m)}}{m^{n(m)-n} \prod_{v=1}^n \gamma_v} = \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot \frac{(2m)^{n(m)}}{\prod_{v=1}^n \gamma_v}, \end{aligned}$$

так как $\gamma_v \leq m$ для всякого $v \leq n$ при $n \leq n(m)$.

Таким образом, в этом случае из (15'') в силу последнего неравенства получаем

$$|X_m(t) t^{-z}|^{[n+1]} \leq 3^m K_m t^{-z-\gamma_n-1} \prod_{v=1}^n (\gamma_v + z) \cdot m \cdot \frac{(2m)^{n(m)}}{m^{n(m)}} \prod_{v=1}^n \gamma_v$$

или

$$|X_m(t) t^{-z}|^{[n+1]} \leq 2\Delta^2 \frac{n^2(m) (3 \cdot 2m)^{n(m)}}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} \prod_{v=1}^n (\gamma_v + z) t^{-z-\gamma_n-1}, \quad (15''')$$

так как $K_m = \sqrt{2m+1}$.

Для обоих случаев получаем одно и то же неравенство (15'') и (15'''), чем и завершается доказательство леммы 2.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. Для всякой функции

$$\varphi(t) \in C_{(m_n, z)}([0, 1])$$

последовательности

$$\left\{ \gamma_n \geq \beta \frac{m_n}{m_{n-1}} \right\}$$

удовлетворяющей условию (5) при

$$\beta > 14e \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

справедливо неравенство

$$|\varphi_{n+1}(t)| < C_0 \prod_{v=1}^n (\gamma_v + z) t^{-z-\gamma_n-1}, \quad (16)$$

где $t \in (0, 1]$, а $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Для доказательства будем почленно $n+1$ раз обобщенно (при последовательности $\{\gamma_n\}$) дифференцировать ряд

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m(t) t^{-\alpha}$$

в $(0, 1]$, что законно.

Будем иметь

$$\varphi_{m+1}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m [X_m(t) t^{-\alpha}]^{(n+1)},$$

тогда

$$|\varphi_{n+1}(t)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |A_m| \cdot |X_m(t) t^{-\alpha}|^{(n+1)}.$$

Из этого неравенства в силу (11) и (14) получаем

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| &\leq 2\Delta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \inf_{p \geq 1} \frac{6^{p+1} p^p \cdot (p+1) m_{p+1}}{p! m^{p+1}} \times \\ &\times \frac{n^2(m) (3^{\frac{1}{2}} 2m)^{n(m) \cdot n}}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} \prod_{v=1}^n (\gamma_v + \alpha) \cdot t^{-\alpha - \gamma_n - 1}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство усилится, если его запишем в виде

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| &\leq \\ &\leq C \prod_{v=1}^n (\gamma_v + \alpha) t^{-\alpha - \gamma_n - 1} \sum_{m=0}^{\infty} 7^{n(m)} e^{n(m)} \frac{m_{n(m)}}{m^{n(m)}} \cdot n^2(m) \frac{(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2m)^{n(m)}}{3^{n(m)} m_{n(m)}}. \end{aligned}$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная.

После сокращений получим

$$|\varphi_{n+1}(t)| \leq C \prod_{v=1}^n (\gamma_v + \alpha) t^{-\alpha - \gamma_n - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(14 \cdot 3^{\frac{1}{2}} e)^{n(m)}}{3^{n(m)}} \cdot n^2(m).$$

Нам теперь остается заметить, что при

$$\beta > 14e \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{14e \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{\beta} \right)^{n(m)} n^2(m),$$

где $k > 0$ — произвольное число, сходится.

Таким образом получаем

$$|\varphi_{n+1}(t)| \leq C_0 \prod_{v=1}^n (\gamma_v + \alpha) t^{-\alpha - \gamma_n - 1}.$$

Этим теорема 1 доказана.

Теорема 2 (основная). Всякая функция

$$\varphi(t) \in C_{[m_n, z]}([0, 1])$$

в интервале $(0, u)$, где $0 < u < 1$, разлагается в сходящийся квази-степенной ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(u, t) \quad (17)$$

при последовательности

$$\left\{ \gamma_n > \beta \frac{m_n}{m_{n-1}} \right\}, \quad \beta > 14e \cdot 3^3,$$

если только последняя удовлетворяет условию (5).

Для доказательства теоремы 2 заметим, что в условиях теоремы

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n a_k \omega_k(u, t) + R_n(u, t), \quad (18)$$

где

$$a_0 = \varphi(u), \quad a_k = u^{-\gamma_k + \gamma_{k-1} + 1} \varphi_k(u), \quad k=1, 2, \dots$$

$\omega_k(u, t)$ определено в (2).

$$\begin{aligned} R_n(u, t) &= \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \dots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dt_n \int_u^{t_n} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} = \\ &= \int_u^t \varphi_{n+1}(t_0) dt_0 \int_{t_0}^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dt_n = \\ &= \int_u^t \varphi_{n+1}(t_0) dt_0 \frac{(-1)^n t_0^{\gamma_n}}{2\pi i} \int_C \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\gamma_n} \frac{d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где при $0 < t \leq u$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\gamma_n} \frac{d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu)} > 0$$

(см. [1], стр. 4—6).

Это значит, что в условиях теоремы 2, в силу теоремы 1, будем иметь

$$|R_n(u, t)| \leq C_0 \prod_{\nu=1}^n (\gamma_\nu + z) \int_t^u t_0^{\gamma-1} \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\gamma} \frac{d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu)} dt_0 =$$

$$= C_0 \prod_{v=1}^n (\gamma_v + z) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-z} \int_0^u t_0^{z-1} dt_0}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta, \quad (19')$$

причем изменение порядка интегрирования законно.

Заметив, что при $n > 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - z) \prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} = 0,$$

из (19') получаем

$$|R_n(u, t)| \leq C_0 \prod_{v=1}^n (\gamma_v + z) \frac{u^{-z}}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{\zeta} d\zeta}{(\zeta - z) \prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}. \quad (19'')$$

После замены ζ на $\zeta + z$ получаем

$$|R_n(u, t)| \leq C_0 \prod_{v=1}^n (\gamma_v + z) \frac{t^{-z}}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=0}^n (\zeta + z + \gamma_v)}.$$

Если в качестве контура интегрирования C взять бесконечную прямую

$$(\mu - i\infty, \mu + i\infty),$$

где $\mu > 0$ — произвольное число, то получим

$$|R_n(u, t)| \leq C \prod_{v=1}^n \frac{\gamma_v + z}{\gamma_v + z + \mu} t^{-z-\mu}. \quad (19''')$$

В силу расходимости ряда

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v}$$

из (19''') следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(u, t) = 0$$

для всех $t \in (0, u]$, $0 < u \leq 1$.

Этим теорема 2 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XII 1961

2. Գ. Բադալյան

ՖՈՒՆԿՏԻԱՆԵՐԸ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՄԻՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ՔՎԱԶԻ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ
ՇԱՐՔԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ ԹՎԵՐԻ $\{\gamma_n\}$
ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԴԱՆԴԱՂ ԱՃԻ ԴԵՊԻՆՏ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ, օգտվելով քվազի անալիտիկ ֆունկցիաների կառուցման ղապակարգումից, արված է ֆունկցիաները հիմնական միջակայքում քվազի աստիճանային շարքի վերլուծության պայմանը:

Սահմանում. Պայմանավորվենք ասելու, որ ֆունկցիա

$$z(t) \in C_{[m_n, z]}([0, 1]),$$

և թե

$$t^x z(t) \in C_{[m_n]}([0, 1]),$$

որտեղ $x > 0$, $t \in [0, 1]$, իսկ $C_{[m_n]}$ ֆունկցիաների կառուցման քվազի-անալիտիկ դաս է:

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թե սրեմ: Որպեսզի $C_{[m_n, z]}([0, 1])$ դասին պատկանող $\varphi(t)$ ֆունկցիան $(0, u]$ միջակայքում $(0 < u < 1)$ վերածվի զուգամետ քվազիաստիճանային շարքի

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(u, t)$$

ըստ թվերի $\{\gamma_n\}$ հաջորդականության, երբ թվերի $\left\{\frac{m_n}{m_{n-1}}\right\}$ հաջորդականության թվային ֆունկցիան բավարարում է

$$n(r) \Delta \geq r, \quad \Delta > 0 \quad \text{պայմաններին,}$$

բավարար է, որ $\gamma_n \geq \beta \frac{m_n}{m_{n-1}}$, որտեղ $\beta > 14e \cdot 3^{\Delta}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази-аналитических функций. Известия АН АрмССР, физ.-мат., естеств. и техн. науки, 6, № 5—6, 1953.
2. Бадалян Г. В. Условие разложимости функций в обобщенный степенной ряд в основном промежутке. Известия АН СССР, серия математическая, том 25, № 6, 1961.

3. Бадалян Г. В. Критерий разложимости функций в квазистепенной ряд и квази-аналитические классы функций. ДАН СССР, том 141, № 5, 1961.
4. Бадалян Г. В. Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения. Известия АН АрмССР, физ.-мат., естеств. и техн. науки, 8, № 5, 1955.
5. Мандельброт С. Примающиеся ряды, регуляризация последовательностей, приложения. Издательство иностранной литературы, М., 1955.
6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Госиздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1949.