

А. Г. Багдоев

Определение давления для больших моментов времени

Рассматривается задача определения давления в жидкости, занимающей нижнее полупространство, для больших моментов времени. Задача предполагается осесимметричной.

Возьмем ось Oz в плоскости поверхности жидкости, Oz направим вниз.

Пусть на границе полупространства приложено давление

$$P(r_0, z, t) = \begin{cases} P_1 & r < Vt, \\ 0 & r > Vt, \end{cases} \quad (1)$$

где P_1 и V — постоянны, t — время, P — давление. Если жидкость несжимаемая, для точек полупространства имеем [1]

$$P(r_0, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{Vt} \frac{r dr}{Vr^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2}. \quad (2)$$

Рассмотрим это выражение при больших t и конечных координатах r_0, z . Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= V \frac{1}{2\pi} z \int_0^{2\pi} \frac{Vt d\psi}{(V^2 t^2 + r_0^2 - 2Vtr_0 \cos \psi + z^2)^{3/2}} = \\ &= V \frac{1}{2\pi} z \frac{1}{V^2 t^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\left(1 + \frac{r_0^2 + z^2}{V^2 t^2} - 2r_0 \cos \psi \frac{1}{Vt}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Разложив (3) по обратным степеням t приближенно получим

$$\frac{P}{P_1} = 1 - \frac{z}{Vt} + \frac{z^3}{V^3 t^3} \frac{1}{2} - \frac{zr_0^2}{V^3 t^3} \frac{3}{4}. \quad (4)$$

Исследуем эту же задачу для случая идеальной сжимаемой жидкости. В этом случае имеем [1]

$$P(r_0, z, t) = J_1 + J_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{z r dr d\psi}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2)^{3/2}}.$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 \frac{\partial r_0^2}{\partial z} d\psi}{V r_0^2 + r_0^2 - 2r_0^2 \cos \psi + z^2} \quad (5)$$

причем

$$r_0^2 = \frac{Vt - M^2 r_0 \cos \psi - \sqrt{(Vt - M^2 r_0 \cos \psi)^2 - (1 - M^2)(V^2 t^2 - M^2 r_0^2 - M^2 z^2)}}{1 - M^2}$$

$$\text{и} \quad M = \frac{V}{a} \quad (6)$$

Для больших t и конечных r_0, z имеем

$$\frac{r_0^2}{Vt} = \frac{1}{1 - M^2} - \frac{M^2 r_0 \cos \psi}{1 - M^2} \frac{1}{Vt} - M \frac{1}{V^2 t^2} \frac{r_0^2 + z^2 - r_0^2 \cos^2 \psi}{2} \quad (7)$$

В (5) разлагая J_2 в ряд по $\frac{1}{t}$ получим

$$J_2 = Mz \frac{1}{Vt} + \frac{1}{V^3 t^3} (1 + M)^2 \frac{Mz}{2} \left(z^2 + \frac{3}{2} r_0^2 \right) \quad (8)$$

Поступив аналогично со случаем несжимаемой жидкости, найдем

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0^2} z \frac{\partial r_0^2}{\partial t} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_0^2 + z^2}{r_0^2} + 3r_0 \cos \psi \frac{1}{r_0} + \frac{15}{8} \frac{4r_0^2 \cos^2 \psi}{r_0^2} \right) d\psi \quad (9)$$

С учетом выражения (7) получим

$$J_1 = -z \frac{M+1}{Vt} - \frac{(M+1)^2}{V^3 t^3} z M \frac{\frac{1}{2} r_0^2 + z^2}{6} - \\ - \frac{(M+1)^3}{V^3 t^3} z \frac{-3r_0^2 - 3z^2 + \frac{15}{2} r_0^2}{6} + \frac{(M+1)^3}{V^3 t^3} Mz \frac{r_0^2}{2} + C,$$

причем C определяется условием $p(r_0, 0, t) = p_1$.

Окончательно найдем

$$\frac{P}{P_1} = 1 - \frac{z}{Vt} + \frac{(M+1)^2}{V^3 t^3} z \frac{z^2 - \frac{3}{2} r_0^2}{2} + \frac{(M+1)^2}{V^3 t^3} Mz \frac{2r_0^2}{3} \quad (10)$$

Полученные выражения (4) и (10) показывают, что сжимаемость и неоднородность сказываются только в степенях $\frac{1}{V^3 t^3}$. Этот факт аналогичен случаю проникания конуса с постоянной скоростью, где также давление на конусе не зависит от M . Аналогично решается

задача для произвольного граничного давления в (1). Для случая упругого полупространства на фронте волны тензор напряжений убывает как $\frac{1}{\sqrt{t}}$ [2].

В случае неоднородной жидкости для закона $a(z)$ с глубиной

$$a(z) = \begin{cases} \psi(z) & z < H \\ a_1 & z > H \end{cases} \quad (11)$$

и произвольного давления $P_1(r, t)$ [3] в моменты $t > \frac{H}{a_1}$ имеем закон затухания в линейном приближении

$$\frac{P}{P_1} = \sqrt{\frac{R(t_0) a(0)}{a_1 \cos \theta}} \left[1 - \frac{R'(t_0) \sin \theta}{R^*(t_0) \cos \theta a(0)} \frac{a(0)}{a_1(t)} \right], \quad (12)$$

где t_0 — фиксированный момент времени, $\cos \theta = \frac{a(0)}{R^*(t)}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 IX 1961

Յ. Գ. Յազգյան

ՀԱՆՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՄԵԾ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Հոդվածում դիտարկվում է սեղմելի հեղուկի մեջ ճնշման տարածման դժային խնդիրը ժամանակի մեծ արժեքների համար: Հեղինակի կողմից նախկինում ուսացված ինտեգրալները վերածվում են շարքերի, որոնց մեջ պահպանվում են առաջին երկու անդամները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдоев А. Г. Проникание давления в сжимаемую жидкость. Вестник МГУ, 956, № 2.
2. Багдоев А. Г. Распространение давления в упругом полупространстве. ДАН Арм. ССР, 28, № 2, 1959.
3. Багдоев А. Г. Определение давления в окрестности фронта. Известия АН СССР, серия геофизическая, № 5, 1960.