ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 1, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. А. Акопян

Интегральные преобразования с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями и обобщенными функциями типа Вольтерра

В работах [1]—[3] М. М. Джрбашяном была развита L_2-теория интегральных преобразований в комплексной области при помощи ядер, являющихся различными специальными функциями. В работах [1], [3] при помощи асимптотических формул для функций типа Миттаг-Лефлера и Вольтерра при больших значениях аргумента удается получить явные выражения для их преобразования Меллина и установить, что эти преобразования удовлетворяют важному функциональному соотношению, играющему основную роль при построении соответствующих интегральных преобразований в комплексной области. В работе же [2] были рассмотрены интегральные преобразования, связанные с функцией

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1)\,\Gamma(k\rho_2^{-1} + \mu_2)},$$

являющейся, очевидно, обобщением как функция Миттаг-Лефлера, так и функции Бесселя. Не имея, однако, асимптотических формул, позволяющих судить о поведении этой функции в замкнутой плоскости z при больших значениях аргумента, в этой работе выражение соответствующего преобразования Меллина устанавливается при помощи теоремы о вычетах и некоторых оценок контурных интегралов.

В настоящей статье приводится построение L_2-теории интегральных преобразований с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями вида

$$_pF_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^k \tag{1}$$

и обобщенными функциями типа Вольтерра

$$_p\nu_q(z) = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(t\beta_1^{-1} + \nu_1)\cdots\Gamma(t\beta_p^{-1} + \nu_p)}{\Gamma(t\alpha_1^{-1} + \mu_1)\cdots\Gamma(t\alpha_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})} z^t\,dt. \tag{2}$$

Обобщенные гипергеометрические функции в связи с их асимптотическими разложениями были изучены Фоксом [4] и Райтом [5], но полученные ими асимптотические формулы не пригодны для замкнутой z плоскости, ввиду чего не могут быть использованы для вычисления соответствующих преобразований Меллина. Поэтому в настоящей статье вид преобразования Меллина для функции (1) или (2) мы устанавливаем также опираясь на теорему о вычетах и оценки некоторых контурных интегралов. Отметим, что интегральному преобразованию, связанному с обыкновенной обобщенной гипергеометрической функцией вида

$$ {}_pF_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu_1)\cdots\Gamma(k+\nu_p)}{\Gamma(k+\mu_1)\cdots\Gamma(k+\mu_q)} \cdot \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} $$

была посвящена работа Фокса [6], доказавшего лишь теорему типа Дирихле.

Автор выражает благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и за руководство.

§ 1. Преобразования с ядрами вида ${}_pF_q(z)$

1°. Обобщенная гипергеометрическая функция определяется как сумма ряда (см. [4], [5], [7], где рассмотрен специальный случай, когда $\mu_{q+1} = \rho_{q+1} = 1$)

$$ {}_pF_q\left\{ \begin{matrix} \delta_1, \cdots, \delta_p; \nu_1, \cdots, \nu_p \\ \rho_1, \cdots, \rho_{q+1}; \mu_1 \cdots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z \right\} = {}_pF_q(z) = $$

$$ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^k, \tag{1.1} $$

где параметры $\delta_1, \cdots, \delta_p; \rho_1, \cdots, \rho_{q+1}$ — положительные вещественные числа, а параметры $\nu_1, \cdots, \nu_p; \mu_1, \cdots, \mu_{q+1}$, вообще говоря, произвольные комплексные числа, но с тем ограничением, что ни одно из чисел $k\delta_1^{-1}+\nu_1, \cdots k\delta_p^{-1}+\nu_p$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ не равняется нулю или отрицательному целому числу. Функция ${}_pF_q(z)$ — целая при указанных значениях параметров $\nu_1, \cdots, \nu_p, \mu_1, \cdots \mu_{q+1}$, если только

$$ \frac{1}{\rho_1} + \cdots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \cdots - \frac{1}{\delta_p} > 0. \tag{1.2} $$

Используя известные формулы определения порядка и типа целой функции, находим, что функция ${}_pF_q(z)$, при соблюдении условия (1. 2), имеет порядок

$$ \rho = \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \cdots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \cdots - \frac{1}{\delta_p}} \tag{1.3} $$

и тип

$$\sigma = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1}} \cdots \left(\frac{\rho_{q+1}}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_{q+1}}} \left(\frac{\delta_1}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_1}} \cdots \left(\frac{\delta_p}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_p}}. \qquad (1.4)$$

При некоторых частных значениях параметров, функция ${}_pF_q(z)$ совпадает с хорошо известными функциями. Например, при $\delta_1 = \cdots = \delta_p = \rho_1 = \cdots = \rho_{q+1} = \mu_{q+1} = 1$ мы получим обычную обобщенную гипергеометрическую функцию.

Приведем некоторые интегральные формулы для ${}_pF_q(z)$. Почленным интегрированием ряда (1.1) получим, что при α, β, $\gamma > 0$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} {}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \cdots \delta_p; \nu_1, \cdots, \nu_p \\ \rho_1, \cdots, \rho_{q+1}; \mu_1, \cdots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; \lambda t^{\frac{1}{\beta}} \right\} t^{\gamma-1} dt =$$

$$= z^{\alpha+\gamma-1} {}_{p+1}F_{q+1} \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \cdots, \delta_p, \beta; \nu_1, \cdots, \nu_p, \gamma \\ \rho_1, \cdots, \rho_{q+1}, \beta; \mu_1, \cdots, \mu_{q+1}, \gamma+\alpha \end{matrix} ; \lambda z^{\frac{1}{\beta}} \right\}. \qquad (1.5)$$

Установим теперь, что справедлива формула

$$\int_0^\infty {}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \cdots, \delta_p; \nu_1 \cdots, \nu_p \\ \rho_1, \cdots, \rho_{q+1}; \mu_1, \cdots, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z t^{\frac{1}{\alpha}} \right\} t^{\beta-1} e^{-\zeta t} dt =$$

$$= \zeta^{-\beta} {}_{p+1}F_q \left\{ \begin{matrix} \delta_1, \cdots, \delta_p, \alpha; \nu_1, \cdots, \nu_p, \beta \\ \rho_1, \cdots, \rho_q, \rho_{q+1}; \mu_1, \cdots, \mu_q, \mu_{q+1} \end{matrix} ; z\zeta^{-\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad (\alpha \geqslant \rho, \beta > 0) \qquad (1.6)$$

где z — любое комплексное число, комплексный параметр ζ подчинен условию

$$\text{при} \qquad \rho < \alpha, \quad \operatorname{Re}\zeta > 0$$

$$\text{при} \qquad \rho = \alpha, \quad \operatorname{Re}\zeta > \sigma |z|^\rho, \qquad (1.7)$$

а ρ и σ определяются из (1.3) и (1.4).

При $z=0$ формула (1.6) справедлива при любом $\beta > 0$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$, поэтому рассмотрим случай $z \neq 0$. Если ζ удовлетворяет условию (1.7), то число $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, что

$$\text{при} \qquad \rho < \alpha, \quad \operatorname{Re}\zeta \geqslant \varepsilon$$

$$\text{при} \qquad \rho = \alpha, \quad \operatorname{Re}\zeta \geqslant (\sigma + \varepsilon) |z|^\rho. \qquad (1.7')$$

Из определения типа функции ${}_pF_q(z)$ следует

$$\left| \frac{\Gamma(k\rho_1^{-1} + \mu_1) \cdots \Gamma(k\rho_{q+1}^{-1} + \mu_{q+1})}{\Gamma(k\delta_1^{-1} + \nu_1) \cdots \Gamma(k\delta_p^{-1} + \nu_p)} \right| \geqslant A_1 \left[\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{4}\right) \rho e \right]^{-\frac{k}{\rho}} k^{\frac{k}{\rho}}, \qquad (1.8)$$

где $A_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $k \geqslant 0$.

Далее, имея в виду, что

$$\max_{0<t<\infty} t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\gamma t} = \left(\frac{k}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\frac{k}{\alpha}},$$

из (1.8) получим

при $\rho < \alpha$

$$\max_{0<t<\infty}\left|\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^k t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\right| <$$

$$< \left(\frac{e}{k}\right)^{k\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\alpha}\right)} \left\{\frac{\left[\left(\sigma+\frac{\varepsilon}{4}\right)\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}|z|}{\left(\alpha\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^k \leqslant \frac{A_2(\varepsilon;|z|)}{2^k}, \quad (k \geqslant 0) \tag{1.9}$$

где $A_2(\varepsilon;|z|)$ не зависит от k;

при $\rho = \alpha$

$$\max_{0<t<\infty}\left|\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^k t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\left(\sigma+\frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^{\rho}t}\right| <$$

$$< \left(\frac{\sigma+\frac{\varepsilon}{4}}{\sigma+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{k}{\rho}}. \tag{1.10}$$

Из оценок (1.9) и (1.10) вытекает, что при $\rho < \alpha$ и $\rho = \alpha$ соответственно на полуоси $0 \leqslant t < \infty$ равномерно сходятся ряды

$$e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\, {}_pF_q\left\{\begin{matrix}\delta_1,\cdots,\delta_p;\ \nu_1,\cdots,\nu_p\\ \rho_1,\cdots,\rho_{q+1};\ \mu_1,\cdots,\mu_{q+1}\end{matrix};\ zt^{\frac{1}{\alpha}}\right\} t^{\beta-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^k t^{\frac{k}{\alpha}+\beta-1} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}$$

и

$$e^{-\left(\sigma+\frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^{\rho}t}\, {}_pF_q\left\{\begin{matrix}\delta_1,\cdots,\delta_p;\ \nu_1,\cdots,\nu_p\\ \rho_1,\cdots,\rho_{q+1};\ \mu_1,\cdots,\mu_{q+1}\end{matrix};\ zt^{\frac{1}{\alpha}}\right\} t^{\beta-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^k t^{\frac{k}{\alpha}+\beta-1} e^{-\left(\sigma+\frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^{\rho}t}.$$

Ввиду (1.7′) отсюда следует, что разложение

$$e^{-\zeta t}{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\delta_1,\dots,\delta_p;\nu_1,\dots,\nu_p\\ \rho_1,\dots,\rho_{q+1};\mu_1,\dots,\mu_{q+1}\end{matrix};\ zt^{\frac{1}{\alpha}}\right\}t^{\beta-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}z^k t^{\frac{k}{\alpha}+\beta-1}e^{-\zeta t}$$

допускает почленное интегрирование по t на полуоси $[0,+\infty)$. Если заметить, что при $\operatorname{Re}\zeta>0$

$$\int_0^{\infty}e^{-\zeta t}t^{\frac{k}{\alpha}+\beta-1}dt=\frac{\Gamma(k\alpha^{-1}+\beta)}{\zeta^{k\alpha^{-1}+\beta}},\quad (k\geqslant 0)$$

то, выполнив интегрирование, получим формулу (1.6).

Наконец, используя интегральное представление Ханкеля для гамма-функции

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C u^{-s}e^u\,du,$$

где C—контур, начинающийся в $-\infty$, обходящий начало в положительном направлении и кончающийся в $-\infty$, получаем, что при $\rho<\rho_i$ $(1\leqslant i\leqslant q+1)$ справедлива формула

$${}_pF_q\left\{\begin{matrix}\delta_1,\dots,\delta_p;\nu_1,\dots,\nu_p\\ \rho_1,\dots,\rho_{q+1};\mu_1,\dots,\mu_{q+1}\end{matrix};\ z\right\}=\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_C{}_pF_{q-1}\left\{\begin{matrix}\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_p;\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_p\\ \rho_1,\dots,\rho_{i-1},\rho_{i+1},\dots,\rho_{q+1};\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\dots,\mu_{q+1}\end{matrix};\ zu^{-\frac{1}{\rho_i}}\right\}\times$$

$$\times e^u u^{-\mu_i}\,du. \tag{1.11}$$

2°. Для построения интегральных преобразований с ядрами ${}_pF_q(z)$ в классе $L_2(0,\infty)$ необходимо установить вид преобразования Меллина для функции ${}_pF_q(z)$. С этой целью введем в рассмотрение следующие функции, мероморфные на всей плоскости комплексного переменного s $(s=r+it)$

$$K_\rho\left\{\begin{matrix}\delta_1,\dots,\delta_p;\nu_1,\dots,\nu_p\\ \rho_1,\dots,\rho_{q+1};\mu_1,\dots,\mu_{q+1}\end{matrix};\ s;\mu;\alpha\right\}\equiv K_\rho(s;\mu;\alpha)=$$

$$=\frac{\pi\rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\nu_1-\frac{\rho}{\delta_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p-\frac{\rho}{\delta_p}(s+\mu-1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1-\frac{\rho}{\rho_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1}-\frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s+\mu-1)\right)} \tag{1.12}$$

и

$$H_{\rho}^{(\pm)}\left\{\begin{matrix}\delta_1,\cdots,\delta_p;\nu_1,\cdots,\nu_p\\ \rho_1,\cdots,\rho_{q+1};\mu_1,\cdots,\mu_{q+1}\end{matrix};s;\mu\right\}\equiv H_{\rho}^{(\pm)}(s;\mu)=$$

$$=e^{\pm i\frac{\pi}{2}s}\frac{\Gamma\left(\mu_1+\frac{\rho}{\rho_1}(s-\mu)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1}+\frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s-\mu)\right)}{\Gamma\left(\nu_1+\frac{\rho}{\delta_1}(s-\mu)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p+\frac{\rho}{\delta_p}(s-\mu)\right)}. \tag{1.13}$$

На входящие в эти функции параметры $\delta_1,\cdots,\delta_p;\nu_1,\cdots,\nu_p;\rho_1,\cdots,\rho_{q+1};$ $\mu_1,\cdots,\mu_{q+1};\rho,\mu$ и α с самого начала наложим следующие ограничения

а) $$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_{q+1}}-\frac{1}{\delta_1}-\cdots-\frac{1}{\delta_p};\qquad \rho\geqslant\frac{1}{2} \tag{1.14}$$

б) $$\mu=\mu_1+\cdots+\mu_{q+1}-\nu_1-\cdots-\nu_p+\frac{p-q}{2} \tag{1.15}$$

в) для данного $\rho\geqslant\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\alpha\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}. \tag{1.16}$$

В дальнейшем относительно параметров $\rho_i,\mu_i;\delta_j,\nu_j$ $(i=1,2,\cdots,q+1;\ j=1,2,\cdots,p)$ будем различать два случая:

А) *параметры* ρ_i *и* μ_i *не равны одновременно единице ни при одном значении* $i=1,2,\cdots,q+1$;

Б) *при некотором значении* k $(1\leqslant k\leqslant q+1)$ $\rho_k=\mu_k=1$, *но ни при одном значении* $j=1,2,\cdots,p$ *параметры* δ_j *и* ν_j *не равны одновременно единице.*

Очевидно, что при одновременном равенстве $\rho_{k_1}=\mu_{k_1}=1$, $\nu_{k_2}=\delta_{k_2}=1$ при некоторых значениях k_1 и k_2 индексы p и q функции ${}_pF_q$ понижаются на единицу.

Лемма 1. *Пусть все* $\mu_i>0$ $(i=1,2,\ldots,q+1)$

$$\nu_j>0\ (j=1,2,\ldots p).$$

Тогда:

1) *если параметр* μ *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}\min_{1<j<p}(1,\nu_j\delta_j) \tag{1.17}$$

в случае А) и условию

$$\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}\min_{1<j<p}(\nu_j\delta_j) \tag{1.17'}$$

в случае Б), то

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|K_{\rho}\left(\frac{1}{2}+it;\mu;\alpha\right)\right|<\infty; \tag{1.18}$$

2) *если параметр* μ *удовлетворяет условию*

$$\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \min_{1 \le i \le q+1} (\mu_i \rho_i) \tag{1.19}$$

в случае А) и условию

$$\mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \min_{1 \le i \le q+1} (1, \mu_i \rho_i) \tag{1.19'}$$

в случае Б), то

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| H_\rho^{(\pm)}\left(\frac{1}{2} + it; \mu\right) \right| < \infty. \tag{1.20}$$

Доказательство. 1) При выполнении условия (1.17) или (1.17′) функция $K_\rho(s; \mu; \alpha)$ не имеет полюсов на линии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Поэтому достаточно лишь убедиться в том, что при $|t| \to \infty$ функция $K_\rho\left(\frac{1}{2} + it; \mu; \alpha\right)$ остается ограниченной. С этой целью воспользуемся формулой

$$|\Gamma(r + it)| = O\left(|t|^{r - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right) \quad |t| \to \infty, \tag{1.21}$$

которая следует из асимптотического разложения гамма-функции [8].

Ввиду (1.21) при $|t| \to \infty$ будем иметь

$$\left| K_\rho\left(\frac{1}{2} + it; \mu; \alpha\right) \right| = O\left(e^{-\rho(\pi - \alpha)t + \pi\left(\frac{1}{2} - \rho\right)|t|}\right),$$

откуда, в силу условия (1.16), следует ограниченность функции $K_\rho\left(\frac{1}{2} + it; \mu; \alpha\right)$ при $|t| \to \infty$, т. е. утверждение (1.18) леммы.

2) При выполнении условия (1.19) или (1.19′) функции $H_\rho^{(\pm)}(s; \mu)$ не имеют полюсов на линии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, а при $|t| \to \infty$ имеем

$$\left| H_\rho^{(\pm)}\left(\frac{1}{2} + it; \mu\right) \right| = O\left(e^{\mp\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}|t|}\right) = O(1), \quad |t| \to \infty$$

откуда и следует утверждение (1.20).

В дальнейшем вместо $K_\rho\left(s; \mu; \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $K_\rho\left(s; \mu; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ будем писать соответственно $K_\rho^{(\pm)}(s; \mu)$.

Лемма 2. *На всей плоскости комплексного переменного* s *справедливы тождества:*

a) $$e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} K^{(+)}(s; \mu) H_\rho^{(-)}(1 - s; \mu) +$$

$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} K_\rho^{(-)}(s;\mu)\, H_\rho^{(+)}(1-s;\mu) = 2\pi\rho; \tag{1.22}$$

б) *если* $\rho \geqslant 1$, *то для всех значений параметра* ω *из отрезка* $\left[0,\ 2\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\right]$

$$e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} K_\rho\left(s;\mu;\frac{\pi}{2\rho}+\omega\right) H_\rho^{(+)}(1-s;\mu)+$$

$$+e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} K_\rho\left(s;\mu;\frac{3\pi}{2\rho}+\omega\right) H_\rho^{(-)}(1-s;\mu) = 0. \tag{1.23}$$

Доказательство. а) Из (1.12) и (1.13) имеем

$$K_\rho^{(+)}(s;\mu)\, H_\rho^{(-)}(1-s;\mu) = -i\pi\rho \frac{e^{i\pi\rho(s+\mu-1)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)},$$

$$K_\rho^{(-)}(s;\mu)\, H_\rho^{(+)}(1-s;\mu) = i\pi\rho \frac{e^{-i\pi\rho(s+\mu-1)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)},$$

откуда и вытекает тождество (1.22).

б) Из (1.12) и (1.13) имеем

$$K_\rho(s;\mu;\alpha)\, H_\rho^{(+)}(1-s;\mu) = \frac{\pi\rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)},$$

$$K_\rho\left(s;\mu;\alpha+\frac{\pi}{\rho}\right) H_\rho^{(-)}(1-s;\mu) = -\frac{\pi\rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)}}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)-i\pi(\mu-1)}.$$

Заменив в этих равенствах α через $\frac{\pi}{2\rho}+\omega$, приходим к требуемому тождеству (1.23). Если $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$, то значения $\frac{\pi}{2\rho}+\omega$, $\frac{3\pi}{2\rho}+\omega$ не выходят из промежутка $\left[\frac{\pi}{2\rho},\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right]$.

В частном случае, когда $\rho=\frac{1}{2}$, параметр α имеет единственное значение $\alpha=\pi$, тогда тождество (1.22) принимает простой вид

$$K_{\frac{1}{2}}(s;\mu;\pi)\, H(1-s;\mu) = \pi$$

где

$$H(s) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} H_{\frac{1}{2}}^{(-)}(s;\mu) + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} H_{\frac{1}{2}}^{(+)}(s;\mu).$$

Из результата леммы 1 следует, что при условии

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\min\left[1; \mu_1\rho_1, \ldots, \mu_{q+1}\rho_{q+1}; \nu_1\delta_1, \ldots, \nu_p\delta_p\right]$$

одновременно будем иметь

$$\frac{K_\rho\left(\frac{1}{2}+it; \mu; \alpha\right)}{\frac{1}{2}-it} \text{ и } \frac{H_\rho^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it; \mu\right)}{\frac{1}{2}-it} \in L_2(-\infty, \infty).$$

Отсюда по теореме Меллина [9] заключаем, что существуют пределы в среднем

$$\frac{k_\rho(x; \mu; \alpha)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{K_\rho(s; \mu; \alpha)}{1-s}x^{-s}ds \in L_2(0, \infty), \tag{1.24'}$$

$$\frac{h_\rho(x; \mu)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.\,i.\,m}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{H_\rho^{(\pm)}(s; \mu)}{1-s}x^{-s}ds \in L_2(0, \infty). \tag{1.24''}$$

Лемма 3. *При выполнении условия (1.17) или (1.17′)*

$$k_\rho(x; \mu; \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\frac{\left(e^{i\alpha}x^{\frac{1}{\rho}}\right)^k}{k\rho^{-1}+\mu}x^{\mu} =$$

$$= \int\limits_0^x {}_pF_q\left\{\begin{matrix}\delta_1, \ldots, \delta_p; \nu_1, \ldots, \nu_p \\ \rho_1, \ldots, \rho_{q+1}; \mu_1, \ldots, \mu_{q+1}\end{matrix}; e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\rho}}\right\}t^{\mu-1}dt \tag{1.25}$$

для всех

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2\rho}, \; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right].$$

Доказательство. Мероморфная функция

$$K_\rho(1-s; \mu; \alpha) =$$

$$= \frac{\pi\rho e^{i\rho(\mu-s)(\pi-\alpha)}}{\sin\pi\rho(\mu-s)}\frac{\Gamma\left(\nu_1+\frac{\rho}{\delta_1}(s-\mu)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p+\frac{\rho}{\delta_p}(s-\mu)\right)}{\Gamma\left(\mu_1+\frac{\rho}{\rho_1}(s-\mu)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1}+\frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s-\mu)\right)}$$

в силу условия (1.17) или (1.17′) не имеет полюсов на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, а полюсы, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, простые и совпадают с точками последовательности

$$s_k = k\rho^{-1} + \mu \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots).$$

Заметим, что

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k} \frac{K_\rho(1-s;\mu;\alpha)}{s} x^{s-1} =$$

$$= -\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} \frac{\left(e^{i\alpha}x^{\frac{1}{\rho}}\right)^k}{k\rho^{-1}+\mu} x^{\mu-1} \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{1.26}$$

Пусть $R_n = \mu + \left(n + \frac{1}{2}\right)\rho^{-1}$ $(n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$, а L_n означает контур области D_n, являющийся пересечением круга $|s| < R_n$ с полуплоскостью $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$. Функция

$$\frac{K_\rho(1-s;\mu;\alpha)}{s} x^{s-1}$$

голоморфна в области D_n, кроме точек $s_k = k\rho^{-1} + \mu$ $(k = 0,\ 1, \cdots, n)$, где она имеет простые полюсы с вычетами, которые задаются формулами (1.26). Поэтому для $x \in (0, \infty)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{K_\rho(1-s;\ \mu;\ \alpha)}{s} x^{s-1}\,ds =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} \frac{\left(e^{i\alpha}x^{\frac{1}{\rho}}\right)^k}{k\rho^{-1}+\mu} x^{\mu-1} =$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} \left(e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\rho}}\right)^k \right\} t^{\mu-1}\,dt. \tag{1.27}$$

Пусть $\frac{1}{2} \pm iR_n^*$ — точки пересечения окружности $|s| = R_n$ с прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$; так как $R_n^* = \sqrt{R_n^2 - \frac{1}{4}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^* = +\infty$. Напишем формулу (1.27) в развернутом виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*} \frac{K_\rho(1-s;\mu;\alpha)}{s} x^{s-1}\,ds =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} \left(e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\rho}}\right)^k \right\} t^{\mu-1}\,dt + Y_n(x), \tag{1.27'}$$

где

$$Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|s| = R_n \\ Re\, s \geqslant \frac{1}{2}}} \frac{K_\rho(1-s;\mu;\alpha)}{s} x^{s-1}\, ds, \quad x \in (0, \infty). \tag{1.28}$$

Займемся теперь оценкой функции $Y_n(x)$. Из асимптотической формулы для гамма-функции [8] следует, что при любом $a \in (-\infty, \infty)$, когда $R \to \infty$

$$|\Gamma(a + Re^{i\varphi})| = O(R^{R\cos\varphi + a - \frac{1}{2}} e^{-R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}), \tag{1.29}$$

$|\varphi| \leqslant \pi - \delta$ $(\delta > 0)$, при этом порядок правой части равномерен относительно всех значений $|\varphi| \leqslant \pi - \delta$. Далее, справедлива следующая оценка [1]

при
$$s = R_n e^{i\varphi}, \quad n \geqslant n_0$$

$$\left| \frac{e^{i\rho(\mu - s)(\pi - \alpha)}}{\sin \pi\rho(\mu - s)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} 2\sqrt{2} \exp\{\rho R_n [(\pi - \alpha)\sin\varphi - \pi|\sin\varphi|]\}, \text{ если } \frac{\pi}{4} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \exp\{\rho R_n (\pi - \alpha)\sin\varphi\}, \text{ если } |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases} \tag{1.30}$$

Предположим, что все ρ_i (δ_j) отличны от ∞ или же при некотором $i(j)$ $\rho_i = \infty$ $(\delta_j = \infty)$, но соответствующее $\mu_i = \frac{1}{2}\left(\nu_j = \frac{1}{2}\right)$. Тогда из (1.29) ввиду (1.14), (1.15) следует, что при $s = R_n e^{i\varphi}$ и $n \to \infty$

$$\left| \frac{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{\rho}{\delta_1}(s - \mu)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p + \frac{\rho}{\delta_p}(s - \mu)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{\rho}{\rho_1}(s - \mu)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s - \mu)\right)} \right| =$$

$$= O(R_n^{-R_n\cos\varphi + \frac{1}{2}} e^{R_n(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)} \sigma^{R_n\cos\varphi}). \tag{1.31}$$

Из (1.30) и (1.31) вытекает, что при $s = R_n e^{i\varphi}$

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad n \geqslant n_0$$

$$|K_\rho(1 - s;\mu;\alpha)| \leqslant c_1 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi} e^{-R_n\left(\rho\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi},$$

а при

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{4}$$

$$|K_\rho(1-s;\mu;\alpha)| \leqslant c_2 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n \cos\varphi} e^{-R_n\left[\rho(2\pi-\alpha)-\frac{\pi}{2}\right]|\sin\varphi|},$$

где $c_1, c_2, \cdots$ — постоянные, не зависящие от $n \geqslant n_0$. Но ввиду того, что $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$, из этих оценок следует, что при $s = R_n e^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $n \geqslant n_0$

$$|K_\rho(1-s;\mu;\alpha)| \leqslant c_3 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n \cos\varphi}. \tag{1.32}$$

Из оценок (1.31) и из второй оценки (1.30) при $s = R_n e^{i\varphi}$, $0 \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$, $n \geqslant n_0$ получим

$$|K_\rho(1-s;\mu;\alpha)| \leqslant c_4 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c_5 e}{R_n}\right)^{R_n \cos\varphi}. \tag{1.32'}$$

Выберем $n \geqslant n_1 \geqslant n_0$ настолько большим, чтобы при фиксированном $x > 0$ имели

$$\max\left\{\frac{\sigma e x}{R_n}, \frac{c_5 e x}{R_n}\right\} < e^{-1},$$

тогда из (1.32) и (1.32′) получим

$$|K_\rho(1-s;\mu;\alpha)\, x^s| \leqslant c_6 R_n^{\frac{1}{2}} e^{-R_n \cos\varphi} \tag{1.33}$$

при $$s = R_n e^{i\varphi}, \quad n \geqslant n_1 \quad |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Наконец, из (1.28) и (1.33) получим

$$|Y_n(x)| \leqslant c_7 R_n^{\frac{1}{2}} x^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n \cos\varphi} d\varphi < \frac{c_8}{x P_n^{\frac{1}{2}}} \quad (n \geqslant n_1)$$

откуда следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty). \tag{1.34}$$

В тождестве (1.27′) переходя к пределу при $n \to \infty$, ввиду (1.34) будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*}\frac{K_\rho(s;\mu;\alpha)}{1-s}x^{-s}ds=$$

$$=\frac{1}{x}\int\limits_0^x {}_pF_q\left(e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\rho}}\right)t^{\mu-1}\,dt,\quad x\in(0,\infty). \tag{1.35}$$

Но равенство (1.35) сохранится и в том случае, если в его левой части числа R_n^* заменить любыми числами a_n, удовлетворяющими условию

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty. \tag{1.36}$$

Действительно, пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (1.36), а числа k_n определим так, чтобы

$$R_{k_n}^*\leqslant a_n\leqslant R_{k_n+1}^*,\quad n\geqslant 1.$$

Обозначим

$$V(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{K_\rho(s;\mu;\alpha)}{1-s}x^{-s}ds,$$

по лемме 1 имеем

$$|V(a)-V(R_{k_n}^*)|\leqslant\frac{c_9}{\sqrt{x}}\int\limits_{a_n}^{R_{k_n+1}^*}\frac{dt}{\left|\frac{1}{2}-it\right|}\leqslant\frac{c_9}{\sqrt{x}}\frac{R_{k_n+1}^*-R_{k_n}}{a_n}. \tag{1.37}$$

Но $R_n^*=\sqrt{R_n^2-\frac{1}{4}}$ и $R_n=\mu+\left(n+\frac{1}{2}\right)\rho^{-1}$, поэтому R_{n+1}^*- $-R_n^*=O(1)$ при $n\to\infty$. Ввиду этого, переходя к пределу в (1.37) при $n\to\infty$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{K_\rho(s;\mu;\alpha)}{1-s}x^{-s}ds=\frac{1}{x}\int\limits_0^x {}_pF_q\left(e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\rho}}\right)t^{\mu-1}\,dt.$$

Из этого и (1.24) и следует (1.25).

Таким образом в лемме 3 было установлено явное выражение для функции $k_\rho(x;\mu;\alpha)$ [в дальнейшем вместо $k_\rho\left(x;\mu;\frac{\pi}{2\rho}\right)$ и

$k_\rho\left(x;\mu;2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ будем писать соответственно $k_\rho^{(-)}(x;\mu)$].Установление аналогичных явных представлений для функции $h_\rho^{(\pm)}(x;\mu)$ сопряжено с определенным затруднением в применении теоремы о вычетах к правой части (1.24″) (см., напр., [2], где рассмотрен специальный случай соответствующей функции ${}_0F_1$). Поэтому на этом мы здесь останавливаться не будем.

3°. Опираясь на основные тождества (1.22), (1.23) леммы 2, можно установить следующие предложения, доказательство которых мы не приводим, так как они не отличаются от доказательств соответствующих теорем работ [1], [2].

Теорема 1. *Пусть параметры* $\delta_1,\cdots,\delta_p;\nu_1,\cdots,\nu_p;\rho_1,\cdots,\rho_{q+1}$; $\mu_1,\cdots,\mu_{q+1}$ *удовлетворяют следующим условиям*

1) $$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_{q+1}}-\frac{1}{\delta_1}-\cdots-\frac{1}{\delta_p}<2$$

2) $$\frac{1}{2}<\mu=\mu_1+\cdots+\mu_{q+1}-\nu_1-\cdots-\nu_p+\frac{p-q}{2}<$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}\min\{1;\mu_1\rho_1,\cdots,\mu_{q+1}\rho_{q+1};\nu_1\delta_1,\cdots,\nu_p\delta_p\},$$

параметры μ_i *и* ν_j $(i=1,2,\cdots,q+1;\ j=1,2,\cdots,p)$ *положительны, причем при* $\rho_i=\infty$ *примем* $\mu_i=\frac{1}{2}$ *и при* $\delta_j=\infty$ *примем* $\nu_j=\frac{1}{2}$.

Тогда

а) *Для любой функции* $g(y)\in L_2(0,\infty)$ *формула*

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{k_\rho^{(\pm)}(xy;\mu)}{y}g(y)\,dy$$

определяет почти всюду функции $f^{(+)}(x)$ *и* $f^{(-)}(x)$, *принадлежащие классу* $L_2(0,\infty)$. *Двойственная формула*

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{h_\rho^{(+)}(xy;\mu)}{x}f^{(-)}(x)\,dx+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{h_\rho^{(-)}(xy;\mu)}{x}f^{(+)}(x)\,dx$$

также имеет место почти всюду на $(0,\infty)$. *Существуют постоянные* $M_1>0$, $M_2>0$, *не зависящие от функции, такие что*

$$\int_0^\infty|f^{(\pm)}(x)|^2dx\leq M_1\int_0^\infty|g(y)|^2dy \tag{1.38}$$

и

$$\int_0^\infty |g(y)|^2\,dy \leqslant M_1 \left\{ \int_0^\infty |f^{(+)}(x)|^2\,dx + \int_0^\infty |f^{(-)}(x)|^2\,dx \right\}.$$

б) *Обратно, для любой функции* $f(x) \in L_2(0, \infty)$ *формула*

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h_\rho^{(\pm)}(xy;\mu)}{x} f(x)\,dx$$

определяет почти всюду на $(0, \infty)$ *функции* $g^{(\pm)}(y) \in L_2(0, \infty)$. *Двойственная формула*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_\rho^{(-)}(xy;\mu)}{y} g^{(+)}(y)\,dy +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_\rho^{(+)}(xy;\mu)}{y} g^{(-)}(y)\,dy$$

также имеет место почти всюду на $(0, +\infty)$. *Существуют постоянные* $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, *не зависящие от функции и такие, что*

$$\int_0^\infty |g^{(\pm)}(y)|^2\,dy \leqslant K_1 \int_0^\infty |f(x)|^2\,dx$$

и (1.39)

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 xd \leqslant K_2 \left\{ \int_0^\infty |g^{(+)}(y)|^2\,dy + \int_0^\infty |g^{(-)}(y)|^2\,dy \right\}.$$

Теорема 2. *Если* $g_1(y)$ *произвольная функция из класса*

$$\int_0^\infty |g_1(y)|^2 y^{2\mu\rho-\rho-1}\,dy < +\infty,$$

то функции

$$f^{(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_\rho^{(\pm)}(xy^\rho)}{y^\rho} g_1(y)\, y^{\mu\rho-1}\,dy$$

принадлежат классу $L_2(0, \infty)$. *Целые функции порядка* $\leqslant \rho$ *и конечного типа, определяемые по формуле*

$$G_\sigma(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma {}_pF_q(zx^{\frac{1}{\rho}} e^{i\frac{\pi}{2\rho}})\, x^{\mu-1} f^{(-)}(x)\,dx +$$

$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^{\sigma}{}_pF_q\left(zx^{\frac{1}{\rho}}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right)x^{\mu-1}f^{(+)}(x)\,dx \quad (\sigma>0)$$

сходятся в среднем к $g_1(y)$, *когда* $\sigma\to+\infty$ *в смысле*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^{\infty}|g_1(y)-G_\sigma(y)|^2y^{2\mu\rho-\rho-1}\,dy=0.$$

В случае, когда $\rho\geqslant 1$, *справедливо также равенство*

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_0^{\infty}|G_\sigma(ye^{i\varphi})|^2y^{2\mu\rho-\rho-1}dy=0,\quad \frac{\pi}{\rho}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{\rho}.$$

§ 2. Преобразование с ядром ${}_p\nu_q(z)$

Введем в рассмотрение следующую функцию

$${}_p\nu_q\left\{\begin{matrix}\beta_1,\cdots,\beta_p;\nu_1,\cdots,\nu_p\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_{q+1};\mu_1,\cdots\mu_{q+1}\end{matrix};z\right\}\equiv{}_p\nu_q(z)=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\Gamma(t\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(t\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(t\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(t\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}z^t\,dt \tag{2.1}$$

где параметры $\beta_1,\cdots,\beta_p;\nu_1,\cdots,\nu_p;\alpha_1,\cdots,\alpha_{q+1};\mu_1,\cdots,\mu_{q+1}$ — положительные числа, и

$$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{q+1}}-\frac{1}{\beta_1}-\cdots-\frac{1}{\beta_p}=\frac{1}{r}>0. \tag{2.2}$$

В силу условия (2.2) интеграл (2.1) представляет голоморфную на бесконечной римановой поверхности $-\infty<\arg z<\infty$, $0<|z|<\infty$ функцию, при этом для подинтегральной функции выбирается та ее ветвь, которая принимает значения $\exp[t\log|z|]$ на полуоси $\arg z=0$. Заметим, что функцию ${}_p\nu_q(z)$ можно рассматривать как предел функции ${}_pF_q(z)$ при $\rho\to\infty$, если $r=1$. Действительно, если при $\rho_i\to\infty$, $\delta_j\to\infty$ $(i=1,2,\cdots,q+1;\ j=1,2,\cdots,p)$

$$\frac{\rho_i}{\rho}\to\alpha_i;\quad \frac{\delta_j}{\rho}\to\beta_j$$

то имеем

$${}_p\nu_q(z)=\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}\,{}_pF_q(z^{\frac{1}{\rho}})$$

где

$$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{q+1}}-\frac{1}{\beta_1}-\cdots-\frac{1}{\beta_p}=1.$$

Функцию (2.1) естественно назвать обобщенной функцией типа Вольтерра, так как в частном случае при $p=0$, $q=0$. Эта функция впервые была рассмотрена в работах Вольтерра. Как отмечалось выше, в работе [3] были изучены свойства этой функции и построена L_2-теория интегральных преобразований с ядром Вольтерра. В настоящем параграфе строится L_2-теория интегральных преобразований, ядрами которых служит обобщенная функция типа Вольтерра.

1°. Приведем некоторые интегральные формулы, связанные с функцией ${}_p\nu_q(z)$. Из (2.1) легко следует

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^z (z-t)^{\alpha-1}{}_p\nu_q(\lambda t^{\frac{1}{\beta}})\, t^{\gamma-1}dt=$$

$$=z^{\alpha+\gamma-1}{}_{p+1}\nu_{q+1}\left\{\begin{matrix}\beta_1,\dots,\beta_p,\beta;\nu_1,\dots,\nu_p,\gamma\\ \alpha_1,\dots,\ \alpha_{q+1},\beta;\mu_1,\dots,\mu_{q+1},\gamma+\alpha\end{matrix};\lambda z^{-\frac{1}{\beta}}\right\}\quad(\alpha,\beta,\gamma>0). \tag{2.3}$$

Установим теперь формулу

$$\int_0^\infty {}_p\nu_q(zt^{\frac{1}{\alpha}})\, t^{\beta-1}e^{-\zeta t}\,dt=$$

$$=\zeta^{-\beta}{}_{p+1}\nu_q\left\{\begin{matrix}\beta_1,\dots,\beta_p,\alpha;\nu_1,\dots,\nu_p,\beta\\ \alpha_1,\dots,\alpha_q,\alpha_{q+1};\mu_1,\dots,\mu_q,\mu_{q+1}\end{matrix};z\zeta^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}\quad(r\leqslant\alpha,\ \beta>0), \tag{2.4}$$

где z—любое комплексное число, а комплексный параметр ζ подчинен условиям:

$$\begin{aligned}&\text{при} && r<\alpha,\quad \mathrm{Re}\,\zeta>0,\\ &\text{при} && r=\alpha,\quad \mathrm{Re}\,\zeta>s|z|^r.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь

$$s=\left(\frac{\alpha_1}{r}\right)^{\frac{r}{\alpha_1}}\cdots\left(\frac{\alpha_{q+1}}{r}\right)^{\frac{r}{\alpha_{q+1}}}\left(\frac{\beta_1}{r}\right)^{-\frac{r}{\beta_1}}\cdots\left(\frac{\beta_p}{r}\right)^{-\frac{r}{\beta_p}}. \tag{2.6}$$

Если ζ удовлетворяет условию (2.5), то число $\varepsilon>0$ можно выбрать так, чтобы

$$\begin{aligned}&\text{при} && r<\alpha,\quad \mathrm{Re}\,\zeta\geqslant\varepsilon,\\ &\text{при} && r=\alpha,\quad \mathrm{Re}\,\zeta\geqslant(s+\varepsilon)|z|^r.\end{aligned} \tag{2.5'}$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\left|\frac{\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(u\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\right|=O\left(u^{-\frac{u}{r}-\mu+\frac{1}{2}}(sre)^{\frac{u}{r}}\right),\quad u\to\infty \tag{2.7}$$

где

$$\mu=\mu_1+\dots+\mu_{q+1}-\nu_1-\dots-\nu_p+\frac{p-q}{2}. \tag{2.8}$$

Поэтому можно указать такую постоянную B_1, не зависящую от u, чтобы

$$\left|\frac{\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(u\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\right|\leqslant B_1\left[\left(s+\frac{\varepsilon}{4}\right)re\right]^{\frac{u}{r}}u^{-\frac{u}{r}},\ u>0. \tag{2.7'}$$

Далее, имея в виду, что

$$\max_{0<t<\infty} t^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\gamma t} = \left(\frac{u}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\frac{u}{\alpha}},$$

из (2.7′) получим

при $r<\alpha$

$$\max_{0<t<\infty}\left|\frac{\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(u\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{e}{u}\right)^{u\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\right)} \left\{\frac{\left[\left(s+\frac{\varepsilon}{4}\right)r\right]^{\frac{1}{r}}|z|}{\left(\alpha\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^u \leqslant B_2(\varepsilon;|z|)\,e^{-u}, \tag{2.9}$$

при $r=\alpha$

$$\max_{0<t<\infty}\left|\frac{\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(u\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha}} e^{-\left(s+\frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^r t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{s+\frac{\varepsilon}{4}}{s+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{u}{r}}. \tag{2.10}$$

Из оценок (2.9), (2.10) вытекает, что при $r<\alpha$ и $r=\alpha$ соответственно на полуоси $0\leqslant t<\infty$ равномерно сходятся интегралы

$$e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\,{}_p\psi_q(zt^{\frac{1}{\alpha}})\,t^{\beta-1} =$$

$$=\int_0^\infty \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(u\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha}+\beta-1} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\,du$$

и

$$e^{-\left(s+\frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^r t}\,{}_p\psi_q(zt^{\frac{1}{\alpha}})\,t^{\beta-1} =$$

$$=\int_0^\infty \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(u\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha}+\beta-1} e^{-\left(s+\frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^r t}\,du.$$

Ввиду (2.5′) при интегрировании по $0\leqslant t<+\infty$ выражения

$$e^{-\zeta t}\,{}_p\psi_q(zt^{\frac{1}{\alpha}})\,t^{\beta-1} = \int_0^\infty \frac{\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(u\beta_1^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(u\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(u\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})} z^u t^{\frac{u}{\alpha}+\beta-1} e^{-\zeta t}\,du$$

допустима замена порядка интегрирования. Если заметить, что при $\operatorname{Re}\zeta > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\zeta t} t^{\frac{u}{\alpha}+\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(u\alpha^{-1}+\beta)}{\zeta^{u\alpha^{-1}+\beta}}, \quad (u > 0)$$

то, выполнив интегрирование, получим формулу (2.4).

2°. Введем в рассмотрение следующие функции

$$M^{(+)}(s) = \begin{cases} 2\pi i\, e^{-i\frac{\pi}{2}s} \dfrac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{1}{\alpha_{q+1}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)}, & \operatorname{Im} s < 0 \\ 0, & \operatorname{Im} s > 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$M^{(-)}(s) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} s < 0 \\ -2\pi i\, e^{i\frac{\pi}{2}s} \dfrac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)}. & \operatorname{Im} s > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

и

$$H^{(\pm)}(s) = e^{\pm i\frac{\pi}{2}s} \frac{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{1}{\alpha_1}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1} + \frac{1}{\alpha_{q+1}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{1}{\beta_1}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p + \frac{1}{\beta_p}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)}. \tag{2.13}$$

Нетрудно проверить, что на всей плоскости комплексного переменного s справедливо тождество

$$M^{(+)}(s)\, H^{(-)}(1-s) + M^{(-)}(s)\, H^{(+)}(1-s) = 2\pi. \tag{2.14}$$

Используя асимптотическую формулу (1.21) для гамма-функции, убедимся, что при $s = \frac{1}{2} + it \quad (-\infty < t < \infty)$

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| M^{(\pm)}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| < +\infty, \tag{2.15}$$

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| < \infty. \tag{2.16}$$

если только удовлетворены условия

$$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{q+1}}-\frac{1}{\beta_1}-\cdots-\frac{1}{\beta_p}=1, \tag{2.17}$$

$$\mu_1+\cdots+\mu_{q+1}-\frac{q+1}{2}=\nu_1+\cdots+\nu_p-\frac{p}{2}\left(\text{т. е. } \mu=\frac{1}{2}\right). \tag{2.18}$$

Из (2.15) и (2.16) следует, что

$$\frac{M^{(\pm)}(s)}{1-s},\quad \frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right).$$

Отсюда по теореме Меллина [9] заключаем, что существуют пределы в среднем

$$\frac{m^{(\pm)}(x)}{x}=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{M^{(\pm)}(s)}{1-s}x^{-s}ds\in L_2(0,\infty) \tag{2.19}$$

и

$$\frac{h^{(\pm)}(x)}{x}=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}x^{-s}ds\in L_2(0,\infty). \tag{2.20}$$

В дальнейшем через ${}_p\nu_q(z;\mu)$ обозначим следующую функцию

$${}_p\nu_q(z;\mu)=z^{\mu-1}\,{}_p\nu_q(z).$$

Лемма 4. *При выполнении условий (2.17) и (2.18)*

$$\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{M^{(\pm)}(s)}{1-s}x^{-s}ds=\frac{1}{x}\int\limits_0^x {}_p\nu_q\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}}t;\frac{1}{2}\right)dt. \tag{2.21}$$

Доказательство. Пусть L_a—есть контур области $D_a^+\left(|s|\leqslant a,\right.$ $\left.0\leqslant\arg s\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Так как функция

$$f(s)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{s+\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma(s\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(s\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(s\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(s\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\,x^{s-\frac{1}{2}}\quad(0<x<\infty)$$

голоморфна в D_a^+, то по теореме Коши

$$\int\limits_{L_a}f(s)\,ds=\int\limits_0^a f(\tau)\,d\tau+\int\limits_{C_a}f(s)\,ds-i\int\limits_0^a f(it)\,dt=0, \tag{2.22}$$

где C_a — есть дуга $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ окружности $s = ae^{i\varphi}$.

Оценим интеграл

$$J_a = \int\limits_{C_a} f(s)\,ds. \tag{2.23}$$

Имеем

$$|J_a| \leqslant$$

$$\leqslant a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(ae^{i\varphi} - \frac{1}{2}\right)}}{ae^{i\varphi} + \frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\beta_1}e^{i\varphi} + \nu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\beta_p}e^{i\varphi} + \nu_p\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha_1}e^{i\varphi} + \mu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\alpha_{q+1}}e^{i\varphi} + \mu_{q+1}\right)} \right| x^{a\cos\varphi - \frac{1}{2}}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{10}}{\sqrt{x}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}a\sin\varphi}\, x^{a\cos\varphi} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\beta_1}e^{i\varphi} + \nu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\beta_p}e^{i\varphi} + \nu_p\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha_1}e^{i\varphi} + \mu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\alpha_{q+1}}e^{i\varphi} + \mu_{q+1}\right)} \right| d\varphi. \tag{2.24}$$

Предположим, что все α_i (β_j) отличны от ∞ или же при некотором i (j) $\alpha_i = \infty$ ($\beta_j = \infty$), но соответствующее $\mu_i = \frac{1}{2}$ $\left(\nu_j = \frac{1}{2}\right)$. Тогда из (1.29) ввиду (2.17), (2.18) следует, что

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\beta_1}e^{i\varphi} + \nu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\beta_p}e^{i\varphi} + \nu_p\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha_1}e^{i\varphi} + \mu_1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{a}{\alpha_{q+1}}e^{i\varphi} + \mu_{q+1}\right)} \right| =$$

$$= O\left(a^{-a\cos\varphi}\, e^{a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}\, s_1^{-a\cos\varphi}\right), \tag{2.25}$$

где

$$s_1 = \alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \cdots \alpha_{q+1}^{\frac{1}{\alpha_{q+1}}} \beta_1^{-\frac{1}{\beta_1}} \cdots \beta_p^{-\frac{1}{\beta_p}}.$$

Из (2.24) и (2.25) получим

$$|J_a| \leqslant \frac{c_{11}}{\sqrt{x}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{xe}{as_1}\right)^{a\cos\varphi} e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)a\sin\varphi}\, d\varphi. \tag{2.26}$$

Выберем a настолько большим, чтобы при фиксированном $x>0$ имели

$$\frac{xe}{as_1}<e^{-1},$$

тогда из (2.26) имеем

$$|J_a|\leqslant\frac{c_{11}}{\sqrt{x}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-a\cos\varphi}d\varphi=\frac{c_{11}}{\sqrt{x}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-a\sin\varphi}d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_{11}}{\sqrt{x}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}a\varphi}d\varphi<\frac{c_{11}}{\sqrt{x}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{2}{\pi}a\varphi}d\varphi=\frac{c_{11}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\pi}{2a}$$

т. е.

$$\lim_{a\to\infty}J_a=O. \tag{2.27}$$

Подставляя значение $f(s)$ в (2.22) получим

$$\int\limits_0^a\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(\tau-\frac{1}{2}\right)}}{\tau+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\tau\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(\tau\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(\tau\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(\tau\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}x^{\tau-\frac{1}{2}}d\tau+$$

$$+J_a-i\int\limits_0^a\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(it-\frac{1}{2}\right)}}{it+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(it\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(it\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(it\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(it\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}x^{it-\frac{1}{2}}dt=0$$

или

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x\left\{\int\limits_0^a\frac{\Gamma(\tau\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(\tau\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(\tau\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(\tau\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}x\right)^{\tau-\frac{1}{2}}d\tau\right\}dx+$$

$$+J_a-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{M^{(+)}(s)}{1-s}x^{-s}ds=O. \tag{2.28}$$

Переходя в тождестве (2.28) к пределу при $a\to\infty$, ввиду (2.27) получим

$$\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{M^{(+)}(s)}{1-s}x^{-s}ds=$$

$$=\frac{1}{x}\int\limits_0^x\left\{\int\limits_0^\infty\frac{\Gamma(\tau\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(\tau\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(\tau\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(\tau\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}x\right)^{\tau-\frac{1}{2}}d\tau\right\}dx,$$

т. е. (2.21) в случае верхнего знака $+$.

Аналогично мы убедимся и в справедливости той же формулы в случае нижнего знака, если в качестве контура L_a взять границу области $D_a: |s| < a, -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg s \leqslant 0$.

Что касается функций $h^{(\pm)}(x)$, то установление явных формул для их представления сопряжено с теми же затруднениями, что и в случае функции $h_p^{(\pm)}(x; \mu)$.

3°. Пользуясь основным тождеством (2.14), а также определениями (2.19), (2.20) $m^{(\pm)}(x)$ и $h^{(\pm)}(x)$, можно установить следующие предложения, доказательство которых мы также не приводим, так как оно сходно с доказательствами предыдущих теорем.

Теорема 3. *Пусть положительные параметры* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{q+1}$; $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$; $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{q+1}$; $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$ *удовлетворяют условиям*

1) $$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} - \cdots - \frac{1}{\beta_p} = 1,$$

2) $$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{q+1} - \frac{q+1}{2} = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p - \frac{p}{2},$$

причем $\mu_i = \frac{1}{2}$ *при* $\alpha_i = \infty$ *и* $\nu_j = \frac{1}{2}$ *при* $\beta_j = \infty$ $(i = 1, 2, \cdots, q+1$ $j = 1, 2, \cdots, p)$.

а) *Тогда для любой функции* $g(y) \in L_2(0, \infty)$ *формула*

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{m^{(\pm)}(xy)}{y} g(y)\, dy$$

определяет почти всюду функции $f^{(\pm)}(x)$, *принадлежащие классу* $L_2(0, \infty)$.

Двойственная формула

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(+)}(xy)}{x} f^{(-)}(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(-)}(xy)}{x} f^{(+)}(x)\, dx$$

также имеет место почти всюду на $(0, \infty)$.

б) *Обратно, для любой функции* $f(x) \in L_2(0, \infty)$ *формула*

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(xy)}{x} f(x)\, dx$$

определяет почти всюду на $(0, \infty)$ *функции* $g^{(\pm)}(y) \in L_2(0, \infty)$.

Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{m^{(-)}(xy)}{y} g^{(+)}(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{m^{(+)}(xy)}{y} g^{(-)}(y)\, dy$$

также имеет место всюду на $(0, \infty)$.

И в этом случае равенство Парсеваля заменяется неравенствами аналогично (1.38), (1.39).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 IX 1961

Ս. Ա. Հակոբյան

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ, ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԻՊԵՐԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ՎՈԼՏԵՐՐԱՅԻ ՏԻՊԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ՀԱՆԴԻՍԱՑՈՂ ԿՈՐԻԶՆԵՐՈՎ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա աշխատությունում կառուցված է ինտեգրալ ձևափոխությունների L_2-տեսությունը, որոնց համար կորիզներ են հանդիսանում (1)—ընդհանրացված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաները և (2)—Վոլտերրայի տիպի ընդհանրացված ֆունկցիաները։ Աշխատությունում օգտագործված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [1]—[3] աշխատություններում զարգացված կոմպլեքս տիրույթում ինտեգրալ ձևափոխությունների L_2-տեսությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применение в теории целых функций. Известия АН СССР, серия матем., 19, 1955, 133–190.
2. *Джрбашян М. М.* Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Лефлера. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том XIII, № 3, 1960, 21—63.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра. Известия АН СССР, серия матем., 24, 1960, 387—420.
4. *Fox C.* The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions. Proc. of the Lond. Math. Soc., vol. 27 (1928) 389—400.
5. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. The Journ. of the Lond. Math. Soc., vol. X, 1935, 286—293.
6. *Fox C.* A generalization of the Fourier-Bessel integral transform. Proc. Lond. Math. Soc., 1929, 401—452.
7. *Erdely A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi G.* Higher transcendental functions, vol. 1, 1955, New York.
8. *Уиттекер Е., Т.* и *Ватсон Г. Н.* Курс современного анализа. т. II. ГТТИ, 1934, М.—Л.
9. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ, Гостехиздат, 1946, М.—Л.