ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 6, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян и В. С. Тоноян

Некоторые задачи кручения валов переменного сечения со смешанными граничными условиями

Задача кручения тела вращения, когда на части поверхности тела заданы перемещения, а на остальной части — касательные напряжения, рассматривалась в работах Я. С. Уфлянда [1], Д. В. Грилицкого [2], Ч. Даса [3, 4] и других [5].

В первой работе рассмотрено кручение неограниченного упругого слоя, скручиваемого посредством поворота сцепленного с ним жесткого штампа. В работе [2] рассмотрена задача кручения двухслойной упругой среды, которая скручивается вследствие поворота жесткого кругового штампа, связанного с упругой средой с помощью сцепления. В работах Ч. Даса [3, 4] рассмотрены задачи кручения конического составного вала с закрепленными торцами, скручиваемого под действием касательных напряжений, приложенных на конической поверхности.

В настоящей работе рассмотрены некоторые задачи кручения валов переменного сечения, когда скручивание осуществляется жестким круглым штампом или жесткой обоймой, запрессованной на части поверхности вала. Решения этих задач представляются рядами по бесселевым и тригонометрическим функциям [8, 9], коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены. Это обстоятельство позволяет пользоваться теорией вполне регулярных систем линейных уравнений [10] и оценить неизвестные коэффициенты сверху и снизу с любой точностью, вследствие чего предлагаемые решения этих задач можно считать точными.

§ 1. Постановка задачи

Задачу о кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой будем решать при помощи функции перемещения $\Psi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет дифференциальному уравнению [6]

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0. \tag{1.1}$$

На границе области осевого сечения должны быть заданы: либо нормальные производные функции перемещения, либо сама функция перемещения, либо на некоторых частях поверхности вала — нормальные производные $\Psi(r, z)$, а на остальных частях — функция перемещения.

Касательные напряжения и перемещение v определяются через функцию перемещения $\Psi(r, z)$ формулами

$$\tau_r = Gr\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \qquad \tau_z = Gr\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad v = r\Psi(r, z), \tag{1.2}$$

где G — модуль сдвига.

Решив уравнение (1.1) методом разделения переменных, для функции $\Psi(r, z)$ получим следующую фундаментальную систему [6]

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\,[AI_1(\lambda r) + BK_1(\lambda r)]\,[C\sin\lambda z + D\cos\lambda z], \\[2ex] \dfrac{1}{r}\,[A\,\mathrm{sh}\,\mu z + B\,\mathrm{ch}\,\mu z]\,[CJ_1(\mu r) + DY_1(\mu r)], \end{cases} \tag{1.3}$$

где λ и μ — произвольные действительные параметры. Здесь $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — функции Бесселя n-го порядка от мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода, а $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода с действительным аргументом [8, 9].

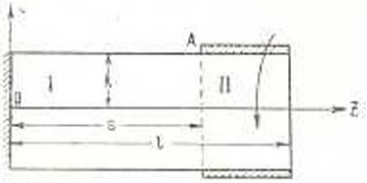
Отметим, что функции

$$1, \quad z, \quad \frac{1}{r^2}, \quad \frac{z}{r^2}, \quad r^2 - 4z^2 \tag{1.4}$$

также являются решениями уравнения (1.1).

§ 2. Кручение цилиндра, закрепленного одним торцом, когда на участке боковой поверхности заданы перемещения

Рассмотрим задачу кручения цилиндра радиуса R и длины l, когда скручивание осуществляется поворотом жесткой обоймы, запрессованной на цилиндрической поверхности около одного торца цилиндра, а другой торец считается закрепленным (фиг. 1). Остальные части поверхности цилиндра свободны от внешних усилий.



Фиг. 1.

При этом граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} &v(r, 0) = 0, \qquad \tau_z(r, l) = 0, \\ &\tau_r(R, z) = 0 \quad \text{в обл. } (0 < z < s), \\ &v(R, z) = d \quad \text{в обл. } (s \leqslant z \leqslant l). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Функцию $\Psi(r, z)$ ищем в виде

$$\Psi(r, z) = \begin{cases} \Psi_1(r, z) \text{ в области I} & (0 \leqslant z \leqslant s;\ 0 \leqslant r \leqslant R), \\ \Psi_2(r, z) \text{ в области II} & (s \leqslant z \leqslant l;\ 0 \leqslant r \leqslant R), \end{cases} \tag{2.2}$$

где $(l-s)$—ширина обоймы, а функции $\Psi_i(r, z)$ $(i=1, 2)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.1).

Из (2.1) и (2.2) следует, что функции $\Psi_i(r, z)$ дожны удовлетворять следующим граничным условиям

$$\Psi_1(r, 0)=\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\bigg|_{z=l}=0, \qquad R\Psi_2(R, z)=d \tag{2.3}$$

и условиям сопряжения

$$\Psi_1(r, s)=\Psi_2(r, s), \qquad \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\bigg|_{z=s}=\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\bigg|_{z=s}, \tag{2.4}$$

где $\frac{d}{R}$—угол поворота обоймы.

В силу (1.3) функции Ψ_1 и Ψ_2 представим в виде рядов Фурье—Дини [8, 9]

$$\Psi_1(r, z)=a_0+a_1z+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{I_1(\lambda_kr)}{r}\sin\lambda_kz+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\operatorname{sh}\mu_kz+B_k\operatorname{ch}\mu_kz)\frac{J_1(\mu_kr)}{r}, \tag{2.5}$$

$$\Psi_2(r, z)=b_0+b_1z+\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{(1)}\frac{I_1(\lambda_k'r)}{r}\sin\lambda_k'(z-s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k^{(1)}\operatorname{sh}\mu_k(z-s)+B_k\operatorname{ch}\mu_k(z-s)]\frac{J_1(\mu_kr)}{r}, \tag{2.6}$$

где
$$\lambda_k=\frac{k\pi}{s}, \qquad \lambda_k'=\frac{(2k-1)\pi}{2(l-s)}, \tag{2.7}$$

а μ_k—корни уравнения

$$J_1(xR)=0. \tag{2.8}$$

Удовлетворив граничным условиям (2.3) и условиям сопряжения (2.4), в силу (2.7) и (2.8) получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов, входящих в (2.5) и (2.6). Разрешив эти уравнения и подставив полученные значения неизвестных коэффициентов в (2.5) и (2.6), для функций Ψ_1 и Ψ_2 окончательно получим

$$\Psi_1(r, z)=\frac{zd}{Rs}+\frac{2R}{s^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}Y_k}{\lambda_kr}\cdot\frac{I_1(\lambda_kr)}{I_1(\lambda_kR)}\sin\lambda_kz+$$

$$+\frac{2m}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\mu_kr}\cdot\frac{\operatorname{sh}\mu_kz}{\operatorname{sh}\mu_ks}\cdot\frac{J_1(\mu_kr)}{J_2(\mu_kR)} \tag{2.9}$$

в области $(0\leqslant z\leqslant s;\ \ 0\leqslant r\leqslant R)$,

$$\Psi_2(r, z) = \frac{d}{R} + \frac{2m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\mu_k r} \frac{\operatorname{ch} \mu_k (l-s)}{\operatorname{ch} \mu_k (l-s)} \cdot \frac{J_1(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R)} \tag{2.10}$$

в области $(s \leqslant z \leqslant l;\ \ 0 \leqslant r \leqslant R)$.

Постоянные коэффициенты X_k и Y_k, входящие в выражения (2.9) и (2.10), определяются из бесконечных систем линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k + Q_p, \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k, \end{aligned}\right\} \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{2.11}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{pk} &= \frac{2\mu_p \operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p (l-s)}{ms \cdot \operatorname{ch} \mu_p l} \cdot \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2}, \\ b_{pk} &= \frac{2m\lambda_p I_1(\lambda_p R)}{R I_2(\lambda_p R)} \cdot \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$Q_p = -\frac{d \operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p (l-s)}{m \mu_p R \operatorname{ch} \mu_p l}. \tag{2.13}$$

Покажем, что системы (2.11) вполне регулярны.

Пользуясь выражениями (2.12) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| &= \frac{2\mu_p \operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p (l-s)}{ms \cdot \operatorname{ch} \mu_p l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p (l-s)}{m \operatorname{ch} \mu_p l} \left(\operatorname{cth} \mu_p s - \frac{1}{\mu_p s} \right) \leqslant \frac{1 + e^{-2\mu_p (l-s)}}{2m}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| &= \frac{2m\lambda_p I_1(\lambda_p R)}{R I_2(\lambda_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} = m. \end{aligned} \tag{2.14}$$

При этом использованы значения рядов

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} &= \frac{s}{2\mu_p} \left(\operatorname{cth} \mu_p s - \frac{1}{\mu_p s} \right), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} &= \frac{R}{2\lambda_p} \cdot \frac{I_2(\lambda_p R)}{I_1(\lambda_p R)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

и неравенства

$$\begin{aligned} &\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leqslant 1, \\ &\frac{\operatorname{sh} \mu_p s \cdot \operatorname{ch} \mu_p (l-s)}{\operatorname{ch} \mu_p l} \leqslant \frac{1 + e^{-2\mu_p (l-s)}}{2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Постоянное число m определяем из равенства

$$\frac{1+e^{-2\alpha_1(l-s)}}{2m}=m, \text{ т. е. } m=\sqrt{\frac{1+e^{-2\alpha_1(l-s)}}{2}}. \tag{2.17}$$

Тогда для систем (2.11) будем иметь оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}|<m, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|<m<1,$$

то-есть системы (2.11) вполне регулярны.

Из (2.13) видно, что свободные члены систем (2.11) ограничены сверху и при $p\to\infty$ стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{p}\right)$. При $s=l$ системы (2.11) становятся регулярными. Но для этого случая легко получить точное решение поставленной задачи без применения бесконечных систем.

Полученное решение поставленной задачи (2.9), (2.10) можно считать также решением задач кручения цилиндра радиуса R и длиной $2l$, когда кручение осуществляется: а) кольцевой обоймой шириной $2(l-s)$, насаженной на середину цилиндрической поверхности вала, торцы которого закреплены; б) кольцевыми обоймами шириной $(l-s)$, насаженными на края цилиндрической поверхности вала.

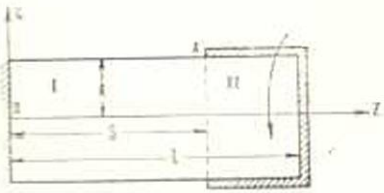
§ 3. Кручение цилиндра, закрепленного одним торцом, когда на другом торце и участке боковой поверхности заданы перемещения

Рассмотрим задачу кручения цилиндра, когда скручивание осуществляется с помощью круглого штампа в виед чашки радиуса R и высотой $(l-s)$, насаженного на один конец цилиндра, а другой торец цилиндра считается закрепленным (фиг. 2). Для простоты принимаем, что остальные части поверхности свободны от внешних усилий.

При этом граничными условиями будут

$$v(r,0)=0, \qquad v(r,l)=\frac{dr}{R}.$$

$$\tau_r(R,z)=0 \quad \text{в обл. } (0<z<s), \tag{3.1}$$
$$v(R,z)=d \quad \text{в обл. } (s<z<l).$$



Фиг. 2.

Функцию $\Psi(r,z)$ ищем в виде (2.2). Тогда, согласно (3.1), для функций $\Psi_i(r,z)$ $(i=1,2)$ получим следующие граничные условия

$$\Psi_1(r,0)=\left.\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\right|_{r=R}=0, \qquad R\Psi_2(R,z)=d, \qquad R\Psi_2(r,l)=d \tag{3.2}$$

и условия сопряжения (2.4).

Поступая таким же образом, как и в предыдущей задаче, для функций $\Psi_i(r, z)$ $(i=1, 2)$ окончательно получим

$$\Psi_1(r, z) = \frac{zd}{Rs} + \frac{2R}{s^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{\lambda_k r}\cdot\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2(\lambda_k R)}\sin\lambda_k z +$$

$$+\frac{2m}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\mu_k r}\cdot\frac{\operatorname{sh}\mu_k z}{\operatorname{sh}\mu_k s}\cdot\frac{J_1(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R)} \tag{3.3}$$

в области $(0 \leqslant z \leqslant s;\ 0 \leqslant r \leqslant R)$,

$$\Psi_2(r, z) = \frac{d}{R} - \frac{2m}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\mu_k r}\cdot\frac{\operatorname{sh}\mu_k(l-z)}{\operatorname{sh}\mu_k(l-s)}\cdot\frac{J_1(\mu_k r)}{J_2(\mu_k R)} \tag{3.4}$$

в области $(s \leqslant z \leqslant l;\ 0 \leqslant r \leqslant R)$,

где

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{s}, \qquad J_1(\mu_k R) = 0, \qquad m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3.5}$$

Неизвестные коэффициенты X_k и Y_k, входящие в выражения (3.3) и (3.4), определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k + Q_p, \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k, \end{aligned}\right\} \qquad (p = 1, 2, \ldots), \tag{3.6}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{pk} &= \frac{2\mu_p \operatorname{sh}\mu_p(l-s)\cdot\operatorname{sh}\mu_p s}{ms\cdot\operatorname{sh}\mu_p l}\cdot\frac{1}{\lambda_k^2+\mu_p^2}, \\ b_{pk} &= \frac{2m\lambda_p J_1(\lambda_p R)}{R I_2(\lambda_p R)}\cdot\frac{1}{\mu_k^2+\lambda_p^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$Q_p = -\frac{d\cdot\operatorname{sh}\mu_p(l-s)\cdot\operatorname{sh}\mu_p s}{m\mu_p R\operatorname{sh}\mu_p l}. \tag{3.8}$$

Используя суммы рядов (2.15) и неравенство

$$\frac{\operatorname{sh}\mu_p(l-s)\cdot\operatorname{sh}\mu_p s}{\operatorname{sh}\mu_p l} < \frac{1}{2}, \tag{3.9}$$

для сумм модулей коэффициентов при неизвестных X_k и Y_k получим оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3.10}$$

Свободные члены систем (3.6), как видно из (3.8), ограничены сверху и стремятся к нулю.

Полученные решения (3.3), (3.4) могут считаться также решениями задачи кручения цилиндра радиусом R, длиной $2l$, когда цилиндр скручивается с помощью штампов в виде чашек, закрепленных на концах цилиндра.

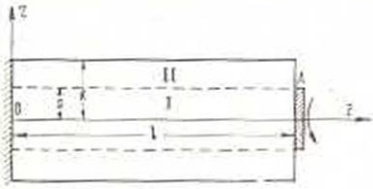
Такой же вид имеет решение задачи кручения круглого цилиндра, зажатого жесткой обоймой шириной $2(l-s)$ в середине цилиндрической поверхности и скручиваемого жесткими диафрагмами, спрессованными на торцах.

§ 4. Кручение цилиндра, закрепленного одним торцом, когда на некотором участке другого торца заданы перемещения

Рассмотрим кручение цилиндра радиуса R и длиной l, когда цилиндр скручивается жестким штампом радиуса $s\,(s<R)$, закрепленным на середине одного торца цилиндра, при закрепленном втором торце (фиг. 3). Остальные части поверхности цилиндра для простоты считаем свободными от внешних нагрузок. Граничные условия для этой задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} &v(R, z)=0, \qquad v(r, 0)=0, \\ &\tau_z(r, l)=0 \text{ в обл. } (s<r<R), \qquad (4.1) \\ &v(r, l)=dr \text{ в обл. } (0\leqslant r\leqslant s), \end{aligned}$$

где d — угол поворота штампа.



Фиг. 3.

Разбиваем область осевого сечения цилиндра на две части (I и II) и полагаем, что функция перемещения $\Psi(r, z)$ в этих частях принимает, соответственно, значения $\Psi_1(r, z)$ и $\Psi_2(r, z)$.

Вспомогательные функции $\Psi_i(r, z)$ $(i=1, 2)$, согласно (2.2) и (4.1), должны удовлетворять уравнению (1.1), граничным условиям

$$\begin{aligned} &\Psi_1(r, 0)=\Psi_2(r, 0)=0, \qquad \left.\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}\right|_{r=R}=0, \\ &\left.\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right|_{z=l}=0, \qquad \Psi_1(r, l)=d \end{aligned} \qquad (4.2)$$

и условиям сопряжения

$$\Psi_1(s, z)=\Psi_2(s, z), \qquad \left.\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\right|_{r=s}=\left.\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}\right|_{r=s}. \qquad (4.3)$$

Функции $\Psi_i(r, z)$ ищем в виде рядов

$$\Psi_1(r, z)=a_0+a_1z+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{J_1(\lambda_kr)}{r}\sin\lambda_kz+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\operatorname{sh}\mu_kz+B_k\operatorname{ch}\mu_kz]\frac{J_1(\mu_kr)}{r} \qquad (4.4)$$

в области $(0<r<s;\ 0<z<l)$,

$$\Psi_2(r, z) = b_0 + b_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k^{(1)} \frac{I_1(\lambda_k r)}{r} + D_k^{(1)} \frac{K_1(\lambda_k r)}{r} \right] \sin \lambda_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{sh} \delta_k z + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \delta_k z] \frac{W_1(\delta_k r)}{r} \tag{4.5}$$

в области $(s \leqslant r \leqslant R;\ 0 \leqslant z \leqslant l)$,

где

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \tag{4.6}$$

числа μ_k и δ_k являются, соответственно, корнями уравнений

$$J_2(xs) = 0, \quad W_2(xs) = 0, \tag{4.7}$$

а функции $W_n(\delta_k r)$ имеют вид

$$W_n(\delta_k r) = \frac{J_n(\delta_k r)}{J_2(\delta_k R)} - \frac{Y_n(\delta_k r)}{Y_2(\delta_k R)}. \tag{4.8}$$

Для функций $J_n(x)$ и $W_n(x)$ в силу (4.7) справедливы следующие формулы

$$\int_0^s r J_1(\mu_k r) J_1(\mu_p r)\, dr = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_0^s r J_2(\mu_k r) J_2(\mu_p r)\, dr =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq k, \\ \dfrac{1}{2} [s J_1(\mu_k s)]^2 & \text{при} \quad p = k, \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\int_s^R r W_1(\delta_k r)\, W_1(\delta_p r)\, dr = \frac{\delta_k}{\delta_p} \int_s^R r W_2(\delta_k r)\, W_2(\delta_p r)\, dr =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq k, \\ \dfrac{1}{2} \{[R W_1(\delta_k R)]^2 - [s W_1(\delta_k s)]^2\} & \text{при} \quad p = k, \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\int_0^s r^2 J_1(\mu_k r)\, dr = \int_s^R r^2 W_1(\delta_k r)\, dr = 0. \tag{4.11}$$

Удовлетворив граничным условиям (4.2) и условиям сопряжения (4.3), для постоянных интегрирования, входящих в выражения (4.4) и (4.5), получим следующие значения

$$a_0 = b_0 = b_1 = 0, \quad A_k^{(1)} = B_k = B_k^{(1)} = 0,$$

$$A_k = \frac{mlX_k}{\mu_k J_1(\mu_k s)\operatorname{ch}\mu_k l}, \qquad C_k = \frac{(-1)^k s Y_k}{\lambda_k I_2(\lambda_k s)},$$

$$C_k^{(1)} = \frac{(-1)^{k+1} s Y_k}{\lambda_k} \cdot \frac{K_2(\lambda_k R)}{I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k s) - I_2(\lambda_k s) K_2(\lambda_k R)}, \tag{4.12}$$

$$D_k^{(1)} = \frac{(-1)^{k+1} s Y_k}{\lambda_k} \cdot \frac{I_2(\lambda_k R)}{I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k s) - I_2(\lambda_k s) K_2(\lambda_k R)}.$$

Неизвестные коэффициенты X_k и Y_k определяются из бесконечных систем линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k + Q_p \end{aligned}\right| \qquad (p = 1, 2, \ldots), \tag{4.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{pk} &= \frac{2\mu_p \operatorname{cth}\mu_p l}{ml} \cdot \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2}, \\ b_{pk} &= \frac{2m\lambda_p \chi_p}{s} \cdot \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2}. \end{aligned}\right| \tag{4.14}$$

$$Q_p = \frac{2\sigma_1}{\lambda_p l} \chi_p, \tag{4.15}$$

$$\chi_p = \frac{I_2(\lambda_p s)}{I_2(\lambda_p R)} \cdot \frac{I_2(\lambda_p R) K_2(\lambda_p s) - I_2(\lambda_p s) K_2(\lambda_p R)}{I_1(\lambda_p s) K_2(\lambda_p s) + I_2(\lambda_p s) K_1(\lambda_p s)}. \tag{4.16}$$

При больших λ_p пользуясь асимптотическими разложениями для функций I_n и K_n, легко показать, что

$$\chi_p \leq \frac{1}{2}. \tag{4.17}$$

Для сумм модулей коэффициентов систем (4.13) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| &= \frac{2\mu_p \operatorname{cth}\mu_p l}{ml} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} = \frac{1}{m}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| &= \frac{2m\lambda_p \chi_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} = m\chi_p \frac{I_3(\lambda_p s)}{I_2(\lambda_p s)} < \frac{m}{2}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{2} \quad \text{т. е.} \quad m = \sqrt{2}. \tag{4.19}$$

Тогда из (4.18) и (4.19) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. системы (4.13) оказались вполне регулярными. Из (4.15) и (4.16) видно, что свободные члены систем (4.13) ограничены сверху и стремятся к нулю.

Коэффициент a_1 определяется из уравнения

$$a_1 l = d + \frac{4}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k^2}. \tag{4.20}$$

Неизвестные коэффициенты Y_k, входящие в соотношение (4.20), определяются из вполне регулярных систем линейных уравнений (4.13) и выражаются через постоянную a_1.

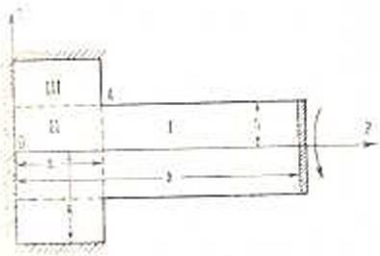
Подставив найденные из (4.13) значения неизвестных Y_k в (4.20) найдем значение a_1.

Отметим, что решение этой задачи является также и решением задачи кручения цилиндра радиуса R и длиной $2l$, когда цилиндр скручивается двумя круглыми штампами радиуса $s < R$, симметрично закрепленными на участках торцов цилиндра.

Такой же вид будет иметь решение задачи кручения цилиндра радиуса R и длиной $2l$ с кольцевой щелью посередине глубиной $(R - s)$, когда скручивание осуществляется с помощью двух круглых штампов, прикрепленных к обоим торцам.

§ 5. Кручение ступенчатого вала, когда на участках поверхности заданы перемещения

Рассмотрим теперь кручение круглого ступенчатого вала [7], когда вал скручивается диафрагмой, закрепленной на конце тонкой части вала, а другой конец вала закреплен с помощью чашкообразного штампа, надетого на вал (фиг. 4). Для простоты считаем, что остальные части поверхности вала свободны от внешних усилий.



Фиг. 4.

Граничные условия для этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} &v(r, b) = dr, \quad v(r, 0) = v(R, z) = 0, \\ &\tau_z(r, a) = 0 \quad \text{в обл.} \quad (s < r < R), \\ &\tau_r(s, z) = 0 \quad \text{в обл.} \quad (a \leqslant z \leqslant b). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Разбиваем область осевого сечения вала на три части (I, II, III) и полагаем, что функция перемещения $\Psi(r, z)$ в этих частях принимает, соответственно, значения $\Psi_1(r, z)$, $\Psi_2(r, z)$ и $\Psi_3(r, z)$. Эти последние функции должны удовлетворять уравнению (1.1), граничным условиям (5.1), которые примут вид

$$\Psi_1(r, b) = d, \quad \Psi_2(r, 0) = \Psi_3(r, 0) = \Psi_3(R, z) = 0,$$
$$\left.\frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right|_{z=a} = \left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}\right|_{r=s} = 0 \tag{5.2}$$

и условиям сопряжения

$$\Psi_1(r, a) = \Psi_2(r, a), \qquad \Psi_2(s, z) = \Psi_3(s, z),$$
$$\left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right|_{z=a} = \left.\frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right|_{z=a}, \qquad \left.\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}\right|_{r=s} = \left.\frac{\partial \Psi_3}{\partial r}\right|_{r=s}. \tag{5.3}$$

Функции $\Psi_i(r, z)$ $(i = 1, 2, 3)$ ищем в виде рядов Фурье-Дини [8, 9]

$$\Psi_1(r, z) = a_0 + a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} \frac{I_1(\lambda_k r)}{r} \cos \lambda_k (z - a) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{sh} \mu_k (z - a) + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \mu_k (z - a)] \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \tag{5.4}$$

в области $(0 \leqslant r \leqslant s; \quad a \leqslant r \leqslant b)$,

$$\Psi_2(r, z) = b_0 + b_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)} \frac{I_1(\lambda_k r)}{r} \sin \lambda_k z +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_k z + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_k z) \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \tag{5.5}$$

в области $(0 \leqslant r \leqslant s; \quad 0 \leqslant z \leqslant a)$,

$$\Psi_3(r, z) = c_0 + c_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k^{(3)} \frac{I_1(\lambda_k r)}{r} + D_k^{(3)} \frac{K_1(\lambda_k r)}{r} \right] \sin \lambda_k z +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(3)} \operatorname{sh} \delta_k z + B_k^{(3)} \operatorname{ch} \delta_k z) \frac{W_1(\delta_k r)}{r} \tag{5.6}$$

в области $(s \leqslant r \leqslant R; \quad 0 \leqslant z \leqslant a)$,

где

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2(b-a)}, \qquad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2a}, \tag{5.7}$$

а числа μ_k и δ_k являются, соответственно, корнями уравнений (4.7). Функции $W_n(\delta_k r)$ совпадают с (4.8).

Удовлетворив граничным условиям (5.2) и условиям сопряжения (5.3), для постоянных интегрирования, входящих в (5.4)—(5.6), получим следующие выражения

$$c_0 = b_0 = c_1 = 0, \quad a_0 + a_1 b = d, \quad a_1 = b_1,$$

$$B_k^{(2)} = B_k^{(3)} = C_k^{(1)} = A_k^{(3)} = 0,$$

$$A_k^{(1)} = -\frac{aY_k}{\mu_k J_1(\mu_k s)}, \qquad B_k^{(1)} = -\frac{aY_k}{\mu_k J_1(\mu_k s)} \operatorname{th} \mu_k (b-a),$$

$$A_k^{(2)} = -\frac{aY_k}{\mu_k J_1(\mu_k s) \operatorname{ch} \mu_k a}, \qquad C_k^{(2)} = \frac{(-1)^{k+1} msX_k}{\iota_k I_2(\iota_k s)}, \tag{5.8}$$

$$C_k^{(3)} = \frac{(-1)^{k+1} msX_k}{\iota_k} \cdot \frac{K_1(\iota_k R)}{I_1(\iota_k R) K_2(\iota_k s) + I_2(\iota_k s) K_1(\iota_k R)},$$

$$D_k^{(3)} = -\frac{(-1)^{k+1} msX_k}{\iota_k} \cdot \frac{I_1(\iota_k R)}{I_1(\iota_k R) K_2(\iota_k s) + I_2(\iota_k s) K_1(\iota_k R)}.$$

Неизвестные коэффициенты X_k и Y_k определяются из бесконечных систем линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Y_k + Q_p, \\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} X_k, \end{aligned}\right| \qquad p = 1, 2, \ldots, \tag{5.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{pk} &= \frac{2\iota_p \chi_p}{ms} \cdot \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_p^2}, \\ b_{pk} &= \frac{2m\mu_p \operatorname{ch} \mu_p a \cdot \operatorname{ch} \mu_p (b-a)}{a \operatorname{sh} \mu_p b} \cdot \frac{1}{\iota_k^2 + \mu_p^2}, \end{aligned}\right| \tag{5.10}$$

$$Q_p = -\frac{2b_1 \chi_p}{m\iota_p a}, \tag{5.11}$$

$$\chi_p = \frac{I_2(\iota_p s)}{I_1(\iota_p R)} \cdot \frac{I_1(\iota_p R) K_2(\iota_p s) - I_2(\iota_p s) K_1(\iota_p R)}{I_1(\iota_p s) K_2(\iota_p s) + I_2(\iota_p s) K_1(\iota_p s)}. \tag{5.12}$$

Пользуясь асимптотическими разложениями и рекуррентными формулами для функций $I_n(x)$ и $K_n(x)$, легко показать справедливость неравенства

$$\chi_p \leq \frac{1 - e^{-2\iota_p (R-s)}}{2}. \tag{5.13}$$

Для сумм модулей коэффициентов при неизвестных X_k и Y_k систем (5.9), в силу (2.16) и (5.13), имеем следующие оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = \frac{2\iota_p \chi_p}{ms} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \mu_k^2} = \frac{I_3(\iota_p s)}{m I_2(\iota_p s)} \chi_p \leq$$

$$\leq \frac{1 - e^{-2\iota_p (R-s)}}{2m}. \tag{5.14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{2m\mu_p \operatorname{ch}\mu_p a \cdot \operatorname{ch}\mu_p (b-a)}{a \operatorname{sh}\mu_p b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} =$$

$$= m \frac{\operatorname{sh}\mu_p a \cdot \operatorname{ch}\mu_p (b-a)}{\operatorname{sh}\mu_p b} < m \frac{1 + e^{-2\mu_p (b-a)}}{2}. \tag{5.15}$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$\frac{1 + e^{-2\lambda_1 (R-s)}}{2m} = m \frac{1 + e^{-2\mu_1 (b-a)}}{2}$$

т. е.

$$m = \sqrt{\frac{1 + e^{-2\lambda_1 (R-s)}}{1 + e^{-2\mu_1 (b-a)}}}. \tag{5.16}$$

Из (5.14)—(5.16) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| < \theta, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| < \theta, \tag{5.17}$$

где

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{[1 + e^{-2\lambda_1 (R-s)}]\,[1 + e^{-2\mu_1 (b-a)}]} < 1 \tag{5.17'}$$

т. е. системы (5.9) всегда вполне регулярны. Из (5.11) и (5.12) следует, что свободные члены систем (5.9) ограничены сверху и стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{p}\right)$.

Для определения b_1 получим следующее уравнение

$$d - b_1 b = \frac{4m}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\lambda_k^2}. \tag{5.18}$$

Коэффициент b_1 определяется из уравнения (5.18) таким же образом, как коэффициент a_1 из уравнения (4.20).

Если в рассмотренных задачах вместо угла поворота штампа или обоймы нам известен крутящий момент M, действующий на них, то, вычислив момент сил, приложенных к штампу или обойме, получим формулу, позволяющую выразить неизвестное значение угла поворота через заданное значение момента.

Эта формула в задаче § 2 имеет вид

$$\frac{Ms}{4\pi G R^2 m} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{th}\mu_k (l-s)}{\mu_k}, \tag{5.19}$$

в задаче § 3—

$$\frac{Ms}{4\pi G R^2 m} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{cth}\mu_k (l-s)}{\mu_k}, \tag{5.20}$$

в задаче § 4 —

$$\frac{2lM}{\pi G s^4} = d - \frac{4}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{\lambda_k^2}, \tag{5.21}$$

в задаче § 5 —

$$\frac{2bM}{\pi G s^4} = d - \frac{4m}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\lambda_k^2}. \tag{5.22}$$

В рассмотренных задачах свободные члены вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений имеют порядок $O\left(\frac{1}{p}\right)$. Можно доказать, что неизвестные коэффициенты X_p и Y_p этих систем имеют порядок $O\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)$, где $\alpha = 1 - \varepsilon$, а ε — сколь угодно малая положительная величина, не равная нулю.

Перемещение v и напряжения τ_r, τ_z выражаются рядами, члены которых стремятся к нулю, соответственно, как $O\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)$ и $O\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)$. Так как эти члены знакопеременные во всех точках осевого сечения вала, кроме точки пересечения поверхности и линии сопряжения A, то ряды, входящие в выражение для перемещения v, сходятся везде, а ряды, входящие в выражения для касательных напряжений τ_r и τ_z сходятся во всех точках области, кроме точки A, где эти ряды расходятся.

Отметим, что последние ряды в точках поверхности и линии сопряжений участков вала сходятся слабо. Но сходимость этих рядов в точках поверхности можно улучшить, используя соответствующие бесконечные системы.

Сходимость этих рядов в точках линий сопряжений участков вала улучшается, если в формулах (1.2) величины $\frac{\partial\Psi}{\partial r}$ и $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ заменить соответственно величинами $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)$.

Из сказанного следует, что численные значения перемещения можно вычислить во всех точках области осевого сечения вала, а значения касательных напряжений — везде, кроме малой окрестности точки A.

Подобным же методом можно решить задачи кручения полых круглых валов из изотропного или трансверсально—изотропного материала со смешанными граничными условиями, а также задачи кручения валов, когда материалы областей I, II и III отличаются друг от друга.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 IV 1961

Ս. Հ. Բաբլոյան, Վ. Ս. Տոնոյան

ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԼԻՍԵՌՆԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում են խառը եզրային պայմաններով փոփոխական կտրվածքով լիսեռների ոլորման մի քանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումները: Ենթադրվում է, որ լիսեռները ոլորվում են իրենց մակերևույթների մի մասին ամրացված շտամպի ազդեցության տակ: Պարզության համար ենթադրվում է, որ լիսեռների մակերևույթների մնացած մասերի վրա արտաքին ոլորող ուժերը բացակայում են: Խնդիրների լուծումները ներկայացվում են շարքերով ըստ Բեսսելի և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների: Ինտեգրման հաստատունները որոշվում են գծային անվերջ հավասարումների սիստեմներից: Յուրաքանչյուր դեպքում ցույց է տրվում, որ այդ սիստեմները լիովին ռեգուլյար են և ունեն սահմանափակ ու զերոյի ձգտող ազատ անդամներ:

Նման խնդիրներ դիտարկվել են Յ. Ս. Ուֆլյանդի [1], Դ. Վ. Գրիլից-կու [2], Զ. Դասի [3, 4], Ն. Ս. Ռոստովցևի [5] և ուրիշների աշխատություններում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Уфлянд Я. С.* Кручение упругого слоя. ДАН СССР, **129**, № 5, 1959, 997—999.
2. *Грилицкий Д. В.* Кручения двошарового пружного середовища. Прикладна механіка, **7**, в. 1, 1961, 89—95.
3. *Das S. Ch.* On the stresses in composite truncated cone due to shearing stresses on the curved surface. Indian Journ. Theoret. Phys. **4**, 1956, № 4, 89—92.
4. *Das S. Ch.* On the stresses in twisted composite spheroids. Canadian Journal of Physics, vol. **35**, № 7, 1957, 811—817.
5. *Ростовцев Н. А.* К задаче о кручении упругого полупространства. ПММ, **19**, № 1, 1955.
6. *Соляник-Красса К. В.* Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. *Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М.* О кручении валов переменного сечения. ПММ, **15**, вып. 4, 1951, 451—472.
8. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Госиноиздат, М., 1949.
9. *Грей Э.* и *Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиноиздат, М., 1949.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1949.