

П. О. Галфаян

Изгиб швеллера с тонким усиливающим покрытием

В настоящей статье рассматривается приближенное решение задачи об определении касательных напряжений и координат центра изгиба швеллера. Боковая поверхность стержня предполагается покрытой усиливающим слоем постоянной толщины. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работах [6, 7].

Рассматриваемая задача приводится к решению совокупности двух вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Решение рассматриваемой задачи доведено до числовых результатов.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения изгибаемого стержня показаны на фиг. 1. Один конец стержня заделан, а на его свободном конце приложена поперечная изгибающая сила P , направленная параллельно оси x .

Предположим, что коэффициенты Пуассона для основного материала и усиливающего покрытия одинаковы. Тогда при изгибе стержня, боковая поверхность которого свободна от внешних воздействий, можно положить

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0. \quad (1.1)$$

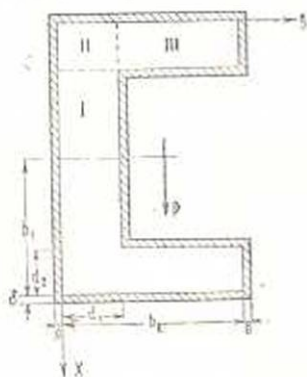
Для осевой деформации ε_z и нормального напряжения σ_z принимаем следующие выражения [1]

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2} (A_0 x + B_0) (l - z), \quad (1.2)$$

$$\sigma_z^i = (A_i x + B_i) (l - z), \quad (1.3)$$

где l — длина стержня, E_2 — модуль упругости материала покрытия, а A_i и B_i ($i=0, 1, 2$) — постоянные, подлежащие определению.

Рассматривая условия равновесия части стержня, заключенной между свободным концом $z=l$ и произвольным сечением $z=\text{const}$, будем иметь



Фиг. 1.

$$\iint_{D_1} \varepsilon_z dx dy = 0, \quad \iint_{D_1} x \varepsilon_z dx dy = -M, \quad (1.4)$$

где $D_0 = D_1 + D_2$ — поперечное сечение изгибаемого стержня, M — изгибающий момент в сечении стержня $z = \text{const}$.

$$M = P \cdot (l - z), \quad (1.5)$$

Используя закон Гука, из условий (1.2) и (1.3) получим

$$A_0 = A_2, \quad B_0 = B_2 \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{E_2}{E_1} A_1, \quad B_2 = \frac{E_2}{E_1} B_1. \quad (1.6)$$

Из (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) получим

$$A_1 = -\frac{3P}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - 3\lambda_1 b_1^2}, \quad B_1 = -b_1 A_1, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= b_2 d_2 + (b_1 - d_2) d_1 + 2\mu (b_1 + b_2 + 2 - 0.5 \cdot d_1), \\ \lambda_2 &= 4d_1 b_1^3 + d_2 (b_2 - d_1) (6b_1^2 - 3b_1 d_2 + d_2^2) + \\ &+ \mu [2b_1^2 (4b_1 + 6b_2 - 3d_1 - 2d_2) - 3d_2 (b_2 - d_1) (2b_1 - d_2) + \\ &+ 3\delta [b_1 (4b_1 + d_1 - 2d_2) + d_2 (b_2 - d_1)] + \delta^2 (6b_1 + 2b_2 - d_1 + 2\delta)]. \end{aligned}$$

Здесь $\mu = \frac{G_2}{G_1} \delta$, δ — толщина покрытия, G_1 и G_2 — модули сдвига основного материала и материала покрытия.

Перейдем теперь к определению центра изгиба швеллера и касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} в соответствующих областях D_1 и D_2 .

Функция напряжений $F(x, y)$ при изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, когда линия действия изгибающей силы P проходит через приведенный центр тяжести сечения, удовлетворяет уравнению Пуассона [1]

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1 + \nu} A_1 (y - y_0) \quad (1.8)$$

в области сечения и условию

$$F + \mu \frac{\partial F}{\partial n} = -\int \left(A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x \right) dy + C \quad (1.9)$$

на контуре области.

Здесь ν — коэффициент Пуассона, y_0 — координата центра тяжести сечения, A_1 и B_1 — известные постоянные (1.7), C — постоянная интегрирования, которая для односвязных областей может быть принята равной нулю [1].

Если ось y провести по оси симметрии рассматриваемого профиля и изменить знак x , заметим, что в постановке задачи ничего не изменится. Следовательно функция $F(x, y)$ симметрична относи-

тельно оси симметрии профиля. Вследствие симметрии достаточно ограничиться рассмотрением верхней половины швеллера. Для продолжения решения на нижнюю половину поперечного сечения, достаточно выполнения условия

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=b_1} = 0, \quad (1.10)$$

которое следует из симметрии задачи.

Касательные напряжения в области D_1 определяются формулами

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (1.11)$$

В области D_2 , соответствующей тонкому покрытию, касательное напряжение не меняется вдоль нормали n , направлено параллельно касательной L и определяется формулой [2]

$$\tau_{xz}^* = -\frac{F}{z} + A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x. \quad (1.12)$$

Функцию $F(x, y)$ будем искать в виде

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) & \text{в области I,} \\ F_2(x, y) & \text{в области II,} \\ F_3(x, y) + S(x, y) & \text{в области III,} \end{cases} \quad (1.13)$$

где

$$S(x, y) = \frac{x + \mu}{d_2 + 2\mu} r_0 y, \quad r_0 = \frac{d_2}{2} (2b_1 - d_2) A_1. \quad (1.14)$$

На основании (1.8), (1.9), (1.10) и (1.13), для определения F_1 , F_2 и F_3 получаем следующие условия

$$\Delta F_i = -\frac{\nu}{1-\nu} A_1 (y - y_0) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.15)$$

$$F_1(x, 0) - \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_1(x, d_1) + \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0, \quad (1.16)$$

$$F_2(x, 0) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_2(0, y) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.17)$$

$$F_3(0, y) - \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F_3(d_2, y) + \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = 0, \quad (1.18)$$

$$F_3(x, b_2) + \mu \frac{\partial F_3}{\partial y} \Big|_{y=b_2} = -r_0 \frac{b_2 + \mu}{d_2 + 2\mu} (x + \mu), \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=b_1} = 0, \quad (1.19)$$

$$F_2(d_2, y) = F_1(d_2, y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=d_2}, \quad (1.20)$$

$$F_2(x, d_1) = F_1(x, d_1) + S(x, d_1), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} + \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=d_1}. \quad (1.21)$$

Функции F_1 , F_2 и F_3 представим в виде рядов

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.22)$$

$$F_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.23)$$

$$F_3(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(y) \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \quad (1.24)$$

где

$$M_k = \sqrt{\mu + \frac{d_1}{2}(1 + \mu^2 \beta_k^2)}, \quad N_k = \sqrt{\mu + \frac{d_2}{2}(1 + \mu^2 \alpha_k^2)}, \quad (1.25)$$

α_k и β_k ($k=0, 1, 2, \dots$) являются корнями трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} 1 - \mu^2 \alpha_k^2 + 2\mu \alpha_k \operatorname{ctg} d_2 \alpha_k &= 0, \\ 1 - \mu^2 \beta_k^2 + 2\mu \beta_k \operatorname{ctg} d_1 \beta_k &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Системы функций

$$\frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k} \quad (1.27)$$

в интервалах $0 < y < d_1$ и $0 < x < d_2$ являются ортонормированными.

Разложим функции $S(x, y)$ и $x + \mu$ в ряды по функциям (1.27) в интервале $0 < x < d_2$.

$$\begin{aligned} S(x, y) &= r_0 y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \\ x + \mu &= (d_2 + 2\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

2. Подставив (1.22) и (1.24) в (1.15) и используя условие (1.19), найдем функции $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$. Используя полученные значения функций $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$, в силу (1.22) и (1.24), получим

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[B_k \frac{\operatorname{ch}(x - b_1) \beta_k}{\operatorname{ch} b_1 \beta_k} + \frac{g_k}{\beta_k^2} \right] \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (2.1)$$

$$F_3(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_k \frac{\operatorname{sh}(b_2 - y) \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch}(b_2 - y) \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} + \frac{h_k}{\alpha_k^2} (y - y_0) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\alpha_k^2 N_k} \cdot \frac{(b_2 + \mu - y_0) h_k N_k + (-1)^k (b_2 + \mu) r_0 \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} \Big] \times \\
 & \times \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Здесь B_k и E_k — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (1.20) и (1.21)

$$\begin{aligned}
 g_k &= - \frac{\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{A_1}{\beta_k M_k} [y_0 + \mu + (-1)^k (y_0 - d_1 - \mu)], \\
 h_k &= \frac{\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k N_k} A_1, \quad y_0 = \frac{1}{2} \left[d_1 + \frac{b_2 d_2 (b_2 - d_1)}{b_1 d_1 + (b_2 - d_1) d_2} \right].
 \end{aligned}$$

Для определения $\varphi_k(x)$ используем метод Г. А. Гринберга [4]. Подставив полученные значения функций $\varphi_k(x)$ в (1.23), получим

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \left[C_p \frac{(1 + \mu^2 \beta_p^2) \operatorname{th} d_2 \beta_p + 2\mu \beta_p}{1 + \mu \beta_p \operatorname{th} d_2 \beta_p} + \right. \right. \\
 & + \frac{g_p}{\beta_p^2} \left(1 + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \beta_p^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d_1 \beta_p + \mu \beta_p \operatorname{sh} d_2 \beta_p} \right) \Big] \frac{\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y}{M_p} + \\
 & + \left[F_k \frac{(1 - \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} (b_2 - d_1) \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} + \right. \\
 & + \frac{(\mu + d_1 - y_0) h_k N_k + (-1)^k (\mu + d_1) r_0 \alpha_k}{\alpha_k^2 N_k} - \\
 & - \frac{(\mu + b_2 - y_0) h_k N_k + (-1)^k (\mu + b_2) r_0 \alpha_k}{\alpha_k^2 N_k} \cdot \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} \Big] \times \\
 & \times \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y + \mu \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k} \Big\} \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы суммы ряда [6, 7]

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sin d_1 \beta_p + \mu \beta_p \cos d_1 \beta_p) (\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y)}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2} = \\
 & = \mu \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y + \mu \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

и граничные условия (1.17). Условия (1.16) и (1.18) удовлетворяются при помощи уравнений (1.26).

Используя условия (1.20) и (1.21) и принимая во внимание (1.28) (2.1), (2.2) и (2.3), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} Y_p + a_k, \quad Y_k = \sum_{p=0}^{\infty} b_{kp} X_p + b_k \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

где

$$a_{kp} = \frac{m_k x_p^2}{(x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2}, \quad b_{kp} = \frac{n_k \beta_p^2}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2}, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a_k = m_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{x_p (x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} [(\mu + d_1 - y_0) h_p N_p + (-1)^p (\mu + d_1) r_0 x_p] - \\ - m_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{x_p (x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} d_1 x_p + \mu x_p \operatorname{ch} d_1 x_p}{\operatorname{sh} b_2 x_p + \mu x_p \operatorname{ch} b_2 x_p} [(\mu + b_2 - y_0) h_p N_p + \\ + (-1)^p (\mu + b_2) r_0 x_p] + (-1)^k \frac{g_k M_k}{\beta_k^3} \times \\ \times \frac{[(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k] \operatorname{sh} (b_1 - d_2) \beta_k}{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k (\operatorname{ch} b_1 \beta_k + \mu \beta_k \operatorname{sh} b_1 \beta_k)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} b_k = n_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \cdot g_p}{\beta_p (\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p} \left[1 + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \cdot \beta_p^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d_2 \beta_p + \mu \beta_p \operatorname{sh} d_2 \beta_p} \right] + \\ + \frac{n_k}{\alpha_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k} \left\{ (\mu \alpha_k + \operatorname{th} d_1 \alpha_k) \left[(-1)^k r_0 + \frac{h_k N_k}{\alpha_k} \right] - \right. \\ \left. - (1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k) [(-1)^k x_k r_0 d_1 + (d_1 - y_0) h_k N_k] \right\} - \\ - \frac{(-1)^k \mu}{\alpha_k^2} \cdot \frac{1 - \mu \alpha_k}{1 + \mu \alpha_k} \cdot \frac{(\mu + b_2 - y_0) h_k N_k + (-1)^k (\mu + b_2) r_0 x_k}{1 + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} (b_2 - d_1) \alpha_k}{\operatorname{sh}^2 b_2 \alpha_k}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$m_k = \frac{1}{\beta_k} \cdot \frac{[1 - \mu^2 \beta_k^2 \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k] [(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k]}{1 + \operatorname{th} d_2 \beta_k \cdot \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k + \mu \beta_k [\operatorname{th} d_2 \beta_k + \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k]}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} n_k = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{1 - \mu \alpha_k}{1 + \mu \alpha_k} \times \\ \times \frac{(1 + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k) [(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} d_1 \alpha_k + 2\mu \alpha_k]}{1 + \operatorname{th} d_1 \alpha_k \cdot \operatorname{ch} (b_2 - d_1) \alpha_k + \mu \alpha_k [\operatorname{th} d_1 \alpha_k + \operatorname{ch} (b_2 - d_1) \alpha_k]}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты C_k , E_k и B_k через X_k и Y_k определяются соотношениями

$$\begin{aligned} C_k = \frac{(-1)^k \beta_k}{M_k} \cdot \frac{1 + \mu^2 \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k} \cdot X_k, \\ E_k = \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \cdot \frac{\operatorname{sh} b_2 \alpha_k + \mu \alpha_k \operatorname{ch} b_2 \alpha_k}{(1 - \mu^2 \alpha_k^2) \cdot \operatorname{sh} (b_2 - d_1) \alpha_k} \cdot Y_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$B_k = \frac{(-1)^k}{M_k} \cdot \frac{\operatorname{ch} b_1 \beta_k}{\operatorname{sh} (b_1 - d_2) \beta_k} \left\{ - \frac{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k) \beta_k}{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k^2)} \cdot X_k + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2 \cdot Y_p}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \times \right. \\ \times \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{sh} b_2 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{ch} b_2 \alpha_p} [(\mu + b_2 - y_0) h_p N_p + (-1)^p (\mu + b_2) r_0 \alpha_p] + \\ \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\alpha_p (\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} [(\mu + d_1 - y_0) h_p N_p + (-1)^p (\mu + d_1) r_0 \alpha_p] \right\}.$$

Докажем, что совокупность бесконечных систем (2.5) при условии $\mu > \frac{2,395}{\pi} d_2$ вполне регулярна. Действительно, используя сумму

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k^2)}, \quad (2.12)$$

получаемую из (2.4), рассмотрим отдельно два следующих случая.

Первый случай. Когда

$$|1 - \mu \beta_k^2 \cdot \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k| < \mu \beta_k^2 \cdot \operatorname{th} (b_2 - d_2) \beta_k \quad (2.13)$$

будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{1}{\mu \beta_k^2} \cdot \frac{1 - \mu \beta_k^2 \cdot \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k}{1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + (\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k} < \\ < \frac{(\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \cdot \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k}{1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k + (\mu \beta_k^2 + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k} \leq \frac{1}{1 + y_{\min}}, \quad (2.14)$$

где

$$y = \frac{1 + \varepsilon x_k \cdot \operatorname{th} x_k}{\varepsilon x_k + \operatorname{th} x_k}, \quad (2.15)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu}{d_2}, \quad x_k = d_2 \beta_k > d_2 \beta_0 = 1,312.$$

Функция (2.15) получает свое минимальное значение при $x_k = \sqrt{1 + \varepsilon}$, которое равняется

$$y_{\min} = \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon} \cdot \operatorname{th} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon} + \operatorname{th} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| \leq \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon} \cdot \operatorname{th} \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon}}{\varepsilon}}}. \quad (2.16)$$

Второй случай. Когда

$$|1 - \mu \beta_k \cdot \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k| < 1 \quad (2.17)$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| &< \frac{1}{\mu \beta_k} \cdot \frac{\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k + (\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k) \operatorname{th} (b_1 - d_2) \beta_k} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon x_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{th} \alpha x_k + y_{\min}} = \frac{1}{\varepsilon x_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{th} \alpha \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon} \cdot \operatorname{th} \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon}}{\varepsilon}}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отсюда следует, что первая из систем (2.5) вполне регулярна, если $\varepsilon x_k = \mu \beta_k > 1$. Неравенство $\mu \beta_k > 1$ следует из уравнений (1.26) при условии $\varepsilon = \frac{\mu}{d_2} > \frac{2,395}{\pi}$.

Для второй системы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} |b_{kp}| &= \frac{1}{\mu x_k} \cdot \frac{|1 - \mu x_k|}{1 + \mu x_k} \times \\ &\times \frac{(1 + \mu x_k \operatorname{cth} b_2 x_k) (\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k)}{1 + \mu x_k \operatorname{th} d_1 x_k + (\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k) \operatorname{cth} (b_2 - d_1) x_k} < \\ &< \frac{1 + \mu x_k \cdot \operatorname{cth} b_2 x_k}{1 + \mu x_k} \cdot \frac{\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k}{1 + \mu x_k \operatorname{th} d_1 x_k + (\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k) \operatorname{cth} (b_2 - d_1) x_k} \leq \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon x_k \operatorname{cth} \beta x_k}{1 + \varepsilon x_k} \cdot \frac{1}{\operatorname{cth} \alpha x_k + y_{\min}} = \frac{1}{1 + y_{\min}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Заметим, что $\beta > \alpha$ и $\operatorname{cth} \beta x_k$, убывая, быстрее стремится к единице, чем $\operatorname{cth} \alpha x_k$.

Таким образом, на основании (2.16), (2.18) и (2.19), совокупность бесконечных систем (2.5) при условии $\mu > \frac{2,395}{\pi} d_i (i=1,2)$ вполне регулярна [5]. Из (2.14) и (2.19) следует, что бесконечные системы (2.5) вообще будут квази-вполне-регулярны при всех значениях параметра μ . Ограниченность свободных членов (2.7) и (2.8) вместе с вполне регулярностью бесконечных систем (2.5) позволяет определить искомые коэффициенты с любой степенью точности.

Заметим, что решение задачи кручения получено аналогичным образом. Бесконечные системы для задачи кручения отличаются от бесконечных систем (2.5) только свободными членами.

3. В качестве численного примера рассмотрим случай, когда

$$b_1 = b_2 = b = 2d, \quad d_1 = d_2 = d, \quad \delta = 0,1 \cdot d, \quad \frac{G_2}{G_1} = 10. \quad (3.1)$$

Тогда $\mu = d$.

Для рассматриваемого случая бесконечные системы (2.5) вполне регулярны.

Решив трансцендентное уравнение (1.26) методом касательных, для его корней с точностью до 10^{-3} будем иметь: $dx_0 = 1,312$; $dx_1 = 3,670$; $dx_2 = 6,579$; $dx_3 = 9,627$; $dx_4 = 12,72$; $dx_k = k\pi$ ($k=5, 6, 7, \dots$).

Обозначим значения неизвестных X_k и Y_k с избытком через X_k^+ , Y_k^+ , а с недостатком через X_k^- , Y_k^- . Пользуясь теорией вполне регулярных систем [5], для X_k и Y_k получим следующие оценки

$$\begin{aligned} \frac{10^3}{Pd} X_0^- &= 1,74154 \leq \frac{10^3}{Pd} X_0 \leq 1,74208 = \frac{10^3}{Pd} X_0^+, \\ \frac{10^3}{Pd} X_1^- &= 4,70386 \leq \frac{10^3}{Pd} X_1 \leq 4,71149 = \frac{10^3}{Pd} X_1^+, \\ \frac{10^3}{Pd} X_2^- &= 4,42052 \leq \frac{10^3}{Pd} X_2 \leq 4,43777 = \frac{10^3}{Pd} X_2^+, \\ \frac{10^3}{Pd} X_3^- &= 1,79451 \leq \frac{10^3}{Pd} X_3 \leq 1,81947 = \frac{10^3}{Pd} X_3^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_0^- &= -1,29463 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_0 \leq -1,29318 = \frac{10^3}{Pd} Y_0^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_1^- &= -4,99578 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_1 \leq -4,98534 = \frac{10^3}{Pd} Y_1^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_2^- &= -4,30025 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_2 \leq -4,28015 = \frac{10^3}{Pd} Y_2^+, \\ \frac{10^3}{Pd} Y_3^- &= -3,69217 \leq \frac{10^3}{Pd} Y_3 \leq -3,66367 = \frac{10^3}{Pd} Y_3^+. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Координата центра изгиба определяется по формуле

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{P} \int_L F(x, y) (x dy - y dx) - \frac{2}{P} \iint_{D_1} F(x, y) dx dy + \\ &+ \frac{A_1}{2P} \iint_{D_2} (x - 2b) xy dx dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где L — контур сечения, D_0 — область поперечного сечения изгибаемого швеллера.

Из (1.13), (1.14), (2.1) — (2.3), (2.11) и (3.1) определяем функции напряжений $F_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$). Используя найденное значение функции напряжений в формулах (1.11), (1.12) и (3.3), определим напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{xz}^* и координату центра изгиба y_c . Подставив коэффициенты $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ из (3.2) в полученные выражения для τ_{xz} и y_c , определим верхнюю и нижнюю границы напряжения τ_{xz} и координаты центра изгиба швеллера y_c . Для напряжения в усиливающем покрытии получаем

$$\tau_{xz}^*(b, 0) = \frac{G_2}{G_1} \tau_{xz}(b, 0) \quad \text{и} \quad \tau_{xz}^*(b, d) = \frac{G_2}{G_1} \tau_{xz}(b, d). \quad (3.4)$$

В таблице 1 приведены значения напряжения τ_{xz} в трех точках нейтральной оси.

Значения $\frac{d^2}{\rho} \tau_{xz}(x, y)$

Таблица 1

x, y b/d	$b, 0$	$b, \frac{d}{2}$	b, d
2	0,065887	0,066474	0,070441
	0,065886	0,066473	0,070439

Для центра изгиба при $\frac{b}{d} = 2$ получаем

$$y_c^- = 0,113574 \cdot d \leq y_c \leq 0,113596 \cdot d = y_c^+. \quad (3.5)$$

Согласно (3.1) и (3.4), напряжения в усиливающем покрытии будут в 10 раз больше, чем напряжения в соответствующих точках контакта основного материала.

Сопоставляя полученные результаты (3.5) с известными ([3], стр. 614), замечаем, что, благодаря усиливающему покрытию, координата центра изгиба швеллера при $\frac{b}{d} = 2$ уменьшается более чем в 1,4 раза, т. е. при данном отношении размеров поперечного сечения центр изгиба швеллера, оставаясь в основном материале, перемещается влево (фиг. 1).

Պ. Հ. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՇՎԵԼԼԵՐԻ ՁԵՎԻ
ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՋՈՂԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում դիտարկվում է շվելլերի ձևի լայնական հատվածք ունեցող պրիզմայաձև ձողի լայնական ուժով ծաման խնդիրը մոտավոր դրվածքով: Ձողի մակերևույթը ծածկապատված է հաստատուն հաստությամբ ուժեղացնող բարակ ծածկույթով: Մոտավորությունը կախնում է նրանում, որ ծածկույթին համապատասխանող D_2 տիրույթում լարումների F ֆունկցիան ըստ ծածկույթի հաստության փոփոխվում է գծային օրենքով, որը ֆիզիկորեն համարվել է այն ընդունելությունը, որ ծածկույթում շոշափող լարումները ըստ ծածկույթի հաստության չեն փոփոխվում: Այդ հարցը լուսարանված է [2] աշխատության մեջ, որտեղ, կենդով ձողի լայնական հատվածքի չափումների նկատմամբ ուժեղացնող բարակ շերտի հաստության փոքրությունից, ցույց է արված, որ որոշակի մոտավորությամբ լարումների $F(x, y)$ ֆունկցիան կարելի է որոշել միայն հիմնական նյութին համապատասխանող D_2 տիրույթում (1.9) խառը կերպին պարմանով:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [6, 7] աշխատություններում առանձնաբերված օրիգինորմալ ֆունկցիաների սխեմայով: Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հաժախությունների երկու անվերջ սխեմաների լրիվ սկզբային համակարգի լուծմանը: Դիտարկվող խնդրի լուծումը հասցված է մինչև թվային արդյունքների: Ծաման կենտրոնի համար ստացված թվային արդյունքը համեմատված է [3] աշխատության մեջ ստացված արդյունքի հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. ДАН АрмССР, 23, № 3, 1956.
2. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 5, 1957, 59—72.
3. Арутюнян Н. Х. и Гулканян Н. О. О центре изгиба некоторых призматических стержней с полигональным поперечным сечением. ПММ, 18, № 5, 1954, 597—618.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР. М.—Л., 1948.
5. Капторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
6. Чобанян К. С., Галфаян П. О. Кручение полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 6, 1959, 89—101.
7. Галфаян П. О. Изгиб полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 1, 1961, 51—65.