

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоин

Решение плоской задачи теории упругости
 для кольцевого сектора в напряжениях

Плоской задачей теории упругости в полярных координатах занимались многие исследователи [1–6]. В их работах, в основном, рассматривались или частные случаи нагружения [2, 5], или задача для кольца [3, 4, 6]. В тех же работах, где рассматривались случаи более общего нагружения [1], решения даются в приближенном виде.

В настоящей работе дано точное решение плоской задачи теории упругости в напряжениях для кольцевого сектора, ограниченного двумя концентрическими окружностями и двумя радиусами (см. фиг.), когда внешняя нагрузка распределена симметрично относительно оси x .

При решении задачи для удобства применяются особые виды функций. Доказывается, что система этих функций ортогональна и полна в соответствующей области.

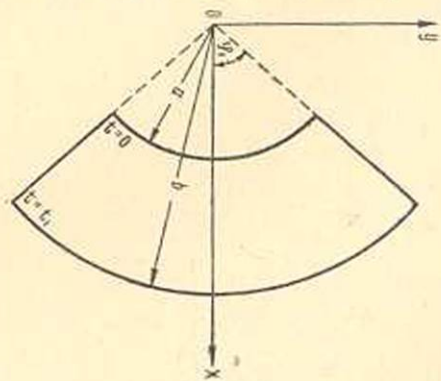
Задача сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что полученные системы регулярны и имеют ограниченные сверху свободные члены.

§ 1. Постановка задачи

Как известно [2], в плоской задаче теории упругости напряжения могут быть определены через функцию Эри $\Phi(r, \varphi)$ следующими формулами [2, 4]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где функция $\Phi(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению



Фиг. 1.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (1.2)$$

При обозначении $r = ae^t$, как это сделано в работах [5, 8], уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} - 4 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - 4 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial \varphi^2} + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что функция $F(t, \varphi) = e^{-t} \Phi(t, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению [6]

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0, \quad (1.4)$$

фундаментальными решениями которого являются следующие функции

$$\begin{aligned} & [A \operatorname{sh}(\alpha + 1)t + B \operatorname{ch}(\alpha + 1)t + C \operatorname{sh}(\alpha - 1)t + D \operatorname{ch}(\alpha - 1)t] \times \\ & \times [E \sin \alpha \varphi + F \cos \alpha \varphi], \\ & [A \operatorname{sh} \beta \varphi \cdot \sin \varphi + B \operatorname{sh} \beta \varphi \cdot \cos \varphi + C \operatorname{ch} \beta \varphi \cdot \sin \varphi + D \operatorname{ch} \beta \varphi \cdot \cos \varphi] \times \\ & \times [E \sin \beta t + F \cos \beta t], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где α и β — произвольные параметры.

Функции, входящие в первую строку (1.5), будут линейно-независимы, если $\alpha \neq 1$, а при $\alpha = 1$ мы имеем следующую фундаментальную систему

$$[A \operatorname{sh} 2t + B \operatorname{ch} 2t + Ct + D] [E \sin \varphi + F \cos \varphi]. \quad (1.5')$$

Легко проверить, что функции

$$\begin{aligned} & [A \operatorname{sh} t + B \operatorname{ch} t + Ct \operatorname{sh} t + Dt \operatorname{ch} t] [E \varphi + F], \\ & [A \sin \varphi + B \cos \varphi + C \varphi \sin \varphi + D \varphi \cos \varphi] [Et + F] \end{aligned} \quad (1.5'')$$

также являются решениями уравнения (1.4).

Напряжения (1.1) выражаются через новую функцию [6] $F(t, \varphi)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \\ \tau_{r\varphi} &= - \frac{e^{-t}}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставив эти выражения в уравнения обобщенного закона Гука и проинтегрировав их, для радиальных и тангенциальных перемещений получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1 + \sigma}{aE} \left[(1 - \sigma) \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + (1 - 2\sigma) F - \sigma \frac{\partial F}{\partial t} \right] + f(\varphi), \\ v &= \frac{1 - \sigma^2}{aE} \left[\int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - F \right) d\varphi - \iint F dt d\varphi - \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} dt - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma}{1 - \sigma} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] - f(\varphi) + f_0(t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где σ — коэффициент Пуассона, а функции $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям

$$f'(\varphi) + f(\varphi) = 0, \quad f_0'(t) - f_0(t) = 0.$$

Принтегрировав эти уравнения, для функций $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ получим

$$f(\varphi) = b \cdot \sin \varphi + c \cdot \cos \varphi, \quad f_0(t) = a_0 e^t. \quad (1.8)$$

Легко видеть, что перемещения

$$u = f'(\varphi) = b \cdot \cos \varphi - c \cdot \sin \varphi,$$

$$v = f_0(t) - f(\varphi) = a_0 e^t - b \cdot \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi$$

представляют собой поступательное движение и вращение твердого тела [1, 3].

Функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде

$$F(t, \varphi) = a(\varphi) + b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) \cos \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) \cos \beta_k t \quad (1.9)$$

в области $(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, 0 \leq t \leq t_1)$,

где

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi \cdot \sin \varphi + B_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi \cdot \cos \varphi + C_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi \cdot \sin \varphi + D_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi \cdot \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \Psi_k(t) = & E_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \cdot \operatorname{sh} (t_1 - t) + G_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \cdot \operatorname{sh} t + \\ & + F_k \operatorname{sh} \alpha_k t \cdot \operatorname{sh} (t_1 - t) + H_k \operatorname{sh} \alpha_k t \cdot \operatorname{sh} t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad t_1 = \ln \frac{b}{a}. \quad (1.11)$$

Подставив (1.9) в (1.6) и (1.7), для напряжений и перемещений получим следующие выражения

$$a^2 e^t \tau_{r\varphi}(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Psi_k'(t) \sin \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k'(\varphi) \sin \beta_k t, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} a^2 e^t \varepsilon_r(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k'(t) - (\alpha_k^2 - 1) \Psi_k(t)] \cos \alpha_k \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k(\varphi) \sin \beta_k t + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_k'(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \beta_k t + a''(\varphi) + a(\varphi) + b'(t) + b(t), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} a^2 e^t \varepsilon_{\varphi}(t, \varphi) = & \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k'(t) + \Psi_k(t)] \cos \alpha_k \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k(\varphi) \times \\ & \times (\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t) + b''(t) + b'(t), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$v(t, \varphi) = \frac{1 - \sigma^2}{aE} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi_k'(t) + \Psi_k(t) + \left(\frac{\alpha_k^2}{1 - \sigma} - 1 \right) \Psi_k(t) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\alpha_k^2 - 1) \int \Psi_k(t) dt \left] \frac{\sin \alpha_k \varphi}{\alpha_k} - \right. \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi_k'(\varphi) + (\beta_k^2 + 1) \int \Phi_k(\varphi) d\varphi \right] \frac{\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t}{\beta_k} + \\
& + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) \cos \beta_k t + \varphi \left[b''(t) + b'(t) - b(t) - \int b(t) dt \right] - \\
& - t \left[a'(\varphi) + \int a(\varphi) d\varphi \right] + \int a(\varphi) d\varphi - \frac{\sigma}{1-\sigma} a'(\varphi) \Big\} - f(\varphi) + f_0(t). \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Полагаем, что на кромках кольцевого сектора внешняя нагрузка распределена симметрично относительно оси x и задана следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 e^{i\sigma_r}(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi), \\ \alpha^2 \sigma_r(0, \varphi) &= f_2(\varphi), \\ \alpha^2 \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= f_3(\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \quad (1.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 e^{i\tau_{r\varphi}}(t, \varphi_1) &= f_4(t), \\ \alpha^2 e^{i\sigma_{\varphi}}(t, \varphi_1) &= f_5(t), \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq t_1)$$

где функции f_i — кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси x имеем также

$$v(t, 0) = \tau_{r\varphi}(t, 0) = 0. \quad (1.17)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.4) граничными условиями (1.16) и (1.17).

§ 2. О функциях $\varphi_k(t)$

Для удобства введем новые функции $\varphi_k(t)$, где

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} e^t & \text{при } k=0 \\ \sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t & \text{при } k=1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

и докажем, что система этих функций $\{\varphi_k(t)\}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) полная в классе функций, интегрируемых с квадратом, т. е. в классе $L_2[0, t_1]$.

Эти функции ортогональны в промежутке $0 \leq t \leq t_1$, т. е. имеют соотношения

$$\int_0^{t_1} \varphi_k(t) \cdot \varphi_p(t) dt = \begin{cases} \frac{t_1}{2} (\beta_k^2 + 1) & \text{при } k=p \neq 0, \\ \frac{1}{2} (e^{2t_1} - 1) & \text{при } k=p=0, \\ 0 & \text{при } k \neq p. \end{cases} \quad (2.2)$$

Пользуясь формулами

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \sin \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= -\frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[\frac{\operatorname{sh}(t_1 - t)}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\sin a(t_1 - t)}{\sin at_1} \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k \sin \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= \frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\sin at}{\sin at_1} \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2 \cos \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= \frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[\frac{\operatorname{ch}(t_1 - t)}{\operatorname{sh} t_1} - a \frac{\cos a(t_1 - t)}{\sin at_1} \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k^2 \cos \beta_k t}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} &= \frac{t_1}{2(a^2 + 1)} \left[\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t_1} - a \frac{\cos at}{\sin at_1} \right],\end{aligned}\quad (2.3)$$

легко доказывается справедливость следующих разложений при любых действительных или мнимых значениях a

$$\begin{aligned}\sin at &= \frac{2(e^{t_1} \sin at_1 - ae^{t_1} \cos at_1 + a)}{(a^2 + 1)(e^{2t_1} - 1)} \varphi_0(t) + \\ &+ \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (a \cos at_1 - \sin at_1) - a}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} \cdot \beta_k \varphi_k(t), \\ \cos at &= \frac{2(e^{t_1} \cos at_1 + ae^{t_1} \sin at_1 - 1)}{(a^2 + 1)(e^{2t_1} - 1)} \varphi_0(t) + \\ &+ \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k (a \sin at_1 + \cos at_1)}{(\beta_k^2 - a^2)(\beta_k^2 + 1)} \cdot \beta_k \varphi_k(t), \\ 1 &= \frac{2(e^{t_1} - 1)}{e^{2t_1} - 1} \varphi_0(t) + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\beta_k(\beta_k^2 + 1)} \varphi_k(t).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Если в этих разложениях примем $a = \frac{(2p-1)\pi}{2t_1}$, где $p=1, 2, \dots$,

то системы функций $\{\sin at\}$ и $\{1; \cos at\}$ будут полны в классе $L_2[0, t_1]$, т. е. любая функция, интегрируемая с квадратом, в промежутке $[0, t_1]$ разлагается в ряд Фурье по функциям $\{\sin at\}$ или $\{1; \cos at\}$. Но каждая из этих функций выражается через функции $\{\varphi_k(t)\}$, $(k=0, 1, 2, \dots)$. Отсюда вытекает, что любую функцию $f(t) \in L_2[0, t_1]$ можно выразить через функции $\{\varphi_k(t)\}$, т. е. разложить в ряд по функциям (2.1)

$$f(t) = a_0 \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t), \quad (2.5)$$

где коэффициенты разложения в силу (2.2) определяются формулами

$$a_0 = \frac{2}{e^{2t_1} - 1} \int_0^{t_1} f(t) \varphi_0(t) dt, \quad (2.5')$$

$$a_k = \frac{2}{t_1(\beta_k^2 + 1)} \int_0^{t_1} f(t) \varphi_k(t) dt, \quad (k=1, 2, \dots).$$

Из вышесказанного следует, что система функций (2.1) полна в классе $L_2[0, t_1]$, т. е. любая функция $f(t) \in L_2[0, t_1]$ разлагается в ряд по функциям (2.1) так, что имеет место следующее неравенство при $n > N(\varepsilon)$

$$\int_0^{t_1} \left[f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right]^2 dt < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Это неравенство можно доказать более строго, если пользоваться неравенствами Бесселя [11] для разложений (2.4).

§ 3. Решение задачи

В силу (1.5'') и (1.8) выберем функции $a(\varphi)$, $b(t)$, $f(\varphi)$ и $f_0(t)$ следующим образом

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= a_0 \varphi \sin \varphi, & f_0(t) &= c_0 e^t, \\ b(t) &= b_0 e^t + b_1 t e^{-t}, & f(\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а в силу приведенного в § 2 доказательства разложим функции f_i ($i=1, 2, \dots, 5$) в ряд Фурье. Тогда граничные условия (1.16) и (1.17) примут вид

$$\left. \begin{aligned} a^2 e^{t_1} \sigma_r(t_1, \varphi) &= d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \alpha_k \varphi, \\ a^2 \sigma_r(0, \varphi) &= d'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k \cos \alpha_k \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$a^2 e^t \sigma_\varphi(t, \varphi_1) = g_0 \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t), \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 e^{t_1} \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin \alpha_k \varphi, \\ a^2 \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma'_k \sin \alpha_k \varphi, \\ a^2 \tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin \beta_k t, \\ v(t, 0) = \tau_{r\varphi}(t, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Удовлетворив условиям (3.4), получим

$$B_k = C_k = 0, \quad c_0 = 0, \\ E_k = \frac{\gamma'_k}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1}, \quad H_k = \frac{\gamma_k}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1}, \quad (3.5)$$

$$(\beta_k D_k + A_k) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 + (\beta_k A_k - D_k) \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 = \frac{\delta_k}{\beta_k}.$$

Подставим значение σ_r из (1.13) в (3.2), умножим обе части полученных равенств на 1 и $\cos \alpha_p \varphi$. После интегрирования по φ от 0 до φ_1 получим

$$\frac{\gamma_p}{\alpha_p} - (\alpha_p^2 - 1) \Psi_p(t_1) = \\ - \frac{2}{\varphi_1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_p \varphi d\varphi - \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\alpha_p^2 - 1} + d_p, \quad (3.6)$$

$$\frac{\gamma_p}{\alpha_p} - (\alpha_p^2 - 1) \Psi_p(0) = \\ = - \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_p \varphi d\varphi - \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\alpha_p^2 - 1} + d_p, \\ b'(t_1) + b(t_1) + \frac{2a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1} = d_0 - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] d\varphi, \quad (3.7)$$

$$b'(0) + b(0) + \frac{2a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1} = d_0 - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] d\varphi.$$

Подставив значение σ_p из (1.14) в (3.3), умножив обе части полученного равенства на $\varphi_p(t)$ ($p=0, 1, 2, \dots$) и проинтегрировав по t от 0 до t_1 , получим
при $p \neq 0$

$$\beta_p (\beta_p^2 + 1) \Phi_p(\varphi_1) = \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^{t_1} [\Psi_k^*(t) + \Psi_k'(t)] \varphi_p(t) dt - \\ - \frac{4b_1 \beta_p [1 + (-1)^{p+1} e^{-t_1}]}{t_1 (\beta_p^2 + 1)} - g_p (\beta_p^2 + 1), \quad (3.8)$$

при $p=0$

$$b_0 (e^{2t_1} - 1) - b_1 t_1 = g_0 \frac{e^{2t_1} - 1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\gamma_k e^{t_1} - \gamma'_k}{\alpha_k}. \quad (3.9)$$

Для интегралов, входящих в формулы (3.6)–(3.8), в силу (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_1} [\Phi_k^*(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_p \varphi d\varphi &= \frac{(-1)^p \beta_k}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]} \times \\ &\times [\delta_k (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 + 1) - 2(\beta_k^2 + 1)(\alpha_p^2 - 1) [A_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \\ &+ D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1]], \\ \int_0^{t_1} [\Psi_k^*(t) + \Psi_k(t)] \varphi_p(t) dt &= \frac{\beta_p \alpha_k}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} \times \\ &\times \left\{ 2(\beta_p^2 + 1) [\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + (-1)^{p+1} \operatorname{ch} t_1] [G_k + (-1)^{p+1} F_k] - \right. \\ &- \frac{\alpha_k (\beta_p^2 + \alpha_k^2 - 3) \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 + 2(\beta_p^2 + 1) [\operatorname{ch} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1 + (-1)^{p+1}]}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} \times \\ &\times [\gamma'_k + (-1)^{p+1} \gamma_k] \Big\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Введем новые неизвестные

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1) (G_k + F_k) &= (-1)^k \frac{X_k}{\alpha_k}, \\ (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1) (G_k - F_k) &= (-1)^k \frac{Y_k}{\alpha_k}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$A_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 = \frac{m Z_k}{\beta_k (\beta_k^2 + 1)},$$

где

$$m = \frac{\varphi_1}{t_1}.$$

В формулах (3.6) и (3.8) произведя замену неизвестных, после некоторых преобразований получим следующие бесконечные системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} Z_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} Y_k + a_p \quad (p=2, 4, 6, \dots), \\ Z_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} X_k + a_p \quad (p=1, 3, 5, \dots), \\ Y_p &= \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} b_{kp} Z_k + b_p \\ X_p &= \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} c_{kp} Z_k + c_p \quad (p=1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 a_{kp} &= \frac{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2]}, \\
 b_{kp} &= \frac{8\alpha_p(\alpha_p^2 - 1)}{t_1} \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 - \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 + \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \frac{1}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]}, \\
 c_{kp} &= \frac{8\alpha_p(\alpha_p^2 - 1)}{t_1} \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 + \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 - \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \frac{1}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]}, \\
 &\quad (3.13) \\
 a_p &= \frac{1}{m} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \left\{ \frac{\beta_p(\beta_p^2 + 1) \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1}{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} - \right. \\
 &\quad - g_p(\beta_p^2 + 1) - \frac{2\beta_p}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \\
 &\quad \times \frac{\alpha_k(\beta_p^2 + \alpha_k^2 - 3) \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 + 2(\beta_p^2 + 1) [\operatorname{ch} \beta_p t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1 - (-1)^{p+1}]}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} \times \\
 &\quad \times \left. \left[\gamma_k + (-1)^{p+1} \gamma_k' - \frac{4b_1 \beta_p [1 + (-1)^{p+1} e^{-t_1}]}{t_1 (\beta_p^2 + 1)} \right] \right\}, \\
 b_p &= \alpha_p \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 - \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 + \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \left\{ \frac{8\alpha_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1 (\alpha_p^2 - 1)} - \right. \\
 &\quad - \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{\beta_k \beta_p (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 + 1)}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]} + \\
 &\quad + (-1)^p \left[(d_p + d_p') - \frac{\gamma_p + \gamma_p'}{\alpha_p} + \frac{\alpha_p \operatorname{ch} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 - \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1}{\alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} (\gamma_p - \gamma_p') \right] \Bigg\}, \\
 &\quad (3.14) \\
 c_p &= \alpha_p \frac{\operatorname{ch} \alpha_p t_1 + \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_p t_1 - \alpha_p \operatorname{sh} t_1} \left\{ - \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\beta_k \beta_p (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 + 1)}{[\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2] [\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2]} + \right. \\
 &\quad + (-1)^p \left[(d_p' - d_p) + \frac{\gamma_p - \gamma_p'}{\alpha_p} - \frac{\alpha_p \operatorname{ch} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1 - \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{ch} t_1}{\alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p t_1 \cdot \operatorname{sh} t_1} (\gamma_p + \gamma_p') \right] \Bigg\}. \\
 &\quad (3.14')
 \end{aligned}$$

Исключив неизвестные коэффициенты X_k и Y_k в бесконечных системах (3.12), для коэффициентов Z_k получим следующие системы бесконечных линейных уравнений

$$Z_p = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} u_{np} Z_n + P_p \quad (p=1, 3, 5, \dots), \quad (3.15)$$

$$Z_p = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} v_{np} Z_n + Q_p \quad (p=2, 4, 6, \dots),$$

где

$$u_{np} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} c_{nk}, \quad v_{np} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} b_{nk}, \quad (3.16)$$

$$P_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} c_k + a_p, \quad Q_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} b_k + a_p. \quad (3.17)$$

Отметим, что Z_{2k} и Z_{2k+1} удовлетворяют отдельным уравнениям, т. е. значения этих коэффициентов вычисляются независимо друг от друга. Это обстоятельство намного облегчает вычисления при решении конкретных примеров.

Имея значения Z_p , из последних двух уравнений (3.12) найдем значения X_p и Y_p . Из (3.5) и (3.11) найдем следующие значения для коэффициентов A_k , D_k , G_k и F_k :

$$A_k = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} \left[\frac{mZ_k}{\beta_k(\beta_k^2 + 1)} \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \left(\frac{\partial_k}{\beta_k} - \frac{mZ_k}{\beta_k^2 + 1} \right) \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \right], \quad (3.18)$$

$$D_k = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} \left[\frac{mZ_k}{\beta_k(\beta_k^2 + 1)} \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 - \left(\frac{\partial_k}{\beta_k} - \frac{mZ_k}{\beta_k^2 + 1} \right) \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \right],$$

$$G_k + F_k = \frac{(-1)^k X_k}{\alpha_k (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1)},$$

$$G_k - F_k = \frac{(-1)^k Y_k}{\alpha_k (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1)}. \quad (3.19)$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_0 , b_0 и b_1 из (3.7) и (3.9) в силу (3.10) и (3.1) получим следующие уравнения

$$2b_0(e^{t_1} + 1) + b_1(e^{-t_1} + 1) + \frac{4a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1} = (d_0 + d'_0) -$$

$$- \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\beta_k \partial_k}{\beta_k^2 + 1} - \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{mZ_k}{(\beta_k^2 + 1)^2},$$

$$2b_0(e^{t_1} - 1) + b_1(e^{-t_1} - 1) = (d_0 - d'_0) + \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_k \partial_k}{\beta_k^2 + 1} +$$

$$+ \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m Z_k}{(\beta_k^2 + 1)^2}, \quad (3.20)$$

$$b_0(e^{2t_1} - 1) - b_1 t_1 = g_0 \frac{e^{2t_1} - 1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\gamma_k e^{t_1} - \gamma'_k}{\alpha_k}.$$

Неизвестные коэффициенты Z_k , входящие в соотношения (3.20), определяются из бесконечных систем линейных уравнений (3.15) и выражаются через постоянные a_0 и b_1 . Подставив определенные из (3.15) значения неизвестных Z_k в (3.20) и разрешив полученные соотношения относительно a_0 , b_0 и b_1 , получим их значения. Остальные коэффициенты определяются из (3.5).

§ 4. Исследование бесконечных систем

Покжем, что полученные бесконечные системы линейных уравнений (3.15) регулярны. В силу (3.13) и (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} |u_{np}| &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} c_{nk} = \\ &= \frac{32 \beta_p (\beta_p^2 + 1)}{t_1 \varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\ &\times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k (\alpha_k^2 - 1)}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \\ &= \frac{4 \beta_p (\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \\ &= 1 - \frac{2 \beta_p}{\varphi_1 (\beta_p^2 + 1)} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} < 1, \\ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} |v_{np}| &= \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} b_{nk} = \\ &= \frac{32 \beta_p (\beta_p^2 + 1)}{t_1 \varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\ &\times \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k (\alpha_k^2 - 1)}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2] [\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{4\alpha_k}{t_1(\alpha_k^2 - 1)} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} < \frac{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)}{\varphi_1} \times \\
&\times \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \\
&= 1 - \frac{2\beta_p}{\varphi_1(\beta_p^2 + 1)} \frac{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1} < 1. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

При этом использованы значения рядов [9]

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{[\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \frac{t_1}{8\alpha_k(\alpha_k^2 - 1)} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1} \\
&\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{[\beta_n^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \frac{t_1}{8\alpha_k(\alpha_k^2 - 1)} \times \\
&\times \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1} - \frac{1}{2(\alpha_k^2 - 1)^2}, \quad (4.3) \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \frac{\varphi_1}{4\beta_p(\beta_p^2 + 1)} \times \\
&\times \frac{\operatorname{sh} \beta_p \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \beta_p \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1}{\operatorname{ch}^2 \beta_p \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1} - \frac{1}{2(\beta_p^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что в бесконечных системах (3.15) сумма модулей коэффициентов при неизвестных меньше единицы, т. е. системы (3.15) регулярны.

Легко видеть из (3.14) и (3.17), что свободные члены этих систем при $\alpha_p \neq 1$ ограничены. Покажем, что при $\alpha_p = 1$ эти члены не обращаются в бесконечность. Для этого нужно только показать, что при $\alpha_p = 1$ $c_p < \infty$.

Составим уравнение равновесия ($\Sigma F_x = 0$) для рассматриваемого профиля.

В силу симметрии оно будет иметь вид

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\varphi_1} \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) \sin \varphi ds + \cos \varphi_1 \int_a^b \tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) dr + \int_0^{\varphi_1} \tau_{r\varphi}(0, \varphi) \sin \varphi ds_1 + \\
& + \int_0^{\varphi_1} \sigma_r(t_1, \varphi) \cos \varphi ds - \int_0^{\varphi_1} \sigma_r(0, \varphi) \cos \varphi ds_1 - \sin \varphi_1 \int_a^b \sigma_r(t, \varphi_1) dr = 0. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Подставив сюда значения напряжений на контуре из (1.16), получим условие равновесия в следующем виде

$$2 \cos \varphi_1 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\delta_k}{\beta_k} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma'_k - \gamma_k) \frac{\alpha_k (-1)^{k+1} \sin \varphi_1}{\alpha_k^2 - 1} + \sin \varphi_1 (d'_0 - d_0) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (d'_k - d_k) \frac{(-1)^{k+1} \sin \varphi_1}{\alpha_k^2 - 1} - \sin \varphi_1 \int_a^b \sigma_z(t, \varphi_1) dr = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.5) переходя к пределу когда $\alpha_k \rightarrow 1$ (т. е. $\varphi_1 \rightarrow \pi$ при $k=1$ или $\varphi_1 \rightarrow 2\pi$ при $k=2$), получим

$$\frac{4(-1)^p}{p\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\delta_k}{\beta_k} + (\gamma'_p - \gamma_p) + (d'_p - d_p) = 0. \quad (4.6)$$

При этом использованы значения пределов

$$\lim_{\alpha_p \rightarrow 1} \frac{\sin \varphi_1}{\alpha_p^2 - 1} = \frac{(-1)^{p+1} p\pi}{2}, \\ \lim_{\alpha_p \rightarrow 1} \cos \varphi_1 = (-1)^p. \quad (4.7)$$

Из (3.14') видно, что выражение в фигурных скобках при $\alpha_k \rightarrow 1$ с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью уравнения (4.6), т. е. обращается в нуль того же порядка, как и $\alpha_k - 1$.

Таким образом, при $\alpha_k = 1$ выражение (3.14') обращается в неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Перейдя к пределу, легко можно вычислить значение c_p при $\alpha_k = 1$.

Из (3.12)–(3.14') следует, что выражение для $G_k - F_k$ во второй формуле (3.19) не обращается в бесконечность при $\alpha_k = 1$, так как в числителе этого выражения содержится множитель $(\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1)$.

Таким образом, мы доказали, что свободные члены систем (3.15) всегда ограничены сверху. Это обстоятельство позволяет пользоваться теорией регулярных систем линейных уравнений [10] и оценить неизвестные коэффициенты с любой точностью.

Этим же методом можно решить плоскую задачу теории упругости для кольцевого сектора, когда внешняя нагрузка распределена несимметрично относительно оси x . Эта задача сводится к решению регулярных бесконечных систем линейных уравнений, свободные члены которых ограничены сверху. Изменяя граничные условия, можно решить ряд задач, точные решения которых получаются без применения бесконечных систем. Например, когда граничные условия для кольцевого сектора ($0 \leq \varphi \leq \varphi_1$; $0 \leq t \leq t_1$) заданы в виде

$$\begin{aligned}
 a^2 e^{i\tau_r}(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi), & a^2 e^{i\tau_{rc}}(t_1, \varphi) &= f_5(\varphi), \\
 a^2 \sigma_r(0, \varphi) &= f_2(\varphi), & a^2 \tau_{rc}(0, \varphi) &= f_6(\varphi), \\
 av(t, \varphi_1) &= f_3(t), & a^2 e^{i\tau_{rc}}(t, \varphi_1) &= f_7(t), \\
 av(t, 0) &= f_4(t), & a^2 e^{i\tau_{rc}}(t, 0) &= f_8(t),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где f_3 и f_4 непрерывные, а остальные — кусочно-непрерывные функции; тогда выбирая функцию $F(t, \varphi)$ в виде (1.9) и разлагая функции $f_1, f_2, f_3, \dots, f_8$ в ряд по тригонометрическим функциям, а f_3 и f_4 по функциям (2.1), легко можно удовлетворить граничным условиям (4.8) и найти входящие в $F(t, \varphi)$ неизвестные коэффициенты. Решение этой задачи при $\varphi_1 = \pi$ или 2π получим предельным переходом, используя уравнения равновесия внешних сил.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 III 1971

Ա. Ա. Բաբլյունյան

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՔ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԱԵԿՏՈՐԻ ՀԱՍԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի ճշգրիտ լուծումը լարումներով օղակալին սկիտորի տեսք ունեցող մարմինների համար: Ենթադրվում է, որ արտաքին լարումները բաշխված են կամայական, բայց միջին կտրվածքի նկատմամբ սիմետրիկ ձևով:

Խնդրի լուծման ժամանակ մտցվում են նոր ֆունկցիաներ e^t , $\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t$ ($k=1, 2, \dots$), ցույց է արվում, որ այս ֆունկցիաներից կազմված սխառներ օրթոգոնալ են լրիվ սխառնում է $L_2[0, t_1]$ դասում, այնուհետև σ_φ նորմալ լարումը և v տանգենցիալ տեղափոխումը եզրում ներկայացվում է ֆուրյեի շարքով ըստ այդ ֆունկցիաների:

Խնդիրը բերվում է դժալին անվերջ հավասարումների սխառնումների լուծմանը, ցույց է արվում, որ այդ սխառնումները սկզբնական են, իսկ աղյուսակայինները՝ սահմանափակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ-Гостехиздат, М.-Л., 1947.
3. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. I, Изд. АН СССР, М., 1952.
4. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ—ГТТИ, Л., 1934.
6. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ, М.—Л., 1955.
7. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд. АН УССР, Киев, 1952.

8. *Абрамн Б. Л., Баблюн А. А.* Кручение круглых стержней с продольными выточками. ПММ, **24**, 2, 1960.
9. *Гончаров В. Л.* Теория функций комплексного переменного. Учпедгиз, М., 1955.
10. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
11. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ИЛ, М., 1948.
12. *Смоловик И. И., Шепетов А. Н.* Задача о деформации круговой арки. Тезисы докладов Всесоюзного Совещания по применениям методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. Тбилиси. 20—27 февраля, 1961, 62—63.