ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 1, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. С. Кочарян

# О взвешенно-наилучшем приближении рациональными функциями на всей вещественной оси

Пусть четная функция $p(x) \geqslant 0$ определена и непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$, монотонно возрастает, причем $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = +\infty$.

Обозначим через $L_2[p(x)]$ класс функций $f(x)$, определенных и измеримых на всей оси $(-\infty, +\infty)$, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(x)} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Известно, что для полноты системы полиномов в классе $L_2[p(x)]$ (т. е. при взвешенно-средней аппроксимации) необходимо ([1], [2]), а при добавочном условии

$$xp'(x) \uparrow +\infty, \quad x \uparrow +\infty$$

также и достаточно ([3], [4]) выполнение условия

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty.$$

Известно также, что те же условия остаются в силе и при взвешенно-равномерной аппроксимации ([4], [5]).

Пусть $\{\alpha_k\}$ $(\mathrm{Jm}\, \alpha_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность комплексных чисел и $\{R_n(z)\}$ — ассоциированная с нею система рациональных функций вида

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (z + \alpha_k)}, \tag{1}$$

где $P_n(z)$ — полином степени не выше $n$.

Опираясь на известные предложения о единственности функций, аналитических в полуплоскости, методом моментов можно установить следующую теорему*:

* Об этом мне сообщил М. М. Джрбашян в устной беседе. Доказательство мы не приводим.

Теорема. *Если одновременно имеем*

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx = +\infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Jm} \alpha_k}{1+|\alpha_k|^2} = +\infty, \tag{2}$$

*то система рациональных функций* $\{R_n(z)\}$ *полна в классе* $L_2[p(x)]$.

Аналогичный результат имеет место и при взвешенно-равномерной аппроксимации.

В связи с этим естественно исследовать вопрос о зависимости между порядком убывания наилучших приближений функциями вида (1) и дифференциальными свойствами приближаемой функции. В настоящей статье приводится решение обратной задачи наилучшего приближения. Пользуясь методом М. М. Джрбашяна [5], получаем оценки для порядка роста $\{R_n'(x)\}$, если

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)} |R_n(x)| < +\infty.$$

Эти оценки позволяют установить обратные теоремы наилучшего приближения, аналогичные теоремам С. Н. Бернштейна.

Что касается прямой теоремы наилучшего приближения, которая позволила бы судить о точности приводимого нами результата, то для преодоления возникающих здесь затруднений, по-видимому, потребуется привлечение новых методов.

1°. Для упрощения вычислений мы будем рассматривать частное расположение полюсов $\{\alpha_k\}$, а именно положим, что $\alpha_k = i\lambda_k$, где

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$$

Пусть, как уже было сказано, $y = p(x)$ непрерывная, неубывающая, четная положительная функция, определенная на всей вещественной оси, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = +\infty$. Тогда существует непрерывная, монотонно возрастающая обратная функция $x = q(y)$, для которой

$$\lim_{y\to+\infty} q(y) = +\infty.$$

Приведем две элементарные леммы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *Если рациональная функция*

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (z + i\lambda_k)} \tag{3}$$

*удовлетворяет условию*

$$|R_n(x)| \leqslant M \qquad для \qquad -R \leqslant x \leqslant +R,$$

*то при* $|x| \geqslant R$

$$|R_n(x)| \leqslant M \prod_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{1+|\Phi(i\lambda_k)|^2\Phi^2(x)}{\Phi^2(x)+|\Phi(i\lambda_k)|^2}},$$

где

$$\Phi(x)=\frac{x}{R}+\sqrt{\left(\frac{x}{R}\right)^2-1}.$$

Доказательство. Функция $w=\Phi(z)=\frac{z}{R}+\sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^2-1}$ конформно отображает внешнюю часть отрезка $[-R, +R]$ на область $|w|>R$, а обратная функция имеет вид

$$z=\psi(w)=\frac{R}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right).$$

Согласно условию, на $|w|=1$ имеем

$$\left|R_n[\psi(w)]\prod_{k=0}^{n}\frac{w+\Phi(i\lambda_k)}{1+w\,\Phi(i\lambda_k)}\right|\leqslant M,$$

поэтому

$$|R_n(x)|\leqslant M\prod_{k=0}^{n}\left|\frac{1+\Phi(x)\,\overline{\Phi(i\lambda_k)}}{\Phi(x)+\Phi(i\lambda_k)}\right| \text{ при } |x|\geqslant R,$$

откуда и следует наша оценка.

Лемма 2. *Для данного $n$ уравнение*

$$y=4\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{q(y)}{\lambda_k}}, \qquad y>0 \tag{4}$$

*имеет единственный корень $\rho_n$, который, монотонно возрастая, стремится к $+\infty$ при $n\to\infty$.*

Доказательство. Положив $y=p(x)$, рассмотрим функциональное уравнение

$$4\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda_k+x}=p(x). \tag{4'}$$

Так как функция $y=p(x)$ неубывающая, а в левой части нашего уравнения имеем монотонно убывающую функцию со значением $4(n+1)$ в точке $x=0$, то для данного значения $n>0$ уравнение (4') имеет единственный корень $x=r_n$.

В силу возрастания функции $\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda_k+x}$ при увеличении $n$ заключаем, что $r_n$, а следовательно и числа $\rho_n=p(r_n)$, монотонно возрастают. Далее, из уравнения (4) вытекает, что последовательность чисел $\{\rho_n\}$ не может быть ограниченной, следовательно $\rho_n\to+\infty$.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть рациональная функция (3) удовлетворяет условию*

$$|R_n(x)| \leqslant e^{p(x)}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{5}$$

*Для любых* $\vartheta\,(0<\vartheta<1)$ *и* $a\,(0<a<q(\rho_n))$, *в области* $|y| < \vartheta\lambda_0$ *имеет место оценка*

$$|R_n(x+iy)| < e^{p(|x|+a)}\, e^{|y|\, Y_n(x)}, \tag{6}$$

*где* $Y_n(x)$ *четная функция, определяемая из формулы*

$$Y_n(x) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{2}{\pi}\right)\left\{\dfrac{P(x+a)}{a} + \displaystyle\int\limits_{P(x+a)}^{\rho_n} \dfrac{dz}{q(z)-x}\right\} + \dfrac{2}{(1-\vartheta)^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k} \\ \qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant x < q(\rho_n)-a, \\ \left(1+\dfrac{2}{\pi}\right)\dfrac{P(x+a)}{a} + \dfrac{2}{(1-\vartheta)^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\lambda_k} \quad \text{при } x \geqslant q(\rho_n)-a. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Функция $\log|R_n(x+iy)|$ субгармонична в полуплоскости $y>0$, а функция

$$\log\left|\prod_{k=0}^{n}\frac{x+iy+i\lambda_k}{x+iy-i\lambda_k}R_n(x+iy)\right|$$

субгармонична в полуплоскости $y<0$, следовательно

$$\log|R_n(x+iy)| \leqslant \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|R_n(\xi)|}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi \quad \text{при } y>0 \tag{8}$$

и

$$\log|R_n(x+iy)| \leqslant \log\prod_{k=0}^{n}\left|\frac{x+iy-i\lambda_k}{x+iy+i\lambda_k}\right| + \frac{|y|}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|R_n(\xi)|}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi$$
$$\text{при } y<0. \tag{9}$$

При $y<0$ и $0<\vartheta<1$, если $|y| \leqslant \vartheta\lambda_0$, имеем (см. [6])

$$\left|\frac{x+iy-i\lambda_k}{x+iy+i\lambda_k}\right|^2 = 1-\frac{4\lambda_k}{x^2+(\lambda_k+y)^2}y = 1+\frac{4\lambda_k}{x^2+(\lambda_k-|y|)^2}|y| \leqslant$$
$$\leqslant 1+\frac{4\lambda_k}{(1-\vartheta)^2\lambda_k^2}|y| = 1+\frac{4}{(1-\vartheta)^2}\frac{|y|}{\lambda_k}.$$

Отсюда

$$\log\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x+iy-i\lambda_k}{x+iy+i\lambda_k}\right| \leqslant \frac{2|y|}{(1-\vartheta)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}, \quad -\vartheta\lambda_0 \leqslant y < 0. \tag{10}$$

Перейдем к оценке $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2+(x-\xi)^2}$ при $y>0$.

Пусть $0<a<q(\rho_n)$ любое число. Рассмотрим два случая.

*Первый случай.* Пусть $x \geqslant q(\rho_n)-a$, т. е. $\rho_n \leqslant p(x+a)$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2+(x-\xi)^2}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{-(x+a)} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2+(x-\xi)^2}\, d\xi + \int\limits_{-(x+a)}^{x+a} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2+(x-\xi)^2}\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{x+a}^{\infty} \frac{\log |R_n(\xi)|}{y^2+(x-\xi)^2}\, d\xi = J_1+J_2+J_3.$$

Из условия (5) имеем

$$\log |R_n(\xi)| \leqslant p(x+a)$$

при $|\xi| \leqslant x+a$, поэтому

$$J_2 < p(x+a) \int\limits_{-(x+a)}^{x+a} \frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} < p(x+a) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{y}\, p(x+a). \tag{11}$$

По лемме 1 при $|\xi| \geqslant x+a$ будем иметь

$$|R_n(\xi)| \leqslant e^{p(x+a)} \prod_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{1+|\Phi_1(i\lambda_k)|^2 \Phi_1^2(\xi)}{\Phi_1^2(\xi)+|\Phi_1(i\lambda_k)|^2}},$$

где

$$\Phi_1(\xi) = \frac{\xi}{x+a} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{x+a}\right)^2 - 1}\,.$$

Учитывая это, получаем

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x+a}^{\infty} \log \frac{1+|\Phi_1(i\lambda_k)|^2 \Phi_1^2(\xi)}{\Phi_1^2(\xi)+|\Phi_1(i\lambda_k)|^2} \frac{d\xi}{(\xi-x)^2}.$$

Интегрированием по частям находим

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x+a}^{\infty} \frac{(|\Phi_1(i\lambda_k)|^2-1)\, \Phi_1'(\xi)\, \Phi_1(\xi)\, (|\Phi_1(i\lambda_k)|^2+1)}{[1+|\Phi_1(i\lambda_k)|^2 \Phi_1^2(\xi)]\, [\Phi_1^2(\xi)+|\Phi_1(i\lambda_k)|^2]} \times$$

$$\times \frac{d\xi}{\xi-x}.$$

После замены переменной $\frac{\xi}{x+a}=\frac{1}{t}$ имеем

$$\Phi_1(\xi)=\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t},\quad \Phi_1'(\xi)=\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{(x+a)\sqrt{1-t^2}},$$

$$\frac{d\xi}{\xi-x}=-\frac{x+a}{t[a+(1-t)x]}dt,$$

поэтому

$$J_3<\frac{p(x+a)}{a}+\sum_{k=0}^{n}(|\Phi_1(i\lambda_k)|^2-1)\times$$

$$\times\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}[a+(1-t)x][t^2+(1+\sqrt{1-t^2})^2|\Phi_1(i\lambda_k)|^2]}\times$$

$$\times\frac{t^2(\sqrt{1-t^2}+1)^2(|\Phi_1(i\lambda_n)|^2+1)\,dt}{[t^2|\Phi_1(i\lambda_k)|^2+|1+\sqrt{1-t^2}|^2]}.$$

После некоторого упрощения получаем

$$J_3<\frac{p(x+a)}{a}+\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}(1-|\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2})\int_0^1\frac{1+|\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

или

$$J_3<\frac{p(x+a)}{a}+\frac{\pi}{a}\sum_{k=0}^{n}(1-|\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2}).$$

Наконец, так как

$$|\Phi_1(i\lambda_k)|^{-2}=2\left(\frac{\lambda_k}{x+a}\right)^2-2\frac{\lambda_k}{x+a}\sqrt{\left(\frac{\lambda_k}{x+a}\right)^2+1}+1,$$

то

$$J_3<\frac{p(x+a)}{a}+2\frac{\pi}{a}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda_k}{x+a}\right)^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{x+a}{\lambda_k}\right)^2}-1\right],$$

или, окончательно,

$$J_3<\frac{p(x+a)}{a}+2\frac{\pi}{a}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{x+a}{\lambda_k}}.$$

Учитывая выбор числа $\rho_n$ (4) и что в этом случае $q(\rho_n)\leqslant x+a$, приходим к оценке

$$J_3<\frac{p(x+a)}{a}+\frac{\pi}{2a}\rho_n\leqslant\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{p(x+a)}{a}.$$

Такую же оценку получим и для $J_1$, и, кроме того, эти оценки будут верны и при $x\geqslant-[q(\rho_n)-a]$. Складывая все оценки, получим

$$\log|R_n(x+iy)| \leqslant p(|x|+a) + \left(1+\frac{2}{\pi}\right)\frac{p(|x|+a)}{a}\,y \qquad (12)$$

при $y>0$ и $|x| \geqslant q(\rho_n)-a$.

*Второй случай*. Пусть теперь $0 \leqslant x < q(\rho_n)-a$. Тогда из (11) имеем

$$J_2 < \frac{\pi}{y}\,p(x+a).$$

Далее

$$J_3 < \int\limits_{x+a}^{\infty} \frac{\log|R_n(\xi)|}{(\xi-x)^2}\,d\xi = \int\limits_{x+a}^{q(\rho_n)} \frac{\log|R_n(\xi)|}{(\xi-x)^2}\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{q(\rho_n)}^{\infty} \frac{\log|R_n(\xi)|}{(\xi-x)^2}\,d\xi = J_3' + J_3''.$$

Из (5) при $|\xi| < q(\rho_n)$ имеем $|R_n(\xi)| \leqslant e^{\rho_n}$, следовательно, по лемме 1

$$|R_n(\xi)| \leqslant e^{\rho_n}\prod_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{1+|\Phi_2(i\lambda_k)|^2\,\Phi_2^2(\xi)}{\Phi_2^2(\xi)+|\Phi_2(i\lambda_k)|^2}} \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant q(\rho_n),$$

где

$$\Phi_2(\xi) = \frac{\xi}{q(\rho_n)} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{q(\rho_n)}\right)^2 - 1}\,.$$

Подставив эту оценку в выражение для $J_3''$, получим

$$J_3'' < \rho_n \int\limits_{q(\rho_n)}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi-x)^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{q(\rho_n)}^{\infty} \log\frac{1+|\Phi_2(i\lambda_k)|^2\,\Phi_2^2(\xi)}{\Phi_2^2(\xi)+|\Phi_2(i\lambda_k)|^2}\,\frac{d\xi}{(\xi-x)^2}.$$

После замены переменной $\dfrac{\xi}{q(\rho_n)} = \dfrac{1}{t}$ и интегрирования по частям, как и при оценке интеграла $J_3$ в первом случае, придем к оценке

$$J_3'' < \frac{\rho_n}{q(\rho_n)-x} + \frac{\pi}{q(\rho_n)-x}\sum_{k=0}^{n}\left(1-|\Phi_2(i\lambda_k)|^{-2}\right),$$

или

$$J_3'' < \frac{\rho_n}{q(\rho_n)-x} + \frac{2\pi}{q(\rho_n)-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{q(\rho_n)}{\lambda_k}}.$$

Отсюда и из (4) будем иметь

$$J_3'' < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x}.$$

Далее,

$$J_3' < \int\limits_{x+a}^{q(\rho_n)} \frac{p(\xi)}{(\xi - x)^2} d\xi = -\int\limits_{x+a}^{q(\rho_n)} p(\xi)\, d\frac{1}{\xi - x} = -\frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} +$$

$$+ \frac{p(x+a)}{a} + \int\limits_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x}.$$

В итоге получим оценку

$$J_3 < \frac{p(x+a)}{a} + \frac{\pi}{2} \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} + \int\limits_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x}.$$

Но из уравнения

$$\int\limits_{x+a}^{q(\rho_n)} \frac{p(\xi)}{(\xi - x)^2} d\xi + \frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} = \frac{p(x+a)}{a} + \int\limits_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x}$$

следует

$$\frac{\rho_n}{q(\rho_n) - x} < \frac{p(x+a)}{a} + \int\limits_{p(x+a)}^{n} \frac{dz}{q(z) - x},$$

откуда и из последней оценки для $J_3$ будем иметь

$$J_3 < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left\{ \frac{p(x+a)}{a} + \int\limits_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x} \right\}.$$

Такую же оценку получим и для $J_1$. Складывая оценки инте-гралов $J_1$, $J_2$, $J_3$, получим

$$\log |R_n(x + iy)| < p(x+a) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left\{ \frac{p(x+a)}{a} + \int\limits_{p(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x} \right\}$$

при $0 < x < q(\rho_n) - a, \quad y > 0$.

Такая же оценка имеет место и при $-|q(\rho_n) - a| < x \leqslant 0$, сл-довательно,

$$\log |R_n(x + iy)| <$$

$$< p(|x| + a) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left\{ \frac{p(|x| + a)}{a} + \int\limits_{p(|x|+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - |x|} \right\} y \; (1$$

при $0 \leqslant |x| < q(\rho_n) - a, \quad y > 0$.

Как видно из (8) и (9), в случае $y<0$ к оценкам (12) и (13) нужно прибавить правую часть оценки (10). Тогда, при произвольном $\vartheta$, $0<\vartheta<1$, для значений $-\vartheta\lambda_0 \leqslant y < 0$ будем иметь

$$\log|R_n(x+iy)|<p(|x|+a)+\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\left\{\frac{p(|x|+a)}{a}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{p(|x|+a)}^{\rho_n}\frac{dz}{q(z)-|x|}\right\}|y|+\frac{2}{(1-\vartheta)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}|y| \quad \text{при} \quad 0\leqslant|x|<q(\rho_n)-a$$

и

$$\log|R_n(x+iy)|<p(|x|+a)+\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\frac{p(|x|+a)}{a}|y|+$$

$$+\frac{2}{(1-\vartheta)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}|y| \quad \text{при } |x|\geqslant q(\rho_n)-a.$$

Это и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если хоть одно из значений*

$$P=\int\limits_1^{\infty}\frac{p(x)}{x^2}dx \quad \text{и} \quad \Lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

*бесконечно, то при любых* $C\,(C>1)$, $\vartheta\,(0<\vartheta<1)$ *и* $a\,(0<a<q(\rho_n))$ *для значений*

$$|x|\leqslant q(\rho_n)-a, \qquad |y|\leqslant\frac{\log C}{Y_n(x)}$$

*имеет место оценка*

$$|R_n(x+iy)|\leqslant Ce^{p(|x|+a)}.$$

Доказательство. Легко видеть, что интегралы

$$\int^{\infty}\frac{p(x)}{x^2}dx \quad \text{и} \quad \int^{\infty}\frac{dz}{q(z)}$$

сходятся или расходятся одновременно, при этом, если $\int^{\infty}\frac{p(x)}{x^2}dx=+$ $+\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{p(x+a)}^{\rho_n}\frac{dz}{q(z)-x}:\int\limits_1^{\rho_n}\frac{dz}{q(z)}=1$$

равномерно относительно $x$ на любом фиксированном отрезке $0\leqslant$ $\leqslant x\leqslant R$.

В условиях теоремы при фиксированном значении $\vartheta\,(0<\vartheta<1)$ для достаточно больших значений $n\,(n>N)$ будем иметь

$$\vartheta\lambda_0 > \frac{\log C}{Y_n(x)}, \qquad |x| \leqslant q(\rho_n) - a,$$

где $N$ не зависит от $x$. Теорема 1 завершает доказательство.

Очевидно, в случае расходимости интеграла $\int^{\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx$ при произвольном $\vartheta\ (0 < \vartheta < 1)$ для достаточно больших $n$ будем иметь

$$\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \int\limits_{\vartheta(x+a)}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z) - x} < \frac{2}{(1-\vartheta)^2} \int\limits_{1}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} \qquad (|x| \leqslant R).$$

Отсюда и из (7) вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Равномерно при $n \to \infty$ в любом конечном отрезке $[-R, +R]$ имеют место следующие оценки:*

а) *если*

$$\int^{\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx = +\infty \quad и \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty,$$

*то*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{Y_n(x)} \left\{ \int\limits_{1}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \right\} \geqslant \frac{(1-\vartheta)^2}{2};$$

в) *если*

$$\int^{\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx = +\infty \quad и \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty,$$

*то*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{Y_n(x)} \int\limits_{1}^{\rho_n} \frac{dz}{q(z)} \geqslant \frac{(1-\vartheta)^2}{2};$$

с) *если*

$$\int^{\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx < +\infty \quad и \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty,$$

*то*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{Y_n(x)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \geqslant \frac{(1-\vartheta)^2}{2}.$$

2°. Приведем оценки производных рациональных функций, имеющих функциональную мажоранту на всей вещественной оси. Эти оценки получаются при помощи результатов теоремы 3, при этом можно перейти к пределу при $\vartheta \to 0$, ибо окончательные результаты не зависят от $\vartheta$.

Теорема 4. *Равномерно относительно $x$ в любом конечном отрезке в соответствующих условиях теоремы 3 имеют место следующие соотношения*

a) $$\lim_{n\to\infty}\sup |R_n^{(r)}(x)| \left\{\int_1^{\rho_n}\frac{dz}{q(z)}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\right\}^{-r}\leqslant \chi_r e^{p(x)};$$

в) $$\lim_{n\to\infty}\sup |R_n^{(r)}(x)| \left\{\int_1^{\rho_n}\frac{dz}{q(z)}\right\}^{-r}\leqslant \chi_r e^{p(x)};$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\sup |R_n^{(r)}(x)| \left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\right\}^{-r}\leqslant \chi_r e^{p(x)},$$

*где*

$$\chi_r = r!\left(\frac{2e}{r}\right)^r.$$

Приведем еще одну теорему.

Теорема 5. *Если*

$$\int^{\infty}\frac{p(x)}{x^2}\,dx<+\infty \quad и \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}<+\infty,$$

*то при любых $R$ и $a>0$ имеет место оценка*

$$|R_n^{(r)}(x)|\leqslant \chi_r[\delta(R)]^r e^{p(R+a+1)},\quad |x|\leqslant R,$$

*где*

$$\delta(R)=\frac{p(R+a+1)}{a}+\int_{p(R+a+1)}^{\infty}\frac{dz}{q(z)-R-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

*для всех $n$, для которых $\rho_n\geqslant p(R+a+1)$.*

Доказательство. Для данных $R$ и $a$ выберем $n$ так, чтобы $\rho_n>p(R+a+1)$. В силу возрастания функции $Y_n(x)$, если $|x|\leqslant$ $\leqslant R+1$, будем иметь

$$Y_n(x)<\frac{2}{(1-\vartheta)^2}\delta(R).$$

Далее, при достаточно большом $R$ и данном $\vartheta$ имеем $\vartheta\lambda_0>$ $>C_1[\delta(R)]^{-1}$, где $C_1=\dfrac{(1-\vartheta)^2}{2}\log C$, следовательно, по теореме 1, в прямоугольнике $|x|\leqslant R+1$, $|y|\leqslant C_1[\delta(R)]^{-1}$ будем иметь

$$|R_n(x+iy)|<Ce^{p(R+a+1)}$$

По формуле Коши

$$R_n^{(r)}(x) = \frac{r!}{2\pi C_1^r} [\delta(R)]^r \int_0^{2\pi} R_n(x + C_1 \delta_{(R)}^{-1} e^{i\varphi}) e^{-ir\varphi} d\varphi,$$

следовательно,

$$|R_n^{(r)}(x)| < \frac{Cr!}{C_1^r} [\delta(R)]^r e^{p(R+a+1)} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant R.$$

Отсюда, как в [5], получаем искомую оценку.

3°. Пусть, как всегда, $y = p(x)$ непрерывная, неубывающая, четная функция, определенная на всей вещественной оси $(-\infty, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = +\infty$. Отнесем к классу $C[p(x)]$ все функции $f(x)$, непрерывные на оси $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющие условию

$$\lim_{x\to\infty} e^{-p(x)} f(x) = 0.$$

Обозначим

$$E_n[f, p] = \inf_{\{R_n\}} \{ \max_{-\infty < x < +\infty} e^{-p(x)} |f(x) - R_n(x)| \},$$

где

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x + i\lambda_k)} \quad (P_n(x) - \text{полином степени } n).$$

Как уже было отмечено, достаточными условиями полноты системы $\{R_n(x)\}$ в классе $C[p(x)]$ являются условия

$$\int^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty. \tag{14}$$

По методу М. М. Джрбашяна [5] легко установить следующую теорему (при этом применяется оценка теоремы 4).

Теорема 6. *Пусть функция $f(x)$ определена и принадлежит классу $C[p(x)]$ на оси $(-\infty, +\infty)$. При условии (14), если*

$$E_n[f, p] \leqslant K \left\{ \int_1^{\lambda_n} \frac{dz}{q(z)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \right\}^{-p-\delta},$$

*где $K$ — константа, не зависящая от $n$, $p \geqslant 0$ — целое, $0 < \delta \leqslant 1$, то на всякой конечной части вещественной оси функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $p$ включительно. Кроме того, на всякой конечной части вещественной оси при $0 < \delta < 1$ $f_{(x)}^{(p)} \in Lip\,\delta$, а при $\delta = 1$ $f_{(x)}^{(p)}$ имеет модуль непрерывности*

$$\omega(h, f_{(x)}^{(p)}) < Mh \log \frac{1}{h} \quad (0 < h < 1).$$

Из оценок (12) и (13) приходим к такому результату.

Теорема 7. *При условии* $\int^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx < +\infty$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} E_n[f, p] = 0$, *то* $f(x)$ *будет граничным значением функции, аналитической в верхней полуплоскости.*

Далее, как это делается в [7], получаем следующую теорему.

Теорема 8. *При условии* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} E_n[f, p] = 0$, *то* $f(x)$ *будет граничным значением функции, аналитической в полосе* $-\theta\lambda_0 < y < 0$ $(0 < \theta < 1$ *— произвольное число).*

Эти теоремы показывают, что условия (14) также и необходимы для полноты системы $\{R_n(x)\}$ во всем классе $C[p(x)]$ при взвешенно-равномерной аппроксимации.

В заключение выражаю искреннюю благодарность академику АН Армянской ССР, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23 X 1961

Հ. Մ. Քոչարյան

## ԱՄԲՈՂՋ ԻՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ԿՇՌՅԱԼ-ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Դիցուք* $p(x) \geqslant 0$ *զույգ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ ամբողջ* $-\infty < x < +\infty$ *իրական առանցքի վրա, մոնոտոն աճում է, ընդ որում* $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = +\infty$: *Նշանակենք* $L_2[p(x)]$ *այն* $f(x)$ *ֆունկցիաների դասը, որոնք որոշված են և չափելի են* $(-\infty, +\infty)$ *առանցքի վրա և որոնց համար*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(x)} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

*Կամայական* $\{\alpha_k\}$ $(\operatorname{Im} \alpha_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots)$ *կոմպլեքս թվերի հաջորդականության համար վերցնենք*

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (z + \alpha_k)}$$

*ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմը, որտեղ* $P_n(z)$*-ը* $n$*-ից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ է:*

*Ելնելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի այն արդյունքից, որ*

$$\int_{1}^{\infty}\frac{p(x)}{x^2}\,dx=+\infty \quad \text{և} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Jm}\alpha_k}{1+|\alpha_k|^2}=+\infty$$

պայմանների դեպքում $\{R_n(z)\}$ սիստեմը լրիվ է $L_2[p(x)]$ դասում, նե... հոդվածում ուսումնասիրվում է $\{R_n(z)\}$ ֆունկցիաներով լավագույն մոտա... կումների կարգի նկարագրման և մոտարկվող ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հա... կությունների միջև եղած կապը: Այդ նպատակի համար նախ Մ. Մ. Ջրբա... յանի մեթոդով [5] ստանում ենք $\{R_n'(x)\}$ ֆունկցիաների կարգի գն... հատականներ $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}|R_n(x)|<+\infty$ պայմանի դեպքում:

Այդ գնահատականների միջոցով ապացուցվում են Ս. Ն. Բերնշտեյն... թեորեմների տիպի լավագույն մոտավորության հակադարձ թեորեմներ:

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Hall T.* Sur l'approximation polynomiale des fonctions continues d'une variable, 9 Congr. des Math. Scand., 1939.
2. *Шагинян А. Л.* О полноте семейств аналитических функций в комплексной области. Сообщение Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 1, 1947.
3. *Isumi S.* and *Hawata T.* Quasi-analytic class and closure of $\{t^n\}$ in the interval $(-\infty, +\infty)$. Tohoku Math. Journ., 43, 1937.
4. *Джрбашян М. М.* О метрических признаках полноты системы полиномов в неограниченных областях. ДАН АрмССР, 7, № 1, 1947.
5. *Джрбашян М. М.* Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сборник, новая серия, **36**, (78): 3, 1955.
6. *Джрбашян М. М.* О двух квази-аналитических классах функций на вещественной оси. Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, **8**, № 1, 1955.
7. *Кочарян Г. С.* О приближении рациональными функциями в комплексной области. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, **11**, № 4, 1958.