В. П. Громов

О росте функций на последовательности точек луча

Введение

В 1950 г. А. Ф. Леонтьевым в работе [1] доказано, в частности, следующее утверждение.

Пусть $F(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^{\nu_n}$ — целая функция порядка ρ типа $\sigma > 0$, а ν_n — целые числа, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2\rho}$. Пусть, далее, $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau > 0,$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad \mu_n = \lambda_n^\rho, \quad L(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Если $F(\lambda_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то $\sigma > \frac{\pi\tau}{\sin \pi\rho\alpha}$.

В 1958 г. Гайер (D. Gaier) [3] доказал следующую теорему.

Пусть целая функция $F(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^{\nu_n}$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ растет не быстрее целой функции экспоненциального типа σ , причем целые числа ν_n удовлетворяют условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Пусть далее $\sigma < \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

Тогда

1°. если $F(n) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то $F(z) \equiv 0$;

2°. если $\{F(n)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — ограничена, то $F(x)$, ($x \geq 0$) ограничена,

если $F(n) \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$), то $F(x) \rightarrow s$ ($x \rightarrow \infty$);

3°. если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(n)|}{n} \leq 0$, то $h(0) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(n)|}{n}$.

В настоящей работе результаты аналогичного характера устанавливаются для более широкого класса функций.

Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$ — последовательность положительных, различных между собой, чисел с конечной плотностью $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n}$. Функции, о которых пойдет речь, определены в некотором угле

$$|\arg z| < \mu, \quad \mu > \pi\alpha \quad (1)$$

следующим образом

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z), \quad (2)$$

где $P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{\nu_j}$ — конечные линейные комбинации функций из системы $\{z^{\nu_j}\}$.

Предполагается, что последовательность $\{P_n(z)\}$ в любой ограниченной замкнутой части угла (1) сходится равномерно. Заметим, что из равномерной сходимости последовательности $\{P_n(z)\}$ внутри угла (1) следует (см. [2]) ее равномерная сходимость внутри области

$$-\infty < \arg z < \infty. \quad (3)$$

Поэтому предельная функция $F(z)$ этой последовательности регулярна в области (3).

Частным случаем функций (2) являются функции, представленные в области (3) рядами

$$F(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^{\nu_n}, \quad \nu_n > 0$$

(при нашем условии $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} < \infty$ ряды сходятся абсолютно).

Пусть S_β — угол с вершиной в начале координат раствора 2β и $M_1(r) = \max |F(z)|, |z| = r, z \in S_\beta$. Величину

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_1(r)}{\ln r}$$

принято называть порядком функции $F(z)$ в угле S_β , а величину

$$\sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M_1(r)}{r^\sigma}$$

— типом функции $F(z)$ в угле S_β .

Определенные выше функции (2) рассматривались в ряде работ А. Ф. Леонтьева. В работе [4], в частности, показано, что каков бы ни был угол S_μ с вершиной в начале раствора $\mu > 2\pi\alpha$, порядок в нем функции (2) один и тот же. Далее там же показано, что если порядок ρ в угле S_μ функции (2) удовлетворяет условию

$$0 < \rho < \frac{1}{2\alpha}, \quad (4)$$

то ни на каком луче при больших $|z|$ не может выполняться неравенство

$$|F(z)| < e^{|z|^{\rho_1}}, \quad \rho_1 < \rho.$$

Мы будем изучать поведение функции (2) с условием $\rho < \frac{1}{2\alpha}$ в зависимости от ее поведения на некоторой последовательности точек с предельной точкой на бесконечности.

§ 1. О росте функций на последовательности точек одного луча

В этом параграфе установим следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $F(z)$ — предельная функция равномерно сходящейся в угле $S_\mu: |\arg z| < \mu$ последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{P_n} a_{nj} z^{y_j}, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{y_n} = \alpha$, $\mu > \pi\alpha$.

Пусть функция $F(z)$ в угле S_μ имеет порядок ρ и тип σ , причем порядок ρ удовлетворяет условию

$$0 < \rho < \frac{1}{2\alpha}.$$

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ различных положительных чисел такова, что выполняются условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\sigma} = \tau > \frac{\sigma \sin \pi \rho \alpha}{\pi}, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^\sigma, \quad L(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right)$$

(величина $\delta = 0$, в частности, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$), то справедливы соотношения

$$\sigma \cos \pi \rho \alpha \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\sigma} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\tau e^{i\varphi})|}{r^\sigma} = h(\varphi) \leq \sigma, \quad |\varphi| < \mu.$$

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [1].

Лемма. Пусть последовательность положительных различных чисел $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad L(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right)$$

и пусть функция $F(z) \neq 0$ регулярна и экспоненциального типа в некотором угле $|\arg z| < \mu$ с вершиной в начале координат. Если для некоторого φ

$$g = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\mu_n e^{i\varphi})|}{\mu_n} < h(\varphi),$$

где $h(\varphi)$ — индикатриса функции $F(z)$, то на опорной прямой $x \cos(-\varphi) + y \sin(-\varphi) = h(\varphi)$ у функции $\gamma(z)$, ассоциированной по Борелю с функцией $F(z)$, имеются по крайней мере две особые точки, расстояние между которыми не меньше 2π .

Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем для случая $\varphi = 0$. Это не будет снижать общности теоремы, так как посредством соответствующей замены переменной всегда можно перейти к этому случаю.

Как мы уже отмечали, из сходимости последовательности (1.1) в угле S_μ , $\mu > \pi\alpha$, следует, что эта последовательность сходится в области $-\infty < \arg z < \infty$.

Введем функцию $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\sigma}})$. Она является аналитической в любом угле с вершиной в начале и растет в этом угле не быстрее целой функции экспоненциального типа σ .

Положим

$$\gamma(z) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-zt} dt. \quad (1.2)$$

Как известно, интеграл (1.2) сходится и представляет собой аналитическую функцию $\gamma(z)$ в полуплоскости

$$x \cos(-\varphi) + y \sin(-\varphi) > h(\varphi). \quad (1.3)$$

На опорной прямой

$$x \cos(-\varphi) + y \sin(-\varphi) = h(\varphi) \quad (1.4)$$

функция $\gamma(z)$ имеет хотя бы одну особую точку.

Когда φ будет пробегать некоторый угол S_μ с вершиной в начале, то полуплоскость (1.3) опишет некоторую область G . В этой области G функция $\gamma(z)$ регулярна. Очевидно, что область G содержит область $|z| > \sigma$, $z \in S_\mu$, так как $h(\varphi) \leq \sigma$. Можно показать, что для некоторого луча из угла S_μ индикатриса $h(\varphi)$ функции $\Phi(t)$ принимает значение равное σ [σ — тип функции $\Phi(t)$]. Отсюда следует, что функция $\gamma(z)$ на дуге $|z| = \sigma$, $z \in S_\mu$, имеет хотя бы одну особую точку.

Функция $\Phi(t)$ является предельной функцией для равномерно сходящейся в угле $|\arg t| < \mu$, $\mu > \pi\rho\alpha$ последовательности

$$P_n(t) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} t^{\frac{\nu_j}{\rho}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

причем в этом угле имеет место оценка

$$|\Phi(t)| < A e^{(\sigma+\varepsilon)|t|}.$$

В этих условиях всегда существует (см. [4]) последовательность

$$P_n^*(t) = \sum_{j=1}^{p_n} b_{nj} t^{\frac{\nu_j}{\rho}} \quad (n=1, 2, \dots),$$

которая сходится к функции $\Phi(t)$ внутри области $-\infty < \arg t < \infty$ и которая в любом угле $D: |\arg t| < q$, с вершиной в начале, удовлетворит условию

$$|P_n^*(t)| < A_1 e^{\alpha_1 |t|}, \quad (1.5)$$

где α_1 — постоянная $\geq \sigma$ (постоянные A_1 и α_1 возможно зависят от угла D).

Из равномерной сходимости $\{P_n^*(t)\}$ в любой конечной части плоскости и оценки (1.5) следует, что последовательность

$$\begin{aligned} \gamma_n(u) &= \int_0^{\infty} P_n^*(t) e^{-ut} dt = \sum_{j=1}^{p_n} b_{nj} \int_0^{\infty} t^{\frac{\nu_j}{\rho}} e^{-ut} dt = \\ &= \sum_{j=1}^{p_n} b_{nj} \Gamma\left(\frac{\nu_j}{\rho} + 1\right) u^{-\left(\frac{\nu_j}{\rho} + 1\right)} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

сходится равномерно внутри области $|u| > \alpha_1$, $|\arg u| < q$ к функции

$$\gamma(u) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-ut} dt.$$

Показатели $\left\{\frac{\nu_j}{\rho} + 1\right\}$ имеют плотность $\alpha \cdot \rho$. Отсюда, вспомнив, что на кривой $|u| = \sigma$ функция $\gamma(u)$ имеет особые точки, а в области $|u| > \sigma$ она регулярна, заключаем (см. [3], стр. 169), что на любой замкнутой дуге окружности (расположенной на римановой поверхности) радиуса σ и раствора $2\pi\rho\alpha$ функция $\gamma(u)$ имеет хотя бы одну особую точку.

Это заключение и условие $\rho < \frac{1}{2\alpha}$ (при этом условии $\pi\rho\alpha < \frac{\pi}{2}$)

позволяют сделать вывод, что индикатриса $h(\varphi)$ функции $\Phi(t)$ удовлетворяет условию

$$h(\varphi) \geq \sigma \cos \pi \rho \alpha. \quad (1.6)$$

В самом деле, если бы мы имели $h(\varphi) < \sigma \cos \pi \rho \alpha$, то тогда опорная прямая (1.4) отсекала бы на окружности $|z| = \sigma$ дугу раствора больше $2\pi \rho \alpha$, на которой, исключая, быть может, концы, не было бы особых точек функции $\gamma(u)$, что невозможно. Итак неравенство (1.6) действительно имеет место.

Дальше доказательство теоремы поведем следующим образом. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(\mu_n)|}{\mu_n} < h(0).$$

Отсюда, по лемме заключаем, что на опорной прямой $x = h(0)$ функция $\gamma(u)$ имеет по крайней мере две особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\tau$. Но это совместимо с тем, что на любой дуге окружности $|z| = \sigma$ раствора $2\pi\rho\alpha$ имеются особые точки $\gamma(u)$ только тогда, когда

$$\tau < \frac{\sigma \sin \pi \rho \alpha}{\pi}.$$

В самом деле, из того, что на прямой $x = h(0)$ имеются особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\tau$, а справа от этой прямой особых точек нет, следует, что прямая $x = h(0)$ отсекает на окружности $|z| = \sigma$ дугу, которая свободна от особых точек и которую стягивает хорда длины не меньше $2\pi\tau$. Эта дуга не должна содержать в себе дугу раствора $2\pi\rho\alpha$, ибо на такой дуге есть особые точки функции $\gamma(u)$. Так как дуга раствора $2\pi\rho\alpha$ стягивается хордой длины $2\sigma \sin \pi \rho \alpha$, то должно иметь место соотношение

$$2\pi\tau \leq 2\sigma \sin \pi \rho \alpha.$$

Но это противоречит условию теоремы $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \pi \rho \alpha$. Значит предположение, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} < h(0)$$

неверно.

Следовательно, имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} = h(0),$$

что и надо было доказать.

Как следствие теоремы 1 отметим следующий результат.

Теорема 2. Пусть $F(z)$ — предельная функция для равномерно сходящейся в угле $S_\mu: |\arg z| < \mu$ последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha$, $\mu > \pi\alpha$. Предположим, что $F(z)$ в угле S_μ имеет порядок ρ и тип τ , причем порядок ρ удовлетворяет условию

$$0 < \rho < \frac{1}{2\alpha}.$$

Пусть далее $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^p} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^p, \quad L(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Если при некотором φ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^p} < h(\varphi),$$

то

$$\sigma \geq \frac{\pi\tau}{\sin \pi\rho\alpha}.$$

Этот результат содержит в себе упомянутый во введении результат А. Ф. Леонтьева.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 3. Пусть функция $F(z)$ — предельная для равномерно сходящейся в угле $S_\mu: |\arg z| < \mu$ последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha, \quad \mu > \pi\alpha,$$

и пусть эта функция $F(z)$ в угле S_μ растет не быстрее целой функции порядка ρ типа τ , причем $\rho < \frac{1}{2\alpha}$.

Тогда если $F(\lambda_n) = 0$ ($n=1, 2, \dots$), где

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^p} > \frac{\sigma}{\pi} \sin \pi\rho\alpha,$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad \mu_n = \lambda_n^p, \quad L(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right),$$

то

$$F(z) \equiv 0.$$

Отметим, что указанные выше теоремы справедливы и для функции, представляемой рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\nu_n}, \quad \nu_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha < \infty,$$

сходящимся на всей комплексной плоскости

Рассмотрим, например, целую функцию

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{nm}, \quad \alpha = \frac{1}{m},$$

где $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^p} = \tau,$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0, \quad \mu_n = \lambda_n^p, \quad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right),$$

а m — целое число большее $2p$.

Как известно, функция $F(z)$ имеет порядок ρ и ее тип $\sigma \leq \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho}{m}}$.

Так как $F(\lambda_n) = 0$ и $F(z) \not\equiv 0$, то получаем, что тип функции $F(z)$ есть $\sigma \geq \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho}{m}}$ и, следовательно, $\sigma = \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho}{m}}$. Отсюда видно,

что в условии $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \pi\rho z$ теоремы 1 знак неравенства нельзя заменить знаком равенства.

Отметим теперь следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $F(z)$ — предельная функция последовательности

$$P_n(z) = \sum_{l=1}^{p_n} a_{nl} z^{\nu_l} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

равномерно сходящейся в угле $|\arg z| < \mu$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$ и $\mu > \pi\alpha$.

Пусть эта функция в угле $|\arg z| < \mu$ растет не быстрее целой

функции порядка ρ типа σ , причем $\rho < \frac{1}{2\alpha}$. Пусть, далее, $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho > 2h > 0 \text{ и } |n - \lambda_n^\rho| \leq L \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если $\sigma < \frac{\pi}{\sin \pi \rho \alpha}$, то из ограниченности $|F(\lambda_n)|$ ($n = 1, 2, \dots$)

следует, что $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = 1$ и величину $\delta = 0$. Поэтому, если предположить, что

$F(z)$ порядка ρ и типа σ , $0 < \sigma < \frac{\pi}{\sin \pi \rho \alpha}$, то по теореме 1 должно быть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^\rho} = h(0) \geq \sigma \cos \pi \rho \alpha > 0,$$

что невозможно, так как $|F(\lambda_n)|$ ограничена.

Пусть теперь $F(z) \in [\rho, 0]$. В этом случае к функции $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\rho}})$ применима следующая теорема Дюффона—Шеффера ([5], стр. 191).

Пусть функция $\Phi(t)$ в области $|\arg t| < \theta$ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) регулярна, экспоненциального типа и $h(\theta) \leq a|\cos \theta| + b|\sin \theta|$, причем $b < \pi$. Пусть, далее, $\{\mu_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $\mu_{n+1} - \mu_n > 2h > 0$ и $|n - \mu_n| \leq L$, ($n = 1, 2, \dots$). Тогда из ограниченности $|\Phi(\mu_n)|$ ($n = 1, 2, \dots$) следует ограниченность $\Phi(x)$ ($x \geq 0$) и из $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = 0$ следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0$.

В силу этой теоремы функция $\Phi(t)$ ограничена на луче $x \geq 0$, следовательно, на этом луче ограничена и функция $F(z)$. Но так как $\rho < \frac{1}{2\alpha}$, то по теореме А. Ф. Леонтьева [4] функция $F(z)$ ($\rho < \frac{1}{2\alpha}$), ограниченная на луче, тождественно равна нулю.

Отметим, что теорема Гайера, о которой упоминалось во введении, является частным случаем теоремы 4. Причем пункты 2° и 3° этой теоремы теперь будут формулироваться точнее. Именно, мы имеем:

2°. из ограниченности $|F(n)|$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) следует, что $F(z) \equiv 0$,

3°.
$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(n)|}{n} = h(0) \geq \sigma \cos(\delta \cdot \alpha).$$

§ 2. О росте функций на последовательности точек двух лучей

В этом параграфе изучается рост функций (2) в зависимости от роста этих функций на последовательности точек, расположенных на двух лучах. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $F(z)$ — предельная функция равномерно сходящейся в угле $S_\mu: |\arg z| < \mu$ последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{\nu_j} \quad (n=1, 2, \dots).$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \alpha$, $\mu > \pi\alpha$.

Пусть функция $F(z)$ в угле S_μ имеет порядок ρ и тип σ , причем вместо условия $\alpha < \frac{1}{2\rho}$ теоремы 1 пусть выполняется условие

$$\alpha < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}, \quad \omega > \rho.$$

Предположим, далее, что $\{\lambda_n\}$ — последовательность чисел, удовлетворяющих условию $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\sigma} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\mu_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^\rho, \quad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Тогда, если $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta$,

$$\text{где} \quad \beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\},$$

то хотя бы на одном из лучей $\varphi = \varphi_0$ или $\varphi = \varphi_1$, угол между которыми равен $\frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$, имеет место соотношение

$$\sigma \cos \beta \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\rho} = h(\varphi) \leq \sigma.$$

Доказательство во многом аналогично с доказательством теоремы 1.

Именно, рассмотрим функцию $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\rho}})$. Как видели выше, ассоциированная с ней по Борелю функция $\gamma(z)$, определяемая формулой (1.2), представляет регулярную функцию в области $|z| > \sigma$, причем на любой дуге окружности $|z| = \sigma$ раствора $2\pi\omega$ функция $\gamma(z)$ имеет хотя бы одну особую точку.

В качестве лучей $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ возьмем лучи $\varphi = \frac{\pi}{2\omega}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2\omega}$ (это, очевидно, не будет снижать общности теоремы). При замене $z = t^{\frac{1}{\rho}}$ (здесь положительным значениям t соответствуют положительные значения z) эти лучи перейдут в лучи: $\arg t = \frac{\pi\rho}{2\omega}$ и $\arg t = -\frac{\pi\rho}{2\omega}$. Обозначим последние лучи через θ^+ и θ^- .

На окружности $|z| = \sigma$ возьмем дугу раствора $2\pi\rho\alpha$, симметричную относительно луча $\arg t = 0$. На этой дуге есть хотя бы одна особая точка функции $\gamma(z)$. Следовательно, на одной из ее половин (а может и на обеих) имеются особые точки. Возьмем ту из этих половин, на которой имеются особые точки функции $\gamma(z)$ и обозначим эту дугу через l . Пусть дуга l и, например, луч θ^+ находятся по одну сторону от луча $\arg t = 0$. Рассмотрим на окружности $|z| = \sigma$ дугу раствора 2β , где

$$\beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\} < \frac{\pi}{2}, \quad \left(\pi\rho\alpha < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\rho}{2\omega} \right),$$

симметричную относительно луча θ^+ . В дальнейшем эту дугу будем обозначать l_{β} .

Заметим, что дуга l_{β} содержит в себе дугу l .

Так как на дуге l имеются особые точки функции $\gamma(z)$, то индикатриса $\bar{h}(\theta)$ функции $\Phi(t)$ должна для луча θ^+ удовлетворять условию

$$\bar{h}(\theta) \geq \sigma \cos \beta.$$

Дальше доказательство теоремы поведем так. Предположим, что для $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\omega}$ ($\theta = \pm \frac{\pi\rho}{2\omega}$) имеют место неравенства

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^{\rho}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(\mu_n e^{i\theta})|}{\mu_n} < \bar{h}(\theta). \quad (2.1)$$

Тогда по лемме заключаем, что на опорной прямой, соответствующей лучу θ^+ , имеются по крайней мере две особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\tau$. Это можно совместить с тем, что на дуге l есть особые точки $\gamma(z)$, только тогда, когда $\tau \leq \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta$.

В самом деле, из того, что на опорной прямой есть особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\tau$, а справа от этой прямой особых точек нет, следует, что опорная прямая от окруж-

ности $|z| = \sigma$ отсекает дугу, свободную от особых точек, которая стягивается хордой длины не меньше $2\pi\tau$.

Отсекаемая дуга не должна содержать внутри себя дугу $l_{2\beta}$ (так как дуга $l_{2\beta}$ содержит особые точки). Поэтому (так как дуга $l_{2\beta}$ стягивается хордой длины $2\sigma \sin \beta$ и $\beta < \frac{\pi}{2}$) должно иметь место неравенство

$$2\sigma \sin \beta \geq 2\pi\tau,$$

или

$$\tau \leq \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta.$$

Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение о том, что по обоим рассматриваемым направлениям $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\omega}$ имеет место неравенство (2.1), неверно.

Таким образом, хотя бы по одному из рассматриваемых направлений имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\rho} = h(\varphi).$$

Этим самым теорема доказана полностью.

Следует заметить, что хотя теорема 5 верна при любых $x < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}$, $\omega > \rho$, но она представляет интерес лишь для случая, когда

$$\frac{1}{2\omega} < x < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}.$$

При $x < \frac{1}{2\omega} < \frac{1}{2\rho}$ теорема 1 дает более точный результат.

Из теоремы 5 выводятся следствия, аналогичные тем, которые выведены из теоремы 1. Отметим эти следствия.

Теорема 6. Если выполнены все условия теоремы 5 кроме последнего $\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta$ и на двух лучах $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$, угол между которыми равен $\frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$, справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^\rho} < h(\varphi), \quad \varphi = \varphi_0, \varphi_1,$$

то

$$\sigma \geq \frac{\pi\tau}{\sin \beta},$$

где

$$\beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\}.$$

Из теоремы 5 вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 7. Пусть $F(z)$ — предельная функция равномерно сходящейся в угле $S_\mu: |\arg z| < \mu$ последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha$, $\mu > \pi\alpha$.

Пусть функция $F(z)$ в угле S_μ растет не быстрее целой функции порядка ρ типа σ и

$$\alpha < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}, \quad \omega > \rho.$$

Пусть далее $\{\lambda_n\}$ — последовательность, удовлетворяет условиям $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau, \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^\rho, \quad L(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2} \right).$$

Если

$$\tau > \frac{\sigma}{\pi} \sin \beta,$$

где

$$\beta = \max \left\{ \pi\rho\alpha - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\}$$

и функция $F(z)$ обращается в нуль в точках $\{\lambda_n e^{i\varphi_0}\}$, $\{\lambda_n e^{i\varphi_1}\}$, расположенных на двух лучах $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ угол между которыми равен $\frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$, то $F(z) \equiv 0$.

Комбинируя теорему 5 с теоремой Дюффона—Шеффера [5] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $F(z)$ — предельная функция последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} z^{v_j} \quad (n=1, 2, \dots),$$

равномерно сходящейся в угле $|\arg z| < \mu$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} = \alpha$, $\mu > \pi\alpha$.

Пусть эта функция $F(z)$ в этом угле растет не быстрее целой функции порядка ρ типа σ .

Пусть далее $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\lambda_{n+1}^2 - \lambda_n^2 \geq 2h > 0, \quad |\lambda_n - n| \leq L, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда, если $\alpha < \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\omega}$, $\omega > \rho$ и $\sigma < \frac{\pi}{\sin \beta}$, где $\beta = \max \left\{ \pi\rho - \frac{\pi\rho}{2\omega}, \frac{\pi\rho}{2\omega} \right\}$, то из ограниченности функции $F(z)$ в точках $\{\lambda_n\}$ и $\{\lambda_n e^{i\varphi}\}$ ($n = 1, 2, \dots$), где $|\varphi| = \frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$, следует, что $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Для доказательства заметим, что плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^2} = 1$ и величина $\delta = 0$. Докажем, что предположение $F(z) \neq 0$ нас приводит к противоречию.

Если $F(z)$ — порядка ρ и типа σ , такого, что $0 < \sigma < \frac{\pi}{\sin \beta}$, тогда по теореме 5 справедливо по крайней мере одно из соотношений

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n)|}{\lambda_n^2} = h(0) \geq \sigma \cos \beta > 0$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\lambda_n e^{i\varphi})|}{\lambda_n^2} = h(\varphi) \geq \sigma \cos \beta > 0.$$

Но это невозможно, так как последовательности $|F(\lambda_n)|$ и $|F(\lambda_n e^{i\varphi})|$ ограничены.

Если $F(z)$ принадлежит к классу $[p, 0]$ мы воспользуемся теоремой Дюффона—Шеффера (эта теорема сформулирована при доказательстве теоремы 4) применительно к функции $\Phi(t) = F(t^{\frac{1}{\rho}})$. Применяя эту теорему к лучам $\arg t = 0$ и $\arg t = \varphi\rho$, получим, что функция $\Phi(t)$ ограничена на этих лучах. Тогда функция $F(z)$ будет ограничена на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \varphi$, $|\varphi| = \frac{\pi}{\omega} < \frac{\pi}{\rho}$. В силу теоремы А. Ф. Леонтьева [4], отсюда следует, что $F(z) \equiv 0$. Что и требовалось доказать.

Заметим, что аналогичным образом можно было бы рассмотреть случай нескольких лучей (больше 2-х). При этом нетрудно установить каким условиям будет удовлетворять величина α .

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Ф. Леонтьеву за руководство работой.