

С. Е. Карапетян

Линейные многообразия прямых и плоскостей четырёхмерного проективного пространства

Введение

Как известно, теория линейчатой геометрии трехмерного проективного пространства сводится к теории подмногообразий плюскеровой гиперквадрики $\Omega(1, 3)$ пятимерного проективного пространства P_5 (см., например, [1]). При этом каждая прямая (xu) пространства P_3 отображается в точку гиперквадрики $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$ пространства P_5 , где $p_{ij} = -p_{ji} = x^i y^j - x^j y^i$. В этом отображении (которое называется плюскеровым) линейным образам линейчатой геометрии P_3 соответствуют плоскости различных измерений в P_5 . Если эти плоскости касаются гиперквадрики, то их пересечения с $\Omega(1, 3)$ являются отображениями особых линейных образов пространства P_3 . Косые линейчатые поверхности этого пространства классифицируются по признаку принадлежности ее отображения к плоскостям различных измерений в P_5 . Развертывающиеся поверхности представляются линиями, касательные к которым совпадают с образующими гиперквадрики $\Omega(1, 3)$.

В настоящей работе изучается аналогичное отображение для прямых и плоскостей пространства P_4 . Каждая прямая этого пространства отображается в точку грассманова многообразия $\Omega(1, 4)$ проективного девятимерного пространства P_9 и каждая плоскость пространства P_4 отображается в точку дуального грассманова многообразия $\Omega(2, 4)$ пространства P_9 [2]. Таким образом, теория многообразий прямых и плоскостей сводится к теории подмногообразий грассмановых многообразий $\Omega(1, 4)$ и $\Omega(2, 4)$ проективных пространств P_9 и P_9^* .

Такой подход представляется очень естественным и обладает двумя преимуществами: во-первых, все рассматриваемые задачи находятся в тесной связи с алгебраической геометрией, во-вторых, рассматривая подмногообразия грассманова многообразия $\Omega(m, n)$, мы фактически имеем дело с многомерными поверхностями, погруженными в $(C_{n+1}^{m+1} - 1)$ -мерные пространства, следовательно имеем возможность пользоваться богатыми результатами, полученными в этом направлении.

В первом параграфе изучаются некоторые свойства грассманового многообразия $\Omega(1, 4)$ в P_4 . Во втором параграфе рассматривается линейное пятимерное многообразие прямых L_3 и его особое многообразие. Нуль-система, порожденная этим многообразием, представляет корреляцию вообще с одной особой точкой. В § 3 рассматривается линейное четырехмерное многообразие L_4 и его особые многообразия. Порожденная нуль-система, вообще, имеет особую кривую второго порядка. В § 4 изучается линейное трехмерное многообразие прямых L_2 и его особые многообразия. Порожденная нуль-система имеет особую двумерную поверхность.

Линейное двумерное многообразие прямых L_2 тесно связывается с конфигурацией Власова и геометрическое место этих прямых является гиперповерхностью третьего порядка, названной нами поверхностью Власова. В параграфах 5 и 6 изучаются многообразия L_2 и рассматриваются некоторые свойства конфигурации и поверхности Власова. В § 9 указываются поверхность и конфигурация двойственные с поверхностью и конфигурацией Власова. В § 7 изучается линейное многообразие прямых L_1 . Эти прямые образуют некоторую поверхность, которая сама себе двойственна. В § 9 эти результаты автоматически повторяются для линейных многообразий плоскостей пространства P_4 .

Все полученные здесь результаты находятся в тесной связи с линейной геометрией окружностей нашего трехмерного пространства, т. е. с задачей, поставленной еще Феликсом Клейном (см. [4], стр. 125—126).

§ 1. Грассманово многообразие

Пусть прямая в P_4 определяется точками $x(x^i)$, $y(y^i)$. Грассманово произведение этих точек имеет 10 компонентов, которые являются минорами второго порядка матрицы, составленной из координат точек x и y

$$(xy) = ik\bar{i}\bar{k}, \quad i < k \text{ (суммировать по } i, k = 1, 2, \dots, 5), \quad (1)$$

где $ik = x^i y^k - x^k y^i$ — грассмановы (или плюккеровы) координаты прямой xy , а $\bar{i}\bar{k} = (A_i A_k)$ — грассмановы произведения вершин координатного репера A_i . Десять координат ik прямой p удовлетворяют пяти квадратичным соотношениям

$$\varphi_1(pp) = \underline{12\ 34} - \underline{13\ 24} + \underline{14\ 23} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi_2(pp) = \underline{12\ 35} - \underline{13\ 25} + \underline{15\ 23} = 0,$$

$$\varphi_3(pp) = \underline{12\ 45} - \underline{14\ 25} + \underline{15\ 24} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi_4(pp) = \underline{23\ 45} - \underline{24\ 35} + \underline{25\ 34} = 0,$$

$$\varphi_5(pp) = \underline{13\ 45} - \underline{14\ 35} + \underline{15\ 34} = 0,$$

из которых независимы только три соотношения и, наоборот, если 1 чисел удовлетворяют соотношениям (2), то они являются грассмановыми

выми координатами прямой в P_4 . Таким образом, если числа ik рассматривать как однородные координаты точки в P_9 , то прямые P_4 представляются точками грассманова многообразия (2) девятимерного пространства P_9 . Размерность грассманова многообразия (2) равна шести, так как прямая в P_4 определяется шестью параметрами, а порядок равен пяти (см. [2], т. II, стр. 404), т. е. общая трехмерная плоскость пересекается с поверхностью (2) ровно в пяти точках.

Рассмотрим некоторые элементарные свойства отображения прямых из P_4 в P_9 . 1) Две прямые p и q четырехмерного пространства P_4 пересекаются тогда и только тогда, когда их отображения лежат на одной образующей прямой поверхности (2). Действительно, пересечение прямых p и q равносильно требованию, чтобы две пары точек, определяющих эти прямые, лежали на одной плоскости, т. е. все миноры 4-го порядка матрицы этих точек должны равняться нулю, что приводит их к обращению в нуль полярных форм φ_i для этих двух прямых

$$\varphi_i(pq) = 0. \quad (3)$$

В силу этих соотношений мы будем иметь $\varphi_i(p + \lambda q, p + \lambda q) = 0$ для любого λ . 2) Здесь мы одновременно доказали, что точки образующей прямой поверхности (2) представляют все прямые одного пучка.

Для краткости изложения введем следующую терминологию: пучок прямых назовем *пучком одного измерения*, все прямые 3-пространства, проходящие через данную точку, — *пучком двух измерений*, все прямые 4-пространства, проходящие через одну точку, — *пучком трех измерений*. Однопараметрическое и двухпараметрическое семейства прямых, лежащих на одной 2-плоскости, назовем соответственно *одномерным* и *двумерным* плоским полем. 3) Так как каждые две прямые двумерного плоского поля пересекаются, то двумерное поле прямых представляется всеми точками образующей 2-плоскости поверхности (2) и, следовательно, одномерное плоское поле представляется некоторой кривой на этой 2-плоскости. 4) Двумерные и трехмерные пучки прямых представляются, соответственно, образующими 2- и 3-плоскостями поверхности (2). Таким образом, все образующие 2-плоскости поверхности (2) по их происхождению делятся на две серии. Две серии плоскостей, представляющие соответственно двумерные плоские поля прямых и двумерные пучки прямых, назовем образующими *первой и второй серии*. 5) Прямые пучка трех измерений представляются всеми точками некоторой образующей 3-плоскости поверхности (2). 6) Прямые трехмерного пространства представляются всеми точками некоторого квадратичного многообразия $\Omega(1, 3)$ четырех измерений, принадлежащего поверхности (2). 7) Через две не принадлежащей к одной образующей точки поверхности (2) проходит единственное квадратичное многообразие $\Omega(1, 3)$. Последнее вытекает из того, что две непересекающиеся прямые в P_4 определяют одно 3-пространство. 8) Через каждую образующую пря-

мую поверхности (2) проходит единственная образующая плоскость первой серии, ∞^1 образующих плоскостей второй серии и единственная образующая 3-плоскость, ибо каждая образующая прямая поверхности (2) отображает пучок прямых из P_4 . 9) Три точки общего положения поверхности (2) определяют единственную четвертую точку той же поверхности, находящуюся на одной образующей с каждой из данных трех точек. Последнее вытекает из того, что в P_4 существует единственная прямая, пересекающаяся одновременно с тремя данными в общем положении прямыми. 10) Все прямые, пересекающиеся с фиксированной прямой p пространства P_4 , отображаются в точки поверхности (2), принадлежащие некоторому четырехмерному конусу K_4^3 с вершиной в точке p . Касательная 6-плоскость поверхности (2) в точке p пересекается с этой поверхностью по конусу K_4^3 .

§ 2. Линейные пятимерные многообразия прямых в P_4

Начиная с этого параграфа, мы будем рассматривать плоскости различных измерений в пространстве P_5 и выясним, по каким подмногообразиям они пересекаются с поверхностью (2). В P_4 каждому такому подмногообразию будет соответствовать некоторая совокупность прямых, которая называется линейным образом данной размерности.

Прежде всего рассмотрим гиперплоскость в P_5

$$a_{ik}ik = 0, \quad i < k, \quad i, k = 1, 2, \dots, 5. \quad (4)$$

Эта плоскость пересекается с поверхностью (2) в точках, координаты ik которых удовлетворяют системе (2), т. е. размерность линейного образа (4) равна пяти. В силу (1) из (4) получим билинейное соответствие между точками x и y . Каждой точке x соответствуют все точки y некоторой, проходящей через x , гиперплоскости u

$$u_i = a_{ik}x^k, \quad a_{ik} = -a_{ki}, \quad (5)$$

но так как матрица $[a_{ik}]$ кососимметрична и имеет нечетный порядок (он равен пяти), то система $a_{ik}x^k = 0$ имеет ненулевое решение и следовательно, в общем случае для каждой гиперплоскости (4) существует единственная точка x_0 , которой не соответствуют никакие 3-плоскости. Соотношение (5) принято называть нуль-системой для линейного образа (4), а точку x_0 — особой точкой этой нуль-системы.

Таким образом, линейное пятимерное многообразие прямых (L_5) устанавливает нуль-систему с одной особой точкой x_0 . Через каждую точку $x \neq x_0$ пространства проходит двумерный пучок прямых этого многообразия, причем носители (3-пространства) всех этих пучков проходят через особую точку x_0 .

В силу $a_{ik}x_0^k = 0$ всем точкам $x + \lambda x_0$ соответствует только одна 3-плоскость, и наоборот. Таким образом, нуль-система (5) устанавливает

дывает взаимно-однозначное соответствие между прямыми трехмерного пучка с центром x_0 и 3-плоскостями, проходящими через эту точку.

Точно так же можно доказать, что нуль-система (5) каждой не принадлежащей к пучку x_0 прямой p ставит в соответствие некоторую проходящую через x_0 плоскость π . Эта плоскость не пересекается с данной прямой, если последняя не принадлежит многообразию L_5 . Если прямая p принадлежит к линейному многообразию L_5 , то она инцидентна с соответствующей плоскостью π , и наоборот. Всем прямым, принадлежащим плоскости (px_0) , соответствует единственная плоскость π . Если прямая p принадлежит многообразию L_5 , то все прямые плоскости (px_0) также принадлежат к многообразию L_5 , следовательно, такая плоскость принадлежит к числу тех плоскостей, которые соответствуют сами себе (самосопряженные) в нуль-системе (5). Таким образом, все плоскости с общей точкой x_0 разбиваются на два класса — самосопряженные и несамопряженные. Причем все прямые, лежащие на самосопряженных плоскостях, принадлежат к многообразию L_5 , и наоборот, если на плоскости лежит одна не проходящая через x_0 прямая многообразия L_5 , то все прямые этой плоскости принадлежат к L_5 и плоскость самосопряжена относительно нуль-системы (5). На каждой несамопряженной плоскости лежит только один пучок прямых с центром x_0 , принадлежащих многообразию L_5 .

Плоскость, определяемая тремя точками x, y, z в нуль-системе, сопряжена с проходящей через x_0 прямой $u_i = a_{ik}x^k$, $v_i = a_{ik}y^k$, $w_i = a_{ik}z^k$. Эта прямая одновременно сопряжена с трехмерным подпространством (x_0xyz) , следовательно, она пересекается со своей сопряженной плоскостью. На произвольной (не проходящей через x_0) плоскости лежит единственный пучок прямых, принадлежащих многообразию L_5 . Действительно, через каждую точку x этой плоскости проходит единственная лежащая в этой плоскости прямая p , принадлежащая к L_5 (ибо сопряженная с x 3-плоскость пересекается с этой 2-плоскостью, вообще, по одной прямой). Точно так же через точку y этой плоскости проходит прямая q из L_5 . Прямые p и q пересекаются в точке z . Трехмерное подпространство, сопряженное точке z , пересекается с этой плоскостью по двум прямым p и q , следовательно, содержит эту плоскость, т. е. прямые пучка z принадлежат к многообразию L_5 . Существование других прямых, принадлежащих L_5 , означает, что эта плоскость проходит через x_0 , что исключается. Очевидно, что центр, принадлежащих к L_5 , пучка прямых плоскости находится одновременно на сопряженной с этой плоскостью (относительно нуль-системы) прямой.

Линейное пятимерное многообразие прямых L_5 будем называть особым, если число его особых точек больше одного. Для этого необходимо и достаточно, чтобы система $a_{ik}x^k = 0$ имела больше одного решения, т. е. ранг матрицы $\|a_{ik}\|$ должен быть ниже четырех. Но

так как ранг кососимметричной матрицы всегда является четным числом, то в нашем случае он равен двум и, следовательно, особые точки образуют некоторую особую плоскость a . Так как носитель каждого двумерного пучка должен проходить через все особые точки, то все прямые этих пучков и, следовательно, все прямые нашего многообразия пересекаются с фиксированной плоскостью a . Или *особое пятимерное линейное многообразие L_5 является геометрическим местом всех прямых, пересекающих данную плоскость*.

Двойственный результат формулируется так: *особое пятимерное линейное многообразие плоскостей является геометрическим местом всех плоскостей, пересекающих данную прямую*.

Теперь нетрудно заметить, что коэффициенты уравнения (4) являются грассмановыми дуальными координатами плоскости a . Действительно, так как ранг матрицы $[a_{ik}]$ равен двум, то все миноры четвертого порядка этой матрицы обращаются в нуль, и это приводит к пяти равенствам $\varphi_i(aa) = 0$. Но при наличии таких условий a становится координатами 2-плоскости и соотношение (4) показывает, что плоскость a и прямая p с координатами ik пересекаются ([2], гл. I, стр. 322).

Вернувшись к неособому линейному пятимерному многообразию прямых (4), заметим, что все прямые пространства P_4 , проходящие через особую точку x_0 , принадлежат этому многообразию (и это единственный трехмерный пучок, принадлежащий многообразию), а последнее означает, что *каждая гиперплоскость девятимерного пространства содержит одну образующую 2-плоскость грассманова многообразия (2)*. Если она содержит больше одной такой плоскости, то их количество будет ∞^2 и, как мы видели, гиперповерхность (4) представит особое пятимерное линейное многообразие прямых. Особая плоскость этого многообразия содержит ∞^2 прямых и все прямые пространства P_4 , пересекающие каждую из этих прямых, принадлежат многообразию. Следовательно, в P_5 гиперплоскости (4) принадлежат ∞^2 касательных шестимерных подпространств поверхности (2), касающихся во всех точках некоторой образующей 2-плоскости первой серии (отображения особой плоскости a).

Таким образом, гиперплоскость в P_5 либо не содержит ни одной касательной шестимерной плоскости поверхности (2), либо содержит ∞^2 таких плоскостей. Точки касания этих плоскостей принадлежат к некоторой образующей 2-плоскости первой серии.

§ 3. Линейное четырехмерное многообразие прямых

Семимерное подпространство в P_6

$$a_{ik}ik = 0, \quad b_{ik}ik = 0, \quad i < k \quad (6)$$

пересекается с поверхностью (2) по некоторому четырехмерному многообразию L_4 , представляющему *линейное четырехмерное много-*

образе прямых четырехмерного проективного пространства. Все прямые p с грассмановыми координатами ik , удовлетворяющие системе (6), удовлетворяют также уравнению вида

$$(a_{ik} + \lambda b_{ik}) ik = 0, \quad (7)$$

для любого значения λ . Каждая гиперплоскость (7) представляет, вообще, неособое линейное пятимерное многообразие прямых четырехмерного пространства и устанавливает нуль-систему

$$u_i = (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k. \quad (8)$$

Особая точка x соответствия (8) зависит от λ и в P_4 описывает некоторую особую кривую многообразия L_4 . Докажем, что особая кривая многообразия L_4 в общем случае есть линия второго порядка. Действительно, пусть x_0 и y_0 являются особыми точками соответствия (8) для $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Тогда из $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k = 0$ получим

$$a_{ik} y_0^i x^k = 0, \quad b_{ik} x_0^i x^k = 0, \quad (8.1)$$

которые и являются уравнениями плоскости в P_4 . Следовательно, все особые точки лежат на одной плоскости (8.1). Так как из пяти уравнений $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k = 0$ всего четыре независимых, то при наличии (8.1) получатся только два уравнения, из которых, исключив λ , получим

$$(a_{i_1 k} b_{i_2 l} - a_{i_2 k} b_{i_1 l}) x^k x^l = 0, \quad i_1 \neq i_2, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, 5. \quad (8.2)$$

Уравнения (8.1) и (8.2) представляют кривую второго порядка. Теперь мы имеем возможность доказать следующую теорему. *Через каждую точку x проходит пучок прямых многообразия L_4 , исключение составляют только те точки, которые принадлежат особой кривой. Прямые многообразия (6), принадлежащие этим точкам, образуют двумерный пучок.*

Действительно, через каждую точку x пространства P_4 проходят две 3-плоскости, соответствующие этой точке в двух нуль-системах (6). Эти две плоскости пересекаются по плоскости, на которой лежит пучок прямых многообразия (6). Если x принадлежит к особой кривой, то $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) x^k = 0$ и 3-плоскости $u_i^0 = a_{ik} x^k$ и $v_i^0 = b_{ik} x^k$ совпадают, ибо $u_i^0 + \lambda v_i^0 = 0$.

Возвращаясь к системе (8.1) заметим, что при выполнении равенства

$$a_{ik} y_0^i = \mu b_{ik} x_0^i \quad (8.3)$$

две гиперплоскости совпадают, следовательно, теперь все особые точки лежат в одной гиперплоскости. В силу (8.3) все точки прямой $x_0 y_0$ являются особыми точками. Действительно, $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) (\mu x_0^k - \lambda y_0^k) = 0$ выполняется для любого λ , и, наоборот, если все точки прямой $x_0 y_0$ особые, то выполняется (8.3). В силу соотношения (8.3)

одно из многообразий (7) становится особым многообразием*. Следовательно, в случае (8.3) все прямые многообразия L_4 пересекают некоторую фиксированную плоскость.

Допустим, что для $\lambda = \lambda_0$ получается особое многообразие следовательно, $a_{ik} + \lambda_0 b_{ik}$ являются дуальными грассмановыми координатами некоторой плоскости. Особая линия в этом случае, как видели, вырождается в одну прямую $x_0 y_0$. На этой прямой находятся все особые точки за исключением точек плоскости. Плоскость $a_{ik} + \lambda_0 b_{ik}$ и прямая $x_0 y_0$ пересекаются, ибо все особые точки многообразия L_4 в этом случае принадлежат к одной гиперплоскости.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнения (8.1) обращаются в тождества, т. е. когда

$$a_{ik} y_0^i = 0, \quad b_{ik} x_0^i = 0. \quad (8.4)$$

В этом случае числа a_{ik} и b_{ik} являются грассмановыми дуальными координатами некоторых плоскостей a и b , ибо в силу (8.4) каждая из систем $a_{ik} x^k = 0$ и $b_{ik} x^k = 0$ имеет по меньшей мере две особые точки x_0 и y_0 . Эти две плоскости имеют в общем случае одну общую точку $\bar{x}$. Нетрудно заметить, что все остальные особые точки совпадают с $\bar{x}$, т. е. особая кривая сжимается в одну точку. Действительно, так как $\bar{x}$ лежит на плоскостях a и b , то $a_{ik} \bar{x}^k = 0$, $b_{ik} \bar{x}^k = 0$ или $(a_{ik} + \lambda b_{ik}) \bar{x}^k = 0$ для любого значения λ . Наоборот, если особые точки для любого значения λ (кроме $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$) совпадают, то, совмещая эту точку с A_1 , непосредственно получим $a_{1i} = 0$, $b_{1i} = 0$, в силу чего уравнения $\varphi_i(a + \lambda b, a + \lambda b) = 0$ имеют два корня относительно λ .

Наконец, рассмотрим случай, когда плоскости a и b пересекаются по прямой $\bar{x} y$. В этом случае числа $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ для любого λ являются грассмановыми координатами плоскостей. Таким образом, в последних двух случаях многообразие L_4 является геометрическим местом прямых, пересекающих две данные плоскости. В первом случае эти плоскости пересекаются в одной точке, следовательно, все прямые, проходящие через эту точку, также принадлежат L_4 . Во втором случае эти плоскости пересекаются по прямой, следовательно, многообразие L_4 образовано из всех прямых трехмерного подпространства (образованного этими плоскостями) из всех прямых, пересекающих общую прямую этих двух плоскостей.

Теперь будем искать касательные четырехмерные линейные многообразия L_4 , т. е. такие многообразия, для которых семимерная плоскость (6) в P_6 пересекается с касательной 6-плоскостью грассманова многообразия (2) по подпространству размерностью больше четырех. Сначала рассмотрим случай, когда размерность этого под-

* Полагая $x_0 = A_1(10000)$ и $y_0 = A_2(01000)$, нетрудно заметить, что для $\lambda = -\varphi_1(aa) : \varphi_1(ab)$ выражения $\varphi_i(a + \lambda b, a + \lambda b)$ обращаются в нуль.

пространства равна пяти. Пусть прямая $\bar{12}$ принадлежит к плоскости (6), т. е. эта прямая принадлежит к четырехмерному многообразию. Тогда $a_{12} = b_{12} = 0$. Касательная 6-плоскость поверхности (2) в точке $\bar{12}$ определяется уравнениями

$$\underline{34} = 0, \underline{35} = 0, \underline{45} = 0. \quad (9)$$

Эта плоскость пересекается с (6) по пятимерному подпространству тогда и только тогда, когда матрица пяти уравнений (6) и (9) имеет ранг четыре, а это приводит к равенствам

$$a_{13} : a_{14} : a_{15} : a_{23} : a_{24} : a_{25} = b_{13} : b_{14} : b_{15} : b_{23} : b_{24} : b_{25}. \quad (10)$$

Составляя формы $\varphi_i(aa)$, $\varphi_i(bb)$, $\varphi_i(ab)$, мы обнаружим, что равенства (10) равносильны соотношениям

$$\varphi_i(ab) = 2t\varphi_i(aa), \quad \varphi_i(bb) = t^2\varphi_i(aa), \quad (11)$$

где $1:t$ — коэффициент пропорциональности в (10). В силу (11) уравнения

$$\varphi_i(a + \lambda b, a + \lambda b) = \varphi_i(aa) + \lambda\varphi_i(ab) + \lambda^2\varphi_i(bb) = 0 \quad (12)$$

всегда допускают два совпавших решения относительно λ

$$1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2 = 0, \quad (12')$$

а это означает, что в системе (7) содержатся два особых пятимерных многообразия с бесконечно близкими особыми плоскостями, т. е. все прямые нашего четырехмерного линейного многообразия одновременно пересекают две бесконечно близкие плоскости пространства P_4 . Обозначим это многообразие через L_4^1 . Таким образом, *линейное особое многообразие L_4^1 является геометрическим местом всех прямых четырехмерного пространства, пересекающих две бесконечно близкие плоскости и в P_6 это многообразие характеризуется тем, что его соответствующая 7-плоскость пересекается с некоторой касательной 6-плоскостью грассмана многообразия (2) по пятимерному подпространству.*

Нетрудно заметить, что касательное многообразие L_4^1 является предельным положением многообразия L_4 с двумя особыми плоскостями четырехмерного пространства, когда эти плоскости совпадают. В плюккеровом отображении плоскостей пространства P_4 с дуальными координатами, прямая $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ касается грассманова многообразия, но не является для него образующей.

Теперь рассмотрим случай, когда 7-плоскость (6) содержит некоторую касательную 6-плоскость грассманова многообразия. В этом случае ранг матрицы системы (6), (9) должен равняться трем. Это требование приведет к равенствам

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{24} = a_{25} = b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{15} = \\ = b_{23} = b_{24} = b_{25} = 0,$$

которые равносильны соотношениям

$$\varphi_i(aa) = 0, \varphi_i(bb) = 0, \varphi_i(ab) = 0. \quad (13)$$

В силу (13) коэффициенты каждого из уравнений (6) являются грасмановыми координатами плоскости и эти две плоскости пересекаются по прямой, т. е. в этом случае касательное линейное многообразие прямых L_4 (которое мы обозначим через L_4^2) представляет все прямые, пересекающие указанные две плоскости трехмерного подпространства. Таким образом, касательное многообразие L_4^2 является геометрическим местом всех прямых, пересекающих две бесконечно близкие плоскости трехмерного подпространства. В P_9 L_4^2 характеризуется тем, что его соответствующая 7-плоскость содержит некоторую касательную 6-плоскость грасманова многообразия (2). Фактически L_4^2 образуется из двух четырехмерных многообразий прямых; из всех прямых, пересекающих прямую пересечения двух плоскостей и из всех прямых трехмерного подпространства, определяемого этими двумя плоскостями. Следовательно, если 7-плоскость содержит какую-нибудь касательную 6-плоскость грасманова многообразия, то она пересекается с этим многообразием еще по некоторой квадрике $\Omega(1, 3)$.

В дуальном пространстве P_9 прямая $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ в этом случае является образующей для грасманова многообразия.

§ 4. Линейное трехмерное многообразие прямых

Переходим теперь к рассмотрению линейного трехмерного многообразия прямых L_3 . Многообразие прямых L_3 получается из пересечения шестимерной плоскости

$$a_{ik}\bar{i}k = 0, \quad b_{ik}\bar{i}k = 0, \quad c_{ik}\bar{i}k = 0 \quad (14)$$

с грасмановым многообразием (2). Прямые многообразия L_3 удовлетворяют также уравнению вида $(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik})\bar{i}k = 0$ при любых значениях λ и μ . Каждое такое уравнение устанавливает нуль-систему, особые точки которой удовлетворяют уравнениям

$$(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik})x^k = 0. \quad (15)$$

Геометрическое место особых точек является одной двумерной поверхностью с уравнениями:

$$\begin{vmatrix} a_{1k}x^k & b_{1k}x^k & c_{1k}x^k \\ a_{2k}x^k & b_{2k}x^k & c_{2k}x^k \\ a_{3k}x^k & b_{3k}x^k & c_{3k}x^k \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{1k}x^k & b_{1k}x^k & c_{1k}x^k \\ a_{2k}x^k & b_{2k}x^k & c_{2k}x^k \\ a_{4k}x^k & b_{4k}x^k & c_{4k}x^k \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Через каждую, не принадлежащую особой поверхности (16), точку пространства проходит только одна прямая многообразия L_3 .

Через каждую точку особой поверхности (16) проходит одномерный пучок прямых, принадлежащих многообразию L_3 . Действительно, каждое уравнение (14) устанавливает нуль-систему $u_i = a_{ik}x^k$, $v_i = b_{ik}x^k$, $w_i = c_{ik}x^k$ и три гиперплоскости u , v , w , вообще пересекающиеся по прямой, проходящей через точку x . Эти гиперплоскости пересекаются по плоскости только при условии $u_i + \lambda v_i + \mu w_i = (a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik})x^k = 0$, а последнее уравнение показывает, что точка x принадлежит к поверхности (16).

Три точки a_{ik} , b_{ik} и c_{ik} в проективном пространстве P_3 определяют некоторую плоскость (abc) . Она вообще не пересекается с грассмановым многообразием $\varphi_i = 0$ этого пространства и, следовательно, вообще не существуют такие λ и μ , для которых числа $a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}$ были дуальными грассмановыми координатами некоторой плоскости пространства P_3 . Этот случай соответствует наиболее общему линейному многообразию прямых L_3 . Но плоскость (abc) может пересекаться с грассмановым многообразием в одной или в нескольких точках в зависимости от количества решений системы $\varphi_i(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}) = 0$ относительно неизвестных λ и μ . Если эта система имеет конечное число решений, то оно не может быть больше четырех. Плоскость (abc) может содержать одну или две образующие прямые грассманова многообразия и может сама быть образующей плоскостью для этого многообразия. В последних трех случаях наша система имеет бесконечно много решений.

Касательные многообразия L_3 . Рассмотрим случай, когда шестимерная плоскость (14) пересекается с касательной шестимерной плоскостью грассманова многообразия по подпространству, размерность которого больше трех. Пусть эта размерность равна четырем и точка касания совпадает с точкой $\overline{12}$. Касательная плоскость в точке $\overline{12}$ определяется тремя уравнениями (9). Так как точка $\overline{12}$ принадлежит всем плоскостям (14), то $a_{12} = b_{12} = c_{12} = 0$. Плоскости (9) и (14) будут пересекаться по четырехмерному подпространству тогда и только тогда, когда ранг этих двух систем равен пяти. Это требование равносильно соотношениям

$$c_{ik} = \alpha a_{ik} + \beta b_{ik}, \quad i < k, \quad i = 1, 2, \quad k = 3, 4, 5. \quad (17)$$

Теперь нетрудно заметить, что в силу (17) система $\varphi_i(a + \lambda b + \mu c)$, $a + \lambda b + \mu c = (1 + \alpha\mu)^2 \varphi_i(aa) + (\lambda + \mu\beta)^2 \varphi_i(bb) + (1 + \alpha\mu)(\lambda + \mu\beta) \varphi_i(ab)$ допускает два совпавших решения $(1 + \alpha\mu)^2 = 0$, $(\lambda + \mu\beta)^2 = 0$, следовательно, если шестимерная плоскость пересекается с некоторой касательной к грассмановому многообразию 6-плоскостью по четырехмерному подпространству, то ее соответствующее многообразие L_3 образовано из тех прямых P_1 , которые пересекают две бесконечно близкие плоскости. Это многообразие является предельным случаем многообразия L_3 , для которого плоскость (abc)

в дуальном пространстве P_9 пересекается с грассмановым многообразием в двух точках.

Рассмотрим случай, когда шестимерная плоскость (14) пересекается с касательной 6-плоскостью по пятимерному подпространству. В этом случае ранг систем (9) и (14) должен равняться четырем, что приводит к соотношениям

$$c_{ik} = \mu a_{ik}, \quad b_{ik} = \nu a_{ik}; \quad i < k; \quad i = 1, 2; \quad k = 3, 4, 5. \quad (18)$$

Нетрудно заметить, что в силу (18) имеем $\varphi_i(a + \lambda b + \mu c, a + \lambda b + \mu c) = \varphi_i(aa)(1 + \lambda\nu + \mu\mu)^2$ и эти выражения обращаются в нуль для тех значений λ и μ , которые удовлетворяют одному уравнению $1 + \lambda\nu + \mu\mu = 0$. Следовательно, любая точка прямой $(va - b, vc - ub)$ в дуальном пространстве P_9 принадлежит грассмановому многообразию.

Таким образом, рассматриваемый случай характеризуется тем, что плоскость (abc) пересекается с грассмановым многообразием по одной прямой и, следовательно, все прямые нашего многообразия пересекают пучок плоскостей некоторого трехмерного подпространства.

Если ранг систем (9), (14) равен трем, т. е. если шестимерная плоскость (14) одновременно является касательной в точке 12 плоскости грассманова многообразия, то нетрудно заметить, что плоскость (abc) уже становится образующей плоскостью для грассманова многообразия дуального пространства P_9 . Следовательно, наше многообразие в этом случае образовано из прямых, пересекающих все плоскости одного двумерного пучка плоскостей (двумерный пучок плоскостей — это все плоскости P_4 , проходящие через данную прямую).

§ 5. Многообразие прямых L_2

Линейное двухпараметрическое многообразие прямых пространства P_4 в P_9 задается четырьмя линейными уравнениями

$$a_{ik}\bar{ik} = 0, \quad b_{ik}\bar{ik} = 0, \quad c_{ik}\bar{ik} = 0, \quad d_{ik}\bar{ik} = 0. \quad (19)$$

Четыре точки a, b, c и d в дуальном проективном пространстве P_9 определяют одну трехмерную плоскость, которая в общем случае пересекается с грассмановым многообразием в пяти точках. Пусть четыре из этих пяти точек совпадают с точками a, b, c, d , тогда каждая из них представляет плоскость четырехмерного пространства и, следовательно, линейное двухпараметрическое семейство прямых L_2 является геометрическим местом всех прямых, пересекающих четыре плоскости (в общем положении) пространства P_4 .

Так как трехмерное подпространство $(abcd)$ пересекается с грассмановым многообразием еще в пятой точке, то с каждой четверкой плоскостей четырехмерного пространства ассоциируется пятая плоскость и, следовательно, прямые многообразия L_2 пересекают все пять ассоциированных плоскостей одновременно.

В своей докторской диссертации „Полярные системы высших порядков в формах первой степени“ (1910 г.) А. К. Власов указал интересную конфигурацию, представляемую ассоциируемой пятеркой плоскостей четырехмерного пространства (см. [3]).

Возьмем четыре плоскости в общем расположении $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ и α^4 . Подходящим образом выбирая координатный репер A_i и учитывая, что каждые две плоскости в P_4 имеют общую точку, можно их совместить с плоскостями

$$\alpha^1 = (A_1 A_2 A_3), \quad \alpha^2 = (A_1 A_4 M), \quad \alpha^3 = (A_2 A_4 A_5), \quad \alpha^4 = (A_3 M A_5), \quad (20)$$

где $M = a^i A_i$ некоторая фиксированная точка пространства. Каждая тройка плоскостей из четверки (20) имеет единственную секущую плоскость, пересекающую каждую плоскость тройки по прямой. Таких плоскостей будет четыре

$$\beta^1 = (A_4 A_5 M), \quad \beta^2 = (A_2 A_5 A_3), \quad \beta^3 = (A_1 M A_5), \quad \beta^4 = (A_1 A_4 A_2). \quad (21)$$

Две плоскости α^i и β^j противоположны, т. е. одна содержит три из шести точек, другая содержит остальные три. Эти противоположные плоскости пересекаются в одной точке Q^i . Таким образом, мы получаем четыре точки Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 . Власов доказывает, что эти четыре точки лежат в одной плоскости. Тем самым утверждается, что с каждой четверкой плоскостей (20) ассоциируется единственная плоскость

$$\gamma = (Q_1 Q_2 Q_3 Q_4). \quad (22)$$

Нетрудно заметить, что плоскость (22) одновременно ассоциируется и со второй четверкой, ибо системы (20) и (21) обладают свойством взаимности.

Теперь докажем следующую теорему. Все прямые пространства P_4 , пересекающие четыре плоскости конфигурации Власова, пересекаются одновременно с пятой плоскостью этой же конфигурации. Для доказательства этой теоремы сначала найдем координаты точек Q^i . Так как Q^i являются точками пересечения двух плоскостей α^i и β^j , то аналитические точки Q_i напишутся в виде

$$\begin{aligned} Q^1 &= a^1 A_1 + a^2 A_2 + a^3 A_3, & Q^2 &= a^2 A_2 + a^3 A_3 + a^5 A_5, \\ Q^3 &= a^2 A_2 + a^4 A_4 + a^5 A_5, & Q^4 &= a^1 A_1 + a^2 A_2 + a^4 A_4. \end{aligned} \quad (23)$$

Если грассмановы координаты прямой p , пересекающей все плоскости α^i конфигурации Власова, обозначим через ik (ik удовлетворяют соотношениям (2)), то будем иметь

$$a^1 24 - a^1 14 + a^4 12 = 0, \quad 45 = 0, \quad 13 = 0, \quad a^2 35 - a^3 25 + a^5 23 = 0. \quad (24)$$

Текущая точка плоскости γ напишется в виде

$$x = \alpha Q^1 + \beta Q^2 + \gamma Q^3 = \alpha a^1 A_1 + a^2 (\alpha + \beta + \gamma) A_2 + a^3 (\alpha + \beta) A_3 + \gamma a^4 A_4 + a^5 (\beta + \gamma) A_5.$$

Эта точка будет лежать на прямой p тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned} 12a^2(\alpha + \beta) + 23a^3\alpha &= 0, & 24a^1\alpha + 41a^2(\alpha + \beta + \gamma) + 12a^4\gamma &= 0, \\ 34a^5(\beta + \gamma) + 53a^4\gamma &= 0 \end{aligned}$$

допускает нетривиальное решение относительно неизвестных α, β, γ , т. е. когда ранг матрицы этой системы равен двум, а это всегда обеспечивается с силу соотношений (2) и (24). Таким образом теорема доказана.

В силу этой теоремы ассоциированная пятерка плоскостей конфигурации Власова представляется в P_5 пятью точками пересечения трехмерного подпространства с грассмановым многообразием. Но так как это подпространство определяется любой четверкой точек из этой пятерки, то все плоскости в конфигурации Власова равноправны, т. е. любая плоскость из пятерки (20) и (22) ассоциируется с остальными четырьмя плоскостями точно так, как плоскость (22) ассоциируется с плоскостями (20).

Прямые, удовлетворяющие системе (19), удовлетворяют также уравнению

$$(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik} + \nu d_{ik}) \underline{ik} = 0 \quad (25)$$

для произвольных значений λ, μ, ν . Уравнение (25) устанавливает нуль-полярную корреляцию по крайней мере с одной особой точкой так как система $(a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik} + \nu d_{ik}) x^k = 0$ всегда имеет по меньшей мере одно решение x_0 . Геометрическое место особых точек (для различных значений λ, μ, ν) есть гиперповерхность, которая здесь называется *поверхностью Власова*. Это название, как мы увидим, оправдывается тем, что указанная поверхность тесно связана с конфигурацией Власова.

Каждое из уравнений (19) устанавливает нуль-полярную корреляцию $u_i^1 = a_{ik} x^k$, $u_i^2 = b_{ik} x^k$, $u_i^3 = c_{ik} x^k$, $u_i^4 = d_{ik} x^k$. Плоскости u^i этой корреляции проходят через точку x и в общем случае (т. е. для общей точки x) они кроме x другой общей точки не имеют. Исключения составляют только те точки (особые), для которых ранг матрицы $\|u_i^j\|$ меньше четырех, но в этом случае $(u^1 u^2 u^3 u^4) = 0$ и, следовательно, $u_i^1 + \lambda u_i^2 + \mu u_i^3 + \nu u_i^4 = (a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik} + \nu d_{ik}) x^k = 0$, т. е. точка x принадлежит поверхности Власова. Таким образом, все прямые линейного двухпараметрического семейства прямых принадлежат поверхности Власова.

§ 6. Дальнейшие свойства поверхности Власова

Найдем точечное уравнение поверхности Власова. Так как координаты ik прямой p многообразия L_2 для координатного репера § 4. удовлетворяют системе (24), то, полагая, что $p = (xy)$, получим

$$\begin{aligned} x^4y^5 - x^5y^4 = 0, \quad x^1y^3 - x^3y^1 = 0, \quad a^1(x^2y^4 - x^4y^2) - a^2(x^1y^4 - x^4y^1) + \\ + a^4(x^1y^2 - x^2y^1) = 0, \quad a^2(x^3y^5 - x^5y^3) - a^3(x^2y^5 - x^5y^2) + \\ + a^5(x^2y^3 - x^3y^2) = 0. \end{aligned}$$

Согласно предыдущим теоремам, прямые многообразия L_2 пересекаются со всеми плоскостями (20). Следовательно, точку u можно выбрать на плоскости $x^1 = (A_1A_2A_3)$, т. е. полагать $y^4 = y^5 = 0$. Таким образом, исключая y^1, y^2, y^3 , из остальных трех уравнений мы получим искомое уравнение поверхности

$$x^1(a^2x^1 - a^1x^2)(a^3x^5 - a^5x^3) - x^3(a^4x^1 - a^1x^4)(a^5x^2 - a^2x^5) = 0. \quad (25)$$

Как мы видим, поверхность Власова есть гиперповерхность 3-го порядка четырехмерного пространства.

Из уравнения (26) непосредственно вытекает ряд следствий.

(I) Через каждую общую точку поверхности Власова проходит единственная образующая, которая принадлежит многообразию прямых L_2 . (II) Все плоскости конфигурации Власова и все плоскости (21) его сопряженной конфигурации являются одновременно образующими плоскостями поверхности Власова. Таким образом, поверхность Власова обладает девятью образующими плоскостями. (III) Поверхность Власова однозначно определяется одноименной конфигурацией, т. е. она является геометрическим местом прямых, пересекающих все плоскости конфигурации. (IV) Поверхность Власова является одновременно носителем и второго (сопряженного с первым) многообразия прямых $\bar{L}_2$. Действительно, прямые, пересекающие все плоскости (21), также лежат на поверхности Власова. (V) На поверхности Власова существуют десять точек, через каждую из которых проходит пучок образующих прямых, принадлежащих L_2 . Действительно, каждая пара плоскостей из четверки (2) пересекается в одной точке. Через эту точку проходит пучок прямых, пересекающих остальные две плоскости. Следовательно, этот пучок принадлежит многообразию L_2 . Так как в конфигурации Власова все плоскости (20) и (22) равноправны, то количество этих точек будет $C_5^2 = 10$. На каждой плоскости (20) и (22) конфигурации Власова будут находиться четыре точки из этих десяти. Плоскость, из которой лежит этот пучок прямых многообразия L_2 , также содержит три точки из этих десяти. Например, пучок с центром A_1 лежит на плоскости $(A_1A_2Q^4)$. Аналогично можно доказать, что существует десять точек на поверхности Власова, через каждую из которых проходит пучок образующих прямых, принадлежащих сопряженному (с L_2) многообразию $\bar{L}_2$. Но эти точки совпа-

дают и всего на поверхности Власова для обоих сопряженных многообразий L_2 и $\bar{L}_2$ будем иметь 10 таких точек. Плоскости, на которых лежат пучки многообразий L_2 и $\bar{L}_2$, также совпадают, но пучки не совпадают. Например, для L_2 плоскость носит пучок прямых с центром A_1 , а для $\bar{L}_2$ та же самая плоскость носит пучок с центром A_2 . Следовательно, прямая A_1A_2 принадлежит к многообразиям L_2 и $\bar{L}_2$ одновременно.

Частные случаи поверхности Власова. Как мы видели, плоскость $(abcd)$ в общем случае пересекается с грассмановым многообразием в пяти точках, представляющих пять ассоциированных плоскостей конфигурации Власова в P_4 , и прямые, пересекающие эти плоскости, образуют поверхность Власова. Мы здесь только перечислили естественно возникающие частные случаи, когда подпространство $(abcd)$ пересекается с грассмановым многообразием по прямой, по плоскости и, наконец, само это подпространство является образующей 3-плоскостью грассманова многообразия.

Во всех этих случаях получаются частные случаи поверхности Власова, подробное рассмотрение которых мы здесь опускаем.

§ 7. Многообразие прямых L_1

Четырехмерное подпространство, определяемое уравнениями

$$a_{ik}ik = 0, b_{ik}ik = 0, c_{ik}ik = 0, d_{ik}ik = 0, l_{ik}ik = 0 \quad (27)$$

в девятимерном пространстве, пересекается с грассмановым многообразием по некоторой кривой, представляющей линейное однопараметрическое семейство прямых L_1 четырехмерного пространства. Подпространство $(abcde)$ в дуальном P_5 пересекается с грассмановым многообразием этого пространства также по некоторой кривой. Следовательно, подпространство $(abcde)$ содержит ∞^1 точек, представляющих плоскости пространства P_4 , и, не изменяя подпространство (27), мы можем точки a, b, c, d, e выбрать так, чтобы их координаты стали грассмановыми дуальными координатами пяти плоскостей пространства P_4 . Но тогда из (27) будем иметь, что линейное однопараметрическое семейство прямых L_1 пространства P_4 образовано из всех прямых, пересекающих одновременно пять фиксированных в общем положении плоскостей. Так как подпространство $(abcde)$ пересекается с грассмановым многообразием по кривой, то с каждой пятеркой плоскостей пространства P_4 однозначно связывается ∞^1 плоскостей и, следовательно, лучи многообразия L_1 , пересекая эти пять плоскостей, пересекают и все ∞^1 плоскостей, с ними связанных.

Таким образом, с многообразием прямых L_1 ассоциируется однопараметрическое семейство плоскостей и, следовательно, полученная конфигурация сама себе двойственна.

§ 8. Многообразие прямых L_0

Трехмерное подпространство имеет пять общих точек с грассмановым многообразием девятимерного пространства. Следовательно, многообразие прямых L_0 в общем случае образовано из пяти прямых. Но так как трехмерное подпространство в P_9 определяется четырьмя точками, то, взяв эти точки на грассмановом многообразии, мы можем сказать, что с каждой четверкой прямых четырехмерного пространства ассоциируется пятая прямая. Пять ассоциированных прямых образуют конфигурацию, двойственную конфигурации Власова.

Коэффициенты уравнений трехмерного подпространства P_3 образуют шесть точек в дуальном пространстве P_6 , которыми определяется пятимерное подпространство. Это подпространство пересекается с грассмановым многообразием по двумерному подмногообразию, представляющему двухпараметрическое семейство плоскостей пространства P_4 . Все плоскости этого семейства пересекаются с пятью прямыми двойственной конфигурации Власова. Следовательно, эти плоскости образуют двойственную „поверхность“ Власова. Двойственная поверхность Власова является поверхностью третьего „класса“ в том смысле, что через каждую плоскость пространства P_4 проходят три ее „касательных“ гиперплоскости.

Очевидно, мы можем рассматривать также двумерное, одномерное и нульмерное подпространства в P_9 , но результаты, как и в предыдущем случае, будут двойственны результатам, полученным соответственно для многообразий L_3 , L_4 и L_5 .

§ 9. Двойственность

Резюмируя основные результаты, полученные для линейных многообразий прямых четырехмерного проективного пространства, и имея в виду принцип двойственности в этом пространстве (точка — трехмерное подпространство, прямая — плоскость), можно составить следующую таблицу.

 L_5 P_5

1) Каждой точке пространства P_4 инцидентен двухмерный пучок прямых многообразия L_5 . Трехмерные подпространства этих пучков инцидентны неподвижной особой точке многообразия.

2) Особое многообразие L_5 образуется из всех прямых, пересекающих данную плоскость.

1) Каждой гиперплоскости пространства P_4 инцидентен двухмерный пучок плоскостей многообразия P_5 . Точки этих пучков инцидентны неподвижной особой гиперплоскости многообразия.

2) Особое многообразие P_5 образуется из всех плоскостей, пересекающих данную прямую.

L_4

1) Каждой общей точке пространства инцидентен пучок прямых многообразия L_4 . Общее многообразие L_4 имеет особую кривую второго порядка. Каждой точке этой кривой инцидентен двумерный пучок прямых многообразия L_4 .

2) Особое многообразие L_4 образовано из всех прямых, пересекающих две неподвижные плоскости трехмерного или четырехмерного пространства.

 L_3

1) Каждой общей точке пространства P_4 инцидентна только одна прямая многообразия L_3 . Многообразие L_3 имеет особую двумерную поверхность. Каждой точке этой поверхности инцидентен пучок прямых многообразия L_3 .

 L_2

1) Многообразие прямых L_2 является геометрическим местом всех прямых, пересекающих четыре неподвижные плоскости.

2) С каждой четверкой плоскостей (в общем положении) ассоциируется пятая плоскость, которая характеризуется тем, что она пересекает все прямые многообразия L_2 , определяемого четырьмя данными плоскостями.

 P_4

1) Каждой общей гиперплоскости пространства инцидентен пучок плоскостей многообразия P_4 . Общее многообразие P_4 имеет особый конус (однопараметрическое семейство гиперплоскостей, инцидентных неподвижной прямой) второго класса (через каждую точку пространства проходят две гиперплоскости этого семейства). Каждой гиперплоскости этого конуса инцидентен двумерный пучок плоскостей многообразия P_4 .

2) Особое многообразие P_4 образовано из всех плоскостей, пересекающих две неподвижные прямые двумерного или трехмерного пространства.

 P_3

1) Каждой общей гиперплоскости пространства P_4 инцидентна только одна плоскость многообразия P_3 . Многообразие P_3 имеет особую „поверхность“ (двухпараметрическое семейство гиперплоскостей). Каждой гиперплоскости этой „поверхности“ инцидентен пучок плоскостей многообразия P_3 .

 P_2

1) Многообразие плоскостей P_2 является геометрическим местом всех плоскостей, пересекающих четыре неподвижные прямые.

2) С каждой четверкой прямых (в общем положении) ассоциируется пятая прямая, которая характеризуется тем, что она пересекает все плоскости линейного многообразия плоскостей P_2 , определяемого четырьмя данными прямыми.

3) Многообразие прямых L_2 образует некоторую гиперповерхность 3-го порядка, которая называется поверхностью Власова.

4) Все пять плоскостей конфигурации Власова и их сопряженные плоскости являются образующими плоскостями поверхности Власова.

5) Каждой общей точке поверхности Власова инцидентны две образующие прямые, из которых одна принадлежит многообразию L_2 , другая — сопряженному многообразию $\bar{L}_2$.

L_1

1) Многообразие прямых L_1 образовано из всех прямых, пересекающих одновременно пять фиксированных (в общем положении) плоскостей.

2) С каждой пятеркой плоскостей в P_4 связываются ∞^1 плоскостей, характеризующихся тем, что каждая из них пересекается со всеми прямыми многообразия L_1 , определяемого этой пятеркой.

Дальнейшее продолжение этого списка приводит к уже перечисленным (начиная с конца) результатам с переставленными столбцами.

3) Многообразие плоскостей Π_2 образует некоторую „гиперповерхность“ (трехпараметрическое семейство гиперповерхностей) третьего класса (через каждую плоскость пространства проходят три гиперплоскости из этого семейства), которая называется двойственной поверхностью Власова.

3) Все пять прямых двойственной конфигурации Власова и их сопряженные прямые являются „образующими“ для поверхности Власова, т. е. многообразие всех гиперплоскостей, проходящих через каждую из этих прямых, является подмногообразием для этого семейства.

5) Каждой общей точке двойственной „поверхности“ Власова инцидентны две образующие плоскости, из которых одна принадлежит многообразию Π_2 , другая — сопряженному многообразию $\bar{\Pi}_2$.

Π_1

1) Многообразие плоскостей образовано из всех плоскостей, пересекающих одновременно пять фиксированных (в общем положении) прямых.

2) С каждой пятеркой прямых в P_4 связываются ∞^1 прямых, характеризующихся тем, что каждая из них пересекается со всеми плоскостями многообразия Π_1 , определяемого этой пятеркой.

Ս. Ե. Կարանյան

ՊՐՈԵԿՏԻՎ ՔԱՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ
ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում տրված է քառաչափ տարածության ուղիղների զծային բոլոր բազմաձևությունների տեսությունը: Այդ խնդիրը լուծված է պրոեկտիվ իննաչափ տարածության զրաամանյան բազմաձևությունների և վերջիններիս հետ կապված հանրահաշվական մեթոդների օգնությամբ:

Հարվածությունների զծային բազմաձևությունների տեսությունը ստացված է ուղիղների տեսությունից, քառաչափ տարածության երկրորդական սկզբունքի միջոցով:

Աշխատանքում ըստ է տրված նաև ուղիղների երկչափ բազմաձևության և Վլասովի կոնֆիգուրացիայի սերտ կապը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Каранетян С. Е. Сопряженные многообразия и их приложение. ДАН СССР, 133, № 5, 1960.
2. Ходж В. и Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. I. ИЛ, М., 1954.
3. Бюшгенс С. С. Конфигурация А. К. Власова и ее обобщение. Мат. сб., 36 (78), № 2, 1955.
4. Клейн Ф. Высшая геометрия. ГОНТИ, М.—Л., 1939.