

А. А. Китбалян

Разложение по биортогональным системам, образованным функциями Вольтерра

В работе М. М. Джрбашяна [1] построена теория прямых и обратных интегральных преобразований в классе L_2 с ядрами Фурье e^{itx} и Вольтерра

$$\nu(z; \mu) = \int_0^{\infty} \frac{z^{u+t}}{\Gamma(1+\mu+t)} dt. \quad (A)$$

Отметим, что функция $\nu(z; \mu)$ является аналитической на бесконечнолистной римановой поверхности G_{∞} : $-\infty < \arg z < +\infty$, $0 < |z| < +\infty$, при фиксированном значении параметра μ .

В настоящей работе приводятся результаты, являющиеся фактически дискретным аналогом результатов работы [1].

В § 1 общий метод построения биортогональных систем целых функций на конечном отрезке, изложенный в работе [2], распространяется на функции типа Вольтерра.

С этой целью исследуется существование и асимптотика A_0 — точек некоторой функции $w(\lambda)$, образованной из функций типа Вольтерра.

В § 2 доказывается теорема о разложении класса функций ограниченной вариации по системам из функций Вольтерра.

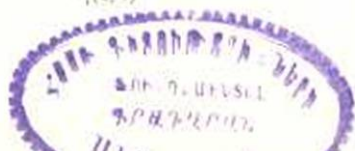
Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему руководителю профессору М. М. Джрбашяну, предложившему настоящую задачу, и А. Б. Нерсисяну, сделавшему ряд ценных замечаний.

§ 1. Биортогональные системы функций типа Вольтерра

1. Известно (см. [1]), что для функции Вольтерра $\nu(z; \mu)$ имеет место следующее интегральное представление

$$\nu(z; \mu) = - \int_0^z \frac{z^{u-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \frac{z^{u-z}}{2\pi i} \int_{\gamma(z; \mu)} \frac{e^u u^{z-\mu-1}}{\log u - \log z} du, \quad (1.1)$$

при $z \in D_+(z)$



$$v(z; \mu) = e^z - \int_0^z \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \frac{z^{\mu-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha; z)} \frac{e^u u^{\mu-1}}{\log u - \log z} du, \quad (1.1')$$

где $-\infty < \alpha < \infty$, $z > 0$; $D_1(z)$ — область $|\arg z| < \alpha$, $|z| > z$, лежащая на нулевом листе поверхности G ; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, наконец, $\gamma(\alpha; z)$ — контур этой области.

Заметив теперь, что при любом $p > 1$ имеет место формула

$$\frac{1}{\log \frac{z}{u}} = -\frac{1}{\log z} \left[1 + \frac{\log u}{\log z} + \frac{\log^2 u}{\log^2 z} + \dots + \frac{\log^p u}{\log^p z} \right] + O\left(\frac{\log^{p+1} u}{\log^{p+1} z}\right),$$

из (1.1) и (1.1') приходим к следующей лемме*.

Лемма 1. Для любого числа β из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ справедливы следующие асимптотические формулы

а) при $|\arg z| < \beta$, $|z| \rightarrow \infty$,

$$v(z; \mu) = e^z + \sum_{k=1}^p \frac{A_k(\mu) z^k}{\log^k z} + O\left(\frac{z^k}{\log^{p+1} z}\right), \quad (1.2)$$

б) при $\beta < |\arg z| < +\infty$, $|z| \rightarrow \infty$,

$$v(z; \mu) = \sum_{k=1}^p \frac{A_k(\mu) z^k}{\log^k z} + O\left(\frac{z^k}{\log^{p+1} z}\right). \quad (1.3)$$

В этих формулах $p > 1$ — произвольное целое число, порядок дополнительных членов равномерен относительно соответствующих углов, а числа $A_k(\mu)$ ($k=1, 2, \dots$) имеют следующие значения

$$A_k(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha; z)} e^u u^{-\mu} \log^k u du = (-1)^k \frac{d^k}{d\mu^k} \left[\frac{1}{\Gamma(\mu)} \right]. \quad (1.4)$$

Приступим теперь к построению биортогональной системы из функций Вольерра.

Пусть a_j, b_j ($j=1, 2$) — произвольные вещественные параметры, удовлетворяющие условию

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1. \quad (1.5)$$

Введем в рассмотрение функции

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-1/2} J_{\nu_j}(\bar{x}\lambda; \mu_j), \quad (1.6)$$

* По этому поводу смотри также лемму 3 работы [1].

$$z(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\tau_j} v((l-x)\lambda; \tau_j) \quad (0 \leq l < \infty), \quad (1.7)$$

где параметры μ_j и τ_j подчинены пока условиям

$$\mu_j > -1, \quad \tau_j > -1, \quad (j=1, 2). \quad (1.8)$$

Заметим, что эти ограничения необходимы вследствие того, что интеграл

$$\int_0^l v(x; a) dx$$

сходится абсолютно при $a > -1$.

В самом деле, представим функцию $v(x; a)$ в виде

$$v(x; a) = \int_0^a \frac{x^{t+a}}{\Gamma(t+a+1)} dt + \int_a^\infty \frac{x^{t+a}}{\Gamma(t+a+1)} dt = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad (a > 0)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\int_0^l |\varphi_2(x)| dx < \text{const},$$

в то время как $\varphi_1(x) = O(x^2)$ и $\int_0^l \varphi_1(x) dx$ абсолютно сходится при $a > -1$.

В дальнейшем на параметры μ_j, τ_j будут наложены более жесткие ограничения.

Составим функцию

$$w(\lambda) = \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{-(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} v(l\lambda; \mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1). \quad (1.9)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Если параметры μ и τ удовлетворяют условию (1.8), то при любых λ и λ_1 ($\lambda \neq \lambda_1$) справедливы формулы

$$\begin{aligned} & \int_0^l \lambda^{-\mu} v(\lambda x; \mu) \lambda_1^{-\tau} v((l-x)\lambda_1; \tau) dx = \\ & = \frac{\lambda^{-(\mu+\tau+1)} v(l\lambda; \mu + \tau + 1) - \lambda_1^{-(\mu+\tau+1)} v(l\lambda_1; \mu + \tau + 1)}{\log \lambda - \log \lambda_1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

и

$$\int_0^l y(x, \lambda) z(x, \lambda_1) dx = \frac{w(\lambda) - w(\lambda_1)}{\log \lambda - \log \lambda_1}. \quad (1.11)$$

Доказательство. Формула (1.11) непосредственно будет следовать из формулы (1.10) ввиду обозначений, введенных в формулах (1.6), (1.7) и (1.9). Докажем поэтому формулу (1.10).

Учитывая представление (4) функции $v(x; \rho)$, для любых λ и λ_1 ($\lambda \neq \lambda_1$) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \lambda^{-\rho} v(x; \rho) \lambda_1^{-\tau} v((1-x)\lambda_1; \tau) dx = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^u \lambda_1^v du dv}{\Gamma(1+\rho+u) \Gamma(1+\tau+v)} \int_0^1 x^{u+\rho} (1-x)^{v+\tau} dx = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^u \lambda_1^v du dv}{\Gamma(1+\rho+u) \Gamma(1+\tau+v)} t^{u+\rho+u+v+1} \int_0^1 t^{u+\rho} (1-t)^{v+\tau} dt. \end{aligned}$$

Выполнив ряд несложных преобразований, приходим к формуле (1.10).

Заметим, что перемена порядка интегрирования повсюду возможна в силу (1.8).

Таким образом, лемма 2 доказана.

Для произвольного комплексного числа A_0 рассмотрим теперь систему нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$. Ниже будет доказано, что эта функция имеет счетное множество нулей, а также будут изучены их асимптотика и особенности их расположения на бесконечнолистной римановой поверхности G_∞ . Но до этого, предполагая существование счетной системы нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ функции $\omega(\lambda) - A_0$, пронумерованных в порядке неубывания их модулей, приступим к построению биортогональной системы из функций $y(x, \lambda)$ и $z(x, \lambda)$.

Итак, пусть $\{\lambda_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) — последовательность всех нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$, пронумерованных как указано выше, причем каждый нуль считается лишь один раз, независимо от его кратности.

Сопоставим нулю λ_n кратности $p_n \geq 1$ две системы функций

$$\left. \frac{\partial^j y(x, \lambda)}{\partial (\log \lambda)^j} \right|_{\lambda=\lambda_n} \quad (j=0, 1, \dots, p_n-1) \quad (1.12)$$

и

$$\sum_{k=0}^{p_n-j-1} \frac{b_n^{(k)}}{k! j!} \left. \frac{\partial^k z(x, \lambda)}{\partial (\log \lambda)^k} \right|_{\lambda=\lambda_n} \quad (j=0, 1, \dots, p_n-1), \quad (1.13)$$

где

$$b_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial (\log \lambda)^k} \left\{ \frac{(\log \lambda - \log \lambda_n)^{p_n}}{\omega(\lambda) - A_0} \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \quad (k=0, 1, \dots, p_n-1). \quad (1.14)$$

Пронумеруем образовавшиеся системы функций в порядке неубывания модулей чисел λ_n ($n=1, 2, \dots$) так, чтобы j -тые функции, соответствующие некоторому нулю λ_n в каждой из групп функций (1.12)

и (1.13) получили бы одинаковые номера. В итоге получим две счетные системы функций

$$\{Y_k(x)\} \text{ и } \{Z_k(x)\} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.15)$$

После замены переменной $\lambda = e^w$ мы будем находиться в условиях теоремы 1 работы [2]. Отсюда непосредственно следует, что системы функций (1.15) биортогональны на отрезке $[0, l]$ в смысле

$$\int_0^l Y_p(x) Z_q(x) dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases} \quad (p, q = 1, 2, \dots). \quad (1.16)$$

2°. Изучим свойства нулей функции $\omega(\lambda) = A_0$. Для этого приведем асимптотику функций $y(x, \lambda)$, $z(x, \lambda)$ и $\omega(\lambda)$, которая неоднократно будет использоваться нами и при дальнейшем изложении.

Используя уточненную асимптотику функции Вольтерры (1.2) и (1.3), а также определение функций $y(x, \lambda)$, $z(x, \lambda)$ и $\omega(\lambda)$ [формулы (1.6), (1.7) и (1.9)], получаем следующую лемму.

Лемма 3.

а) При $|\arg \lambda| < \beta$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $0 < z < l$, равномерно относительно $x \in [z, l]$ имеем

$$y(x, \lambda) = \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-\mu_j} \right\} e^{x\lambda} + O\left(\frac{1}{\log \lambda}\right), \quad (1.17)$$

равномерно относительно $x \in [0, l-z]$ имеем

$$z(x, \lambda) = \left\{ \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\tau_j} \right\} e^{(l-x)\lambda} + O\left(\frac{1}{\log \lambda}\right), \quad (1.18)$$

наконец,

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \lambda^{-1} \left(\sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-\mu_j} \right) \left(\sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\tau_j} \right) e^{l\lambda} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^*}{\log^k l_k} + O\left(\frac{1}{\log^{p+1} l_k}\right) = \\ &= \left\{ \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{-(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \right\} e^{l\lambda} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^*}{\log^k l_k} + O\left(\frac{1}{\log^{p+1} l_k}\right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$A_k^* = \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} l^{(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} (-1)^k \frac{d^k}{d(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)^k} \left(\frac{1}{\Gamma(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \right). \quad (1.20)$$

б) При $\beta < |\arg \lambda| < +\infty$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $0 < z < l$, равномерно относительно $x \in [z, l]$ имеем

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 \frac{a_j x^{\mu_j} A_1(\mu_j)}{\log x \lambda} + O\left(\frac{1}{\log^2 \lambda}\right), \quad (1.21)$$

равномерно относительно $x \in [0, l-z]$ имеем

$$z(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 \frac{b_j (l-x)^{\tau_j} A_j(\tau_j)}{\log(l-x)\lambda} + O\left(\frac{1}{\log^2 \lambda}\right), \quad (1.22)$$

наконец,

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} l^{\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k(\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)}{\log^k l \lambda} \right\} + \\ &+ O\left(\frac{1}{\log^{n+1} l \lambda}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k^*}{\log^k l \lambda} + O\left(\frac{1}{\log^{n+1} l \lambda}\right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Докажем, наконец, лемму о свойствах нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$.

Лемма 4. Пусть функция $\omega(\lambda)$ определена по (1.9). Тогда $\omega(\lambda) - A_0$ имеет счетное множество нулей; все они, начиная с некоторого, довольно большого по модулю, — простые; лежат внутри угловых областей

$$\begin{aligned} D_1(\delta): \quad \frac{\pi}{2} < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \delta \quad \text{и} \quad D_2(\delta): \quad -\frac{\pi}{2} - \delta < \arg \lambda < -\frac{\pi}{2}, \quad (1.24) \\ \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

асимптотика этих нулей, пронумерованных в порядке неубывания их модулей, имеет вид

$$i_k^{(\pm)} = -\frac{2\pi k}{l} i \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right], \quad (1.25)$$

где обозначение $i_k^{(\pm)}$ означает нуль, лежащий соответственно в верхней или нижней полуплоскости.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

Первый случай: $A_0 \neq 0$.

Введем обозначение

$$\gamma = \min_{j_1, j_2=1,2} (\mu_{j_1} + \tau_{j_2} + 1). \quad (1.26)$$

Наложим на параметры μ_j и τ_j помимо (1.8) новое ограничение

$$-1 < \mu_j, \tau_j < -\frac{1}{2} \quad (j=1, 2). \quad (1.27)$$

В дальнейшем мы убедимся в естественности ограничения (1.27). Отсюда следует, что

$$-1 < \gamma < 0. \quad (1.27')$$

Относительно параметров же a_j и b_j в течение всей работы будем предполагать, что они удовлетворяют следующему условию: произведение $a_{j_1} b_{j_2}$ не равно нулю для тех значений индексов j_1 и j_2 , при которых достигается минимум в выражении (1.26) (обозначим их j_1^0 и j_2^0 или просто j_0).

Итак,

$$M = a_{j_1} b_{j_2} \neq 0.$$

После всего вышесказанного, асимптотическую формулу (1.19) можем переписать в виде

$$\omega(\lambda) = M\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi(\lambda)] e^{L\lambda} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k^*}{\log^k \lambda} + O\left(\frac{1}{\log^{p-1} \lambda}\right) \quad (p \geq 1), \quad (1.19')$$

где

$$\varphi(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}), \quad (1.28)$$

$\alpha > 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Из асимптотической формулы (1.19') следует, что все достаточно большие по модулю нули функции $\omega(\lambda) - A_0^*$ могут лежать лишь в областях (1.24).

Перейдем к доказательству формулы (1.25). Введем вспомогательную функцию

$$\omega_0(\lambda) = \lambda^{-\gamma} [1 + \varphi(\lambda)] e^{L\lambda} - A_0^*, \quad (1.29)$$

где

$$A_0^* = \frac{A_0}{M}. \quad (1.30)$$

Из формулы (1.19') следует, что

$$\omega(\lambda) - A_0^* = M \left[\omega_0(\lambda) + O\left(\frac{1}{\log \lambda}\right) \right]. \quad (1.31)$$

Все достаточно большие по модулю корни функции $\omega_0(\lambda)$ должны лежать на бесконечной кривой L_0

$$|\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi(\lambda) e^{L\lambda}]| = |A_0^*|. \quad (1.32)$$

Если положить $\lambda = re^{i\varphi}$, то уравнение кривой L_0 запишется так

$$Lr \cos \varphi = \gamma \log r - \log |1 + \varphi(re^{i\varphi})| + \log |A_0^*|. \quad (1.32')$$

Предположим, что $\lambda_k^* = k$ -тая точка на L_0 , где $\omega_0(\lambda)$ обращается в нуль. Тогда если $\lambda_k^* = r_k^* e^{i\varphi_k^*}$, то

$$-\gamma \log r_k^* + \log |1 + \varphi(\lambda_k^*)| + Lr_k^* - \log A_0^* = 2k\pi i, \quad (1.33)$$

откуда следует

$$-\gamma \log r_k^* + \log |1 + \varphi(\lambda_k^*)| + Lr_k^* \cos \varphi_k^* - \log |A_0^*| = 0, \quad (1.34)$$

$$-\gamma \varphi_k^* + \arg |1 + \varphi(\lambda_k^*)| + Lr_k^* \sin \varphi_k^* - \arg A_0^* = 2k\pi, \quad (1.34')$$

Заметим, что при переходе точки λ по кривой L_0 от одного нуля λ_k^* функции $\omega_0(\lambda)$ к другому λ_{k+1}^* , величина $\arg \lambda^{-\gamma} e^{L\lambda}$ увеличивается на 2π и найдется промежуточная точка μ_k ($|\lambda_k^*| < |\mu_k| < |\lambda_{k+1}^*|$), где $\mu_k^{-\gamma} [1 + \varphi(\mu_k)] e^{L\mu_k} = -A_0^*$, то-есть

$$\omega_0(\mu_k) = -2A_0^* \quad (1.35)$$

Введем в рассмотрение кривые $L_0^{(\pm)}$

$$lr \cos \varphi = \gamma \log |1 + \varphi(re^{i\varphi})| + \log |A_0^*| \pm 1. \quad (1.36)$$

Рассмотрим дуги l_k и l_{k+1} окружностей $|\lambda| = |\mu_k|$ и $|\lambda| = |\mu_{k+1}|$, лежащие между кривыми $L_0^{(\pm)}$. Обозначим части кривых $L_0^{(\pm)}$, лежащие между дугами l_k и l_{k+1} , соответственно через s_k и s_{k+1} и составим замкнутый контур Δ_k

$$\Delta_k = l_k + s_k + l_{k+1} + s_{k+1}. \quad (1.37)$$

Оценим функцию $\omega_0(\lambda)$ на этом контуре. Обозначим начало и конец дуги l_k соответственно через $\mu_k' = |\mu_k| e^{i\varphi_k'}$ и $\mu_k'' = |\mu_k| e^{i\varphi_k''}$.

При $\lambda \in l_k$ имеем

$$\lambda = |\mu_k| e^{i\varphi}, \quad \text{где } \varphi_k' \leq \varphi \leq \varphi_k''.$$

Тогда

$$|\mu_k| \cos \varphi_k' = \frac{1}{l} (\gamma \log |\mu_k| - \log |1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k'})| + \log |A_0^*| + 1), \quad (1.38)$$

$$|\mu_k| \cos \varphi_k'' = \frac{1}{l} (\gamma \log |\mu_k| - \log |1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k''})| + \log |A_0^*| - 1).$$

Следовательно,

$$2|\mu_k| \sin \frac{\varphi_k' + \varphi_k''}{2} \sin \frac{\varphi_k'' - \varphi_k'}{2} = \frac{1}{l} \left[\log \left| \frac{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k''})}{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k'})} \right| + 2 \right]. \quad (1.39)$$

Учитывая тот факт, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k' = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k'' = \frac{\pi}{2}, \quad (1.40)$$

получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k| \sin \frac{\varphi_k'' - \varphi_k'}{2} = \frac{1}{l}. \quad (1.41)$$

С учетом формулы (1.35), при $\lambda = |\mu_k| e^{i\varphi} \in l_k$ имеем

$$\omega_0(\lambda) = -A_0^* \left[1 - \frac{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi})}{1 + \varphi(|\mu_k| e^{i\varphi_k'})} e^{l|\mu_k| (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k'})} e^{-l\gamma (\varphi - \varphi_k')} \right]. \quad (1.42)$$

Из формулы

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k'} &= -2 \sin \frac{\varphi + \varphi_k'}{2} \sin \frac{\varphi - \varphi_k'}{2} + \\ &+ 2i \cos \frac{\varphi + \varphi_k'}{2} \cos \frac{\varphi - \varphi_k'}{2} \end{aligned} \quad (1.43)$$

с учетом (1.41) будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |p_k| \operatorname{Re}(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0}) < \frac{2}{l}. \quad (1.44)$$

Отсюда имеем, что при $\lambda \in I_k$, $k > k_0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\omega_0(\lambda)| > |A_0^*| |1 + e^2| > |A_0^*|, \quad (1.45)$$

то-есть при $\lambda \in I_k$, $k > k_0$,

$$|\omega_0(\lambda)| > |A_0^*|. \quad (1.45')$$

На кривых же $L_0^{(1)}$

$$\begin{aligned} |\omega_0(\lambda)| &> \left| |p_k|^{-1} |1 + \varphi(|p_k| e^{i\varphi})| e^{\operatorname{Re} |p_k| e^{i\varphi}} - |A_0^*| \right| = \\ &= |A_0^*| |e^2 - 1|. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Из оценок (1.45') и (1.46) следует, что при $\lambda \in \Delta_k$, $k > k_1$,

$$|\omega_0(\lambda)| > C_1 |A_0^*| \quad (C_1 > 0)^*, \quad (1.47)$$

Но

$$(\omega(\lambda) - A_0) - M\omega_0(\lambda) = O\left(\frac{1}{\log l\lambda}\right), \quad (1.48)$$

поэтому из оценки (1.47) и из выражения (1.48) по теореме Руше следует, что функция $\omega(\lambda) - A_0$ имеет точно один нуль $\lambda_k^{(+)}$ внутри контура Δ_k , при этом

$$\lambda_k^{(+)} = \lambda_k^* + z_k, \quad \text{где } z_k = O(d_k) \quad (1.49)$$

(d_k — диаметр области, ограниченной контуром Δ_k).

Так как λ_k^* является нулем функции $\omega_0(\lambda)$, то из формул (1.34) и (1.34)' получим

$$\cos \varphi_k^* = \frac{\gamma \log r_k^* + \log |A_0^*| - \log |1 + \varphi(\lambda_k^*)|}{lr_k^*}, \quad (1.50)$$

значит,

$$\varphi_k^* = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma \log r_k^*}{lr_k^*} - \frac{\log |A_0^*|}{lr_k^*} + \frac{\log |1 + \varphi(\lambda_k^*)|}{lr_k^*} + O\left(\frac{\log^2 r_k^*}{r_k^3}\right), \quad (1.51)$$

Но из (1.34')

$$r_k^* = \frac{2\pi k + \arg A_0^* + \gamma \varphi_k^* - \arg |1 + \varphi(\lambda_k^*)|}{l \sin \varphi_k^*}. \quad (1.52)$$

С учетом формулы (1.51), из (1.52) следует

$$r_k^* = \frac{2\pi k}{l} - \frac{\pi \gamma}{2l} - \frac{\arg A_0^*}{l} + O\left(\frac{\log^2 r_k^*}{r_k^3}\right). \quad (1.53)$$

Отсюда вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

* В дальнейшем постоянные величины, не зависящие от параметров, будем обозначать через C_i ($i = 1, 2, \dots$).

$$r_k^* \sim \frac{2\pi k}{l}, \quad \log r_k^* \sim \log k$$

или

$$r_k^* = \frac{2\pi k}{l} \left[1 + O\left(\frac{\log^2 k}{k^2}\right) \right] \quad (1.54)$$

и

$$\tau_k^* = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\log k}{k}\right). \quad (1.55)$$

Это означает, что

$$i_k^* = \frac{2\pi k}{l} i \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right]. \quad (1.56)$$

Вычислим теперь порядок диаметра d_k . При больших k он совпадает с порядком периметра контура Δ_k . Из формулы (1.41) следует, что

$$|u_k| |e^{i\tau_k^*} - e^{i\tau_{k-1}^*}| \leq C, \quad (1.57)$$

откуда будем иметь

$$\begin{aligned} |i_{k-1}^* - i_k^*| &= \left| \frac{2\pi(k+1)}{l} \left[1 + O\left(\frac{\log(k+1)}{k+1}\right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi k}{l} \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right] \right| = O(\log k). \end{aligned}$$

Итак,

$$d_k = O(\log k), \quad (1.58)$$

поэтому окончательно получим

$$i_k^{(+)} = i_k^* + d_k = \frac{2\pi k}{l} i \left[1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \right], \quad (1.25')$$

а это означает утверждение (1.25) леммы.

Второй случай: $A_0 = 0$.

Этот случай отличается от предыдущего тем, что в качестве вспомогательной функции следует рассмотреть функцию

$$w_0^*(z) = z^{-1} [1 + \varphi(z)] e^{i\tau} + \frac{A_1^*}{M \log k}. \quad (1.29')$$

Однако, в этом случае, т. е. когда $A_0 = 0$, на параметры a_j, b_j ($j = 1, 2$) нам придется наложить ограничение

$$A_1^* = - \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} i^{\alpha_{j_1} + \tau_{j_2} - 1} \frac{d}{d(\alpha_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_{j_1} + \tau_{j_2} + 1)} \right) \neq 0.$$

Заметим, что при $A_0 = 0$ и $A_1^* = 0$ возникает исключительный случай, характерный тем, что к системе функций (1.15) становится возмож-

ным добавить еще одну пару функций, биортогональных с функциями системы. Этот случай мы рассматривать не будем.

Из формулы (1.29') следует, что

$$\omega(\lambda) - A_0 = \omega(\lambda) = M \left| \omega_0^*(\lambda) - O\left(\frac{1}{\log^2 l\lambda}\right) \right| \quad (1.31')$$

и, рассматривая кривую L_0^*

$$|\lambda^{-1} \log l\lambda e^{i\lambda} [1 + \varphi(\lambda)]| = \left| \frac{A_1^*}{M} \right|, \quad (1.32')$$

мы аналогичным образом приходим к формуле (1.25).

Лемма полностью доказана.

Докажем теперь, что утверждение леммы 4 о расположении нулей функции $\omega(\lambda) - A_0$ можно усилить.

С этой целью, наряду с кривыми (1.32) и (1.32'), введенными выше, рассмотрим также следующие семейства кривых:

при $A_0 \neq 0$

$$L(x) = |\lambda^{-1} [1 + \varphi(\lambda)] e^{i\lambda}| = e^x |A_0^*|, \quad (1.59)$$

при $A_0 = 0$

$$L^*(x) = |\lambda^{-1} \log l\lambda e^{i\lambda} [1 + \varphi(\lambda)]| = e^x \left| \frac{A_1^*}{M} \right|. \quad (1.59')$$

Параметр x изменяется в следующих пределах

$$|x| \leq \log 3 = \varkappa. \quad (1.60)$$

Очевидно, что

$$L(0) = L_0 \quad \text{и} \quad L^*(0) = L_0^*. \quad (1.61)$$

Если положить $\lambda = re^{i\theta}$, то уравнение кривой (1.59) можно записать в виде

$$-\gamma \log r + l r \cos \theta + \log |1 + \varphi(\lambda)| - \log |A_0^*| - x = 0. \quad (1.62)$$

Введем обозначение

$$\Phi(r, \theta) = -\gamma \log r + l r \cos \theta + \log |1 + \varphi(\lambda)| - \log |A_0^*| - x. \quad (1.63)$$

Из формулы (1.28) нетрудно вывести, что для функции $\Phi(r, \theta)$ налицо все условия известной теоремы о неявных функциях. Вследствие этого, из уравнения $\Phi(r, \theta) = 0$ при $r > r_1$, по вышеупомянутой теореме, θ определится как однозначная неявная функция, причем ее значения принадлежат отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta \right]$ для всех $|x| \leq \log 3 = \varkappa$.

Кроме того, эта функция

$$\theta = \theta(r, x) \quad (1.64)$$

является убывающей как функция от x и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r, x) = \frac{\pi}{2}. \quad (1.65)$$

Теперь уже семейства кривых (1.32), (1.32'), (1.59) и (1.59') можно записать явными функциями так

$$\begin{aligned} L: \quad \theta = \theta(r); \quad L(x): \quad \theta = \theta(r, x) \quad (r > r_1, |x| \leq x) \\ L_0^*: \quad \theta = \theta^*(r); \quad L^*(x): \quad \theta = \theta^*(r, x) \end{aligned} \quad (1.66)$$

и ясно, что $\theta(r) = \theta(r, 0)$, $\theta^*(r) = \theta^*(r, 0)$.

Из того, что функция $\theta(r, x)$ убывает, следует

$$\text{при } r > r_1 \text{ и } -x = -\log 3 < x_1 < 0 < x_2 < \log 3 = x$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta(r, x) < \theta(r, x_2) < \theta(r) < \theta(r, x_1) < \theta(r, -x) < \frac{\pi}{2} + \delta. \quad (1.67)$$

Введем в рассмотрение следующие области:

при $A_0 \neq 0$

$$\tilde{D}_1: \quad |\theta(r, x) \leq \theta \leq \theta(r, -x)| \quad (r > r_1), \quad (1.68)$$

при $A_0 = 0$

$$\tilde{D}_1^*: \quad |\theta^*(r, x) < \theta < \theta^*(r, -x)| \quad (r > r_1). \quad (1.68')$$

Области, симметричные относительно вещественной оси соответственно областям $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_1^*$, обозначим через $\tilde{D}_2$ и $\tilde{D}_2^*$.

Докажем, что нули $\{\lambda_n\}$ функции $\omega(\lambda) - A_0$ в случае $A_0 \neq 0$ лежат в областях $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$, а при $A_0 = 0$ — в областях $\tilde{D}_1^*$ и $\tilde{D}_2^*$.

Семейство кривых $L(x)$ при $A_0 \neq 0$ и $|x| \leq \log 3 = x$ покрывает область $\tilde{D}_1$. Поэтому из определения функции $\omega_0(\lambda)$ и кривой $L(x)$ следует, что

$$\frac{1}{3} |A_0^*| \leq |\omega_0(\lambda) - A_0^*| \leq 3 |A_0^*| \quad \text{при } \lambda \in \tilde{D}_1, \quad (1.69)$$

причем

$$|\omega_0(\lambda) - A_0^*| = 3 |A_0^*| \quad \text{при } \lambda \in L(-x) \quad (1.70)$$

и

$$|\omega_0(\lambda) - A_0^*| = \frac{1}{3} |A_0^*| \quad \text{при } \lambda \in L(x). \quad (1.70')$$

Из формулы (1.29) при $\lambda = re^{i\theta}$ имеем

$$|\omega_0(\lambda) - A_0^*| = r^{-1} |1 + \varphi(re^{i\theta})| e^{i\cos\theta}. \quad (1.71)$$

Функция $\cos\theta$ монотонно убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$.

а $\varphi(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$ ($x > 0$).

Поэтому из формул (1.70), (1.71) и из асимптотической формулы

$$\omega_0(\lambda) + A_0^* = \lambda^{-1} [1 + O(\lambda^{-2})] e^{i\lambda} \quad (1.29')$$

следует, что при $\lambda = re^{i\theta}$, $r > r_2$,

$$|\omega_0(\lambda) + A_0^*| \geq 2|A_0^*| \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \theta(r, \varepsilon) \quad (1.72)$$

и

$$|\omega_0(\lambda) + A_0^*| \leq \frac{1}{2}|A_0^*| \quad \text{при} \quad \theta(r, -\varepsilon) < \theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon. \quad (1.72')$$

Отсюда получаем, что

$$|\omega_0(\lambda)| \geq |A_0^*| \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \theta(r, \varepsilon) \quad (1.73)$$

и

$$|\omega_0(\lambda)| \geq \frac{1}{2}|A_0^*| \quad \text{при} \quad \theta(r, -\varepsilon) < \theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon. \quad (1.73')$$

Наконец, если заметим, что асимптотическая формула (1.31) верна в областях $D_1(\delta) - \tilde{D}_1$ и $D_2(\delta) - \tilde{D}_2$, то последние две оценки означают, что

при $\lambda \in D_1(\delta) - \tilde{D}_1$ или при $\lambda \in D_2(\delta) - \tilde{D}_2$

$$|\omega(\lambda) - A_0| > \frac{M}{3}|A_0^*|, \quad r > r_2. \quad (1.74)$$

А это и означает, что все нули функции $\omega(\lambda) - A_0$, начиная с некоторого, могут лежать лишь в областях $\tilde{D}_1(\delta)$ и $\tilde{D}_2(\delta)$. В случае же $A_0 = 0$ (когда согласно предположению $A_1^* \neq 0$) аналогичным образом приходим к оценке

$$|\omega(\lambda) - A_0| = |\omega(\lambda)| \geq \frac{|A_1^*|}{3 \log |L|}, \quad r > r_1 \quad (1.74')$$

при $\lambda \in D_1(\delta) - \tilde{D}_1^*$ или $\lambda \in D_2(\delta) - \tilde{D}_2^*$.

Полученный результат окончательно сформулируем так.

Лемма 4'. Все нули функции $\omega(\lambda) - A_0$, начиная с некоторого, довольно большого по номеру, лежат в областях $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ при $A_0 \neq 0$ и в областях $\tilde{D}_1^*$ и $\tilde{D}_2^*$ при $A_0 = 0$.

§ 2. Теорема разложения

1°. Для доказательства теоремы о разложении по биортогональным системам, построенным выше из функций Вольтерра, нам необходимо найти оценку снизу для функции $\omega(\lambda) - A_0$ на специально подобранной последовательности окружностей.

С этой целью определим последовательность чисел $\{R_n\}$, для которой

$$0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = +\infty,$$

следующим образом:

при $A_0 \neq 0$

$$R_n = \frac{1}{l} \left[\pi(2n+1) + \frac{\pi \gamma}{2} + \arg A_0^* \right], \quad (2.1)$$

при $A_0 = 0$ (и следовательно $A_1^* \neq 0$)

$$R_n = \frac{1}{l} \left[\pi(2n+1) + \frac{\pi(\gamma+1)}{2} + \arg A_1^* \right]. \quad (2.2)$$

Обозначим также

$$\theta_n = \begin{cases} \theta(R_n, z) & \text{при } A_0 \neq 0 \\ \theta^*(R_n, z) & \text{при } A_0 = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Очевидно, что $\theta_n > \frac{\pi}{2}$.

Докажем следующее предложение:

Лемма 5. При $|\lambda| = R_n$ ($n > n_1$) справедливы оценки:

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq K_1 \left(|A_0^*| + \frac{|A_1^*|}{|M|} \right) |\lambda|^{-1} e^{\operatorname{Re} \lambda} \geq K_2 \left(|A_0^*| + \frac{|A_1^*|}{|M \log l|} \right), \quad (2.4)$$

когда $|\arg \lambda| < \theta_n$,

и

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq K_3 \left(|A_0^*| + \frac{|A_1^*|}{|M \log l|} \right), \quad (2.5)$$

когда $\theta_n \leq |\arg \lambda| < +\infty$.

где K_j ($j=1, 2$) — положительные постоянные.

Доказательство. Предположим сначала, что $A_0 \neq 0$. Формула (2.4) вытекает непосредственно из вышеприведенных выкладок. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} |\omega_0(\lambda)| &\geq |\omega_0(\lambda) + A_0^* - A_0^*| = \\ &= \left| \frac{1}{2} |\omega_0(\lambda) + A_0^*| + \frac{1}{2} |\omega_0(\lambda) + A_0^*| - |A_0^*| \right|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$. Тогда при $|\lambda| = r \geq r_5$ по формуле (1.29')

$$\frac{1}{2} |\omega_0(\lambda) + A_0^*| = \frac{1}{2} |\lambda|^{-1} |1 + O(\lambda^{-1})| e^{\operatorname{Re} \lambda} \geq |A_0^*|, \quad (2.7)$$

Поэтому из формулы (2.6) следует, что при $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$, $|\lambda| =$

$= r \geq r_5$,

$$|\omega_0(\lambda)| \geq |A_0^*|. \quad (2.8)$$

Пусть теперь $\frac{\pi}{2} \leq |\arg \lambda| \leq \theta(r, z)$. Тогда формула (1.73) непосредственно дает

$$|\omega_0(\lambda)| \geq |A_0^*|.$$

Отсюда, учитывая асимптотическую формулу (1.31), при $|\arg \lambda| \leq \theta(R_n, z) = \theta_n$ получаем утверждение (2.4) леммы.

Докажем теперь справедливость оценки (2.5).

Из асимптотики функции $\omega(\lambda) - A_0$ с учетом неравенства (1.74) нетрудно усмотреть, что эта оценка верна при $|\lambda| = r \geq r_0$, но лишь для значений

$$\theta(r, -z) \leq |\arg \lambda| < +\infty.$$

Остается показать, что это неравенство имеет место также при $|\lambda| = R_n$ ($n \geq n_1$) для значений

$$\theta(R_n, z) \leq |\arg \lambda| \leq \theta(R_n, -z).$$

Обозначим точку пересечения окружности $|\lambda| = R_k$ с кривой $L(x)$ ($|x| \leq \log 3 = z$) через $\mu_k(x) = R_k e^{i\theta_k(x)}$. Покажем, что при $k \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$iR_k \sin \theta_k(x) = iR_k + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right) \quad (2.9)$$

равномерно относительно $|x| \leq z$.

Точка $\mu_k(x) \in L(x)$, поэтому

$$iR_k \cos \theta_k(x) - \gamma \log R_k + \log |1 + \varphi(\lambda)| - \log |A_0^*| e^x = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда вытекает, что

$$\cos \theta_k(x) = O\left(\frac{\log R_k}{R_k}\right) \quad (2.11)$$

и

$$\sin \theta_k(x) = 1 + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k^2}\right) \quad (2.12)$$

равномерно относительно $|x| \leq z$. Следовательно, формула (2.9) доказана.

Относительно аргумента $\theta_k(x)$ точки $\mu_k(x)$ можем кроме того утверждать, что при $|x| \leq z$ равномерно

$$\theta(R_k, z) \leq \theta_k(x) \leq \theta(R_k, -z)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k(x) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.13)$$

причем по (2.11)

$$\theta_k(x) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\log R_k}{R_k}\right) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Поэтому

$$p_k(x) = R_k e^{i\frac{\pi}{2}} \left[1 + O\left(\frac{\log R_k}{R_k}\right) \right]. \quad (2.15)$$

Но при $\lambda = p_k(x)$, $|x| \leq z$, $k \rightarrow \infty$, из (1.29), (2.9) и (2.14)

$$\begin{aligned} \arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*] &= -\gamma \theta_k(x) + IR_k \sin \theta_k(x) + \arg [1 + \varphi(\lambda)] = \\ &= IR_k - \frac{\pi \gamma}{2} + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда, согласно выбору чисел R_k , при $\lambda = p_k(x)$, $|x| \leq z$, $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\cos [\arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*]] = O(1) \cos \arg A_0^*, \quad (2.17)$$

$$\sin [\arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*]] = O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right) \sin \arg A_0^*. \quad (2.18)$$

Значит, для функции

$$\omega_0(\lambda) + A_0^* = |\lambda|^{-1} [1 + \varphi(\lambda)] e^{i\gamma} e^{i \arg [\omega_0(\lambda) + A_0^*]}, \quad (2.19)$$

с учетом (2.15) и (2.16), имеем

$$\omega_0(p_k(x)) + A_0^* = -A_0^* e^x \left(1 + O\left(\frac{\log^2 R_k}{R_k}\right) \right), \quad (2.20)$$

так что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_0(p_k(x)) = -A_0^* (1 + e^x) \quad (2.21)$$

равномерно относительно $|x| \leq \log 3 = z$.

Отсюда следует, что при $k > k_0$

$$|\omega_0(p_k(x))| \geq C_3 |A_0^*|, \quad |x| \leq z, \quad (2.22)$$

а это с учетом формулы (1.31) означает утверждение леммы (2.5) для $|\lambda| = R_n$ в случае

$$\theta(R_n, z) \leq |\arg \lambda| \leq \theta(R_n, -z) \quad (n > n_1).$$

Таким образом, лемма 5 для случая $A_0 \neq 0$ доказана.

Доказательство леммы для случая $A_0 = 0$ в основном ничем не отличается от вышеприведенного доказательства. Нужно лишь в соответствующих местах использовать формулы (1.29'), (1.31'), (1.32') и (1.59').

2°. Сформулируем, наконец, основной результат настоящей статьи — теорему о разложении.

Теорема. Если функция $f(x)$ является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0, l]$, то равномерно относительно $x \in [\varepsilon, l - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < \frac{l}{2}$) справедливы следующие разложения

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^l f(t) Z_k(t) dt \right) Y_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^l f(t) Y_k(t) dt \right) Z_k(x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где функции $Y_k(x)$ и $Z_k(x)$ определены выше.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < R < +\infty$ и $\varphi > \pi$. Обозначим через $\Gamma(\varepsilon, R, \varphi)$ пробегаемый в положительном направлении замкнутый контур, лежащий на римановой поверхности $-\infty < \arg \lambda < +\infty$, $0 < |\lambda| < +\infty$, и состоящий из дуг $|\lambda| = R$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$, и $|\lambda| = \varepsilon$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$, и из отрезков $\varepsilon \leq |\lambda| \leq R$ лучей $\arg \lambda = \pm \varphi$. Имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varepsilon, R, \varphi)} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = \sum_{k=1}^{q_n} Y_k(x) Z_k(t), \quad (2.24)$$

где $q_n = \sum_{j=1}^n p_j$, p_j — кратность нуля λ_j функции $\omega(\lambda) - A_0$.

Эта формула доказывается несложными вычислениями логарифмического вычета функции $\frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0}$ с учетом формул (1.12), (1.13), (1.14) и определения функций $Y_k(x)$ и $Z_k(x)$.

Из формул (1.17) и (1.18) при $|\arg \lambda| \leq \beta$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, и (1.21), (1.22) при $\beta \leq |\arg \lambda| < +\infty$ нетрудно заметить, что в формуле (2.24) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, обозначив $\Gamma_n(\varphi) = \Gamma(0, R_n, \varphi)$, получим

$$J(\varphi, n) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(\varphi)} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = \sum_{k=1}^{q_n} Y_k(x) Z_k(t), \quad (2.25)$$

причем в левой части имеем абсолютно сходящийся интеграл.

Итак, чтобы доказать теорему, займемся исследованием интеграла $J(\varphi, n)$ ($\varphi > \pi$).

Разобьем интеграл $J(\varphi, n)$ на следующие интегралы

$$\begin{aligned}
 J(\varphi, n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ -\varphi < \arg \lambda < \varphi}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{R_n \\ (\arg \lambda = -\varphi)}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda + \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{R_n \\ (\arg \lambda = \varphi)}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Интеграл J_1 в свою очередь разобьем на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ \frac{\pi}{2} \leq |\arg \lambda| \leq \varphi}} \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = J_4 + J_5.
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Для рассмотрения интеграла J_4 выясним асимптотику функции

$$K(x, t, \lambda) = \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} \quad \text{при} \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Из формул (1.17) и (1.18) леммы 3 следует, что при $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 y(x, \lambda) z(t, \lambda) &= \left\{ \sum_{j_1, j_2=1}^2 a_{j_1} b_{j_2} \lambda^{-(\mu_{j_1} + \nu_{j_2})} \right\} e^{(x+t-t)x} + \\
 &+ \frac{C_3 e^{(t-t)x}}{\log \lambda} \left\{ \sum_{j=1}^2 b_j \lambda^{-\nu_j} \right\} + \frac{C_3 e^{t x}}{\log \lambda} \left\{ \sum_{j=1}^2 a_j \lambda^{-\mu_j} \right\} + O\left(\frac{1}{\log^2 \lambda}\right).
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Или, согласно обозначениям (1.26) и (1.28),

$$\begin{aligned}
 \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda} &= M \lambda^{-\tau} e^{(x+t-t)x} [1 + \varphi_1(\lambda)] + \\
 &+ \frac{C_3 e^{(t-t)x} [1 + \varphi_2(\lambda)]}{\lambda^{\frac{\nu_{j_2}+1}{2}} \log \lambda} + \frac{C_3 e^{t x} [1 + \varphi_3(\lambda)]}{\lambda^{\frac{\mu_{j_1}+1}{2}} \log \lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda \log^2 \lambda}\right) =
 \end{aligned}$$

$$= e^{(x-t)\lambda} \{ M\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi_1(\lambda)] e^{t\lambda} - A_0 \} + A_0 e^{(x-t)\lambda} + \frac{C_0 e^{(t-t)\lambda} [1 + \varphi_2(\lambda)]}{\lambda^{\gamma_{j_0} + 1} \log \lambda} + \\ + \frac{C_3 e^{t\lambda} [1 + \varphi_3(\lambda)]}{\lambda^{\mu_{j_0} + 1} \log \lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda \log^2 \lambda}\right), \quad (2.29)$$

где функции $\varphi_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\varphi_i(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}) \quad (\alpha > 0). \quad (2.30)$$

Заметим теперь, что при $|\lambda| = R_n$, $n \geq n_4$,

$$|\omega(\lambda) - A_0|^{-1} = \left[\left\{ \sum_{j_0, j_1=1}^n a_{j_0} b_{j_1} \lambda^{-(\mu_{j_0} + \gamma_{j_1} + 1)} \right\} e^{t\lambda} - A_0 \right]^{-1} + \\ + O\left(\frac{|\lambda|^{\gamma_1} e^{-2\operatorname{Re} \lambda}}{\log \lambda}\right) = [M\lambda^{-\gamma} [1 + \varphi_1(\lambda)] e^{t\lambda} - A_0]^{-1} + \\ + O\left(\frac{|\lambda|^{\gamma_1} e^{-2\operatorname{Re} \lambda}}{\log \lambda}\right). \quad (2.31)$$

Из формул (2.29) и (2.30) имеем

при $|\lambda| = R_n$ ($n \geq n_4$), $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} = e^{(x-t)\lambda} + \frac{A_0 e^{(x-t)\lambda}}{\lambda^{-\gamma} \Phi(\lambda)} + \frac{C_0 e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma+\gamma_{j_0}} \log \lambda \Phi(\lambda)} + \\ + \frac{C_3 e^{(x-t)\lambda}}{\lambda^{1-\gamma+\mu_{j_0}} \log \lambda \Phi(\lambda)} + O\left(\frac{e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma} \log^2 \lambda}\right) = \\ = \sum_{k=1}^4 \Phi_k(x, t, \lambda) + O\left(\frac{e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma} \log^2 \lambda}\right), \quad (2.32)$$

где

$$\Phi(\lambda) = M - A_0 \lambda^{-\gamma} e^{-t\lambda} [1 + \varphi_1(\lambda)]^{-1}, \quad (2.33)$$

откуда ясно, что при $|\lambda| = R_n$, $n \geq n_5$,

$$|\Phi(\lambda)| \geq C_{10} > 0. \quad (2.34)$$

Из формулы (2.32) следует, что

$$J_4 = \int_{|\lambda|=R_n} K(x, t, \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^4 \int_{|\lambda|=R_n} \Phi_k(x, t, \lambda) d\lambda + \\ + \int_{|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}} \dots \int_{|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$+ O\left(\frac{1}{R_n^{1-\gamma}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-iR_n \cos \varphi}}{(\log R_n + i\varphi)} d\varphi\right). \quad (2.35)$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2}}} \Phi_1(x, t, \lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x-t)R_n e^{i\varphi}} iR_n e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{(x-t)R_n e^{i\varphi}}}{x-t} d(R_n e^{i\varphi}(x-t)) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{(x-t)R_n e^{i\varphi}} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}{x-t} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{(x-t)R_n i} - e^{-(x-t)R_n i}}{x-t} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x-t)R_n}{x-t}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

Предположим теперь, что $x \in [z, t-z]$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), $t \in [0, l]$. Тогда, ввиду того, что $\gamma < 0$,

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} \\ |\lambda| = R_n}} \Phi_\varepsilon(x, t, \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} \\ |\lambda| = R_n}} \frac{A_0 e^{(x-t-l)\lambda}}{\lambda^{-1}\Phi(\lambda)} d\lambda, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon| &\leq C_{11} R_n^{\gamma+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x-t-l)R_n \cos \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq C_{11} R_n^{\gamma+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\varepsilon R_n \cos \varphi} d\varphi = O(R_n^\gamma) = o(1). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Аналогично, с учетом асимптотики функций $\Phi_k(x, t, \lambda)$ ($k=3, 4$), показывается, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} \Phi_k(x, t, \lambda) d\lambda = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (k=3, 4) \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} O\left(\frac{e^{-t\lambda}}{\lambda^{1-\gamma} \log^2 \lambda}\right) d\lambda = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.40)$$

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$$

В итоге из формул (2.36), (2.38), (2.39) и (2.40) заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} K(x, t, \lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi} \frac{\sin R_n(x-t)}{x-t} + o(1), \quad (2.41)$$

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$$

Введем теперь в рассмотрение следующую функцию

$$u_n(x, \delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \left\{ \int_{t-R_n^{-\delta}}^t f(t) z(t, \lambda) dt \right\} d\lambda, \quad (2.42)$$

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$$

где $f(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, l]$, а число δ определяется согласно условию

$$1 - \delta(\tau_j + 1) < 0. \quad (2.43)$$

Заметим, что условие (2.43) можно подробнее записать так

$$\delta > \frac{1}{1 + \tau_j} > \frac{-\beta_j}{1 + \tau_j} > 1 - \gamma \geq 1. \quad (2.43')$$

Этим видом записи мы будем пользоваться в дальнейшем.

Докажем, что равномерно относительно $x \in [z, l-z]$ ($0 < z < \frac{l}{2}$) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, \delta) = 0. \quad (2.44)$$

Пусть $\lambda = R_n e^{i\varphi}$ ($n \geq n_0$), где $|\varphi| < \varphi_0$ ($\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$), тогда из определения (1.7) функции $z(t, \lambda)$ следует, что при $0 \leq t \leq l$, $|\lambda| > 0$,

$$|z(t, \lambda)| \leq C_{12} R_n^{-\tau_j} |1 + \varphi(R_n e^{i\varphi})| e^{(l-t)R_n \cos \varphi} + \frac{C_{13}(l-t)^{\tau_j}}{1 + |\log(l-t)R_n e^{i\varphi}|}. \quad (2.45)$$

Из этой оценки можем написать, что при $\lambda = R_n e^{i\psi}$ ($n \geq n_0$), $|\psi| \leq \alpha_0$
 $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi\right)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{l-R_n^{-\delta}}^l f(t) z(t, \lambda) dt \right| &\leq C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}} \int_{l-R_n^{-\delta}}^l e^{(l-t) R_n \cos \psi} dt + \\ &+ C_{15} \int_{l-R_n^{-\delta}}^l \frac{(l-t)^{\tau_{j_0}} dt}{1 + |\log R_n + \log(l-t) + i\psi|} \leq \\ &\leq C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}-\delta} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + C_{15} \int_0^{R_n^{-\delta}} \frac{x^{\tau_{j_0}} dx}{1 + |\log R_n + i\psi + \log x|} \leq \\ &\leq C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}-\delta} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + C_{15} R_n^{-\delta} (\tau_{j_0} + 1). \end{aligned} \quad (2.46)$$

В процессе вывода этого неравенства мы использовали оценку

$$\begin{aligned} \max \{e^{(l-t) R_n \cos \psi}\} &\leq \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} \\ \text{при } |\psi| &\leq \alpha_0, \quad t \in [l - R_n^{-\delta}, l]. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что по асимптотической формуле (1.17) имеем

$$\text{при } \lambda = R_n e^{i\psi} \quad (n \geq n_1), \quad |\psi| \leq \alpha_0 \quad \text{и} \quad x \in [z, l],$$

$$|y(x, \lambda)| \leq C_{16}(z) R_n^{-\mu_{j_0}} e^{x R_n \cos \psi} + \frac{C_{17}(z)}{|\log R_n + i\psi|}, \quad (1.17')$$

причем постоянные $C_{16}(z)$ и $C_{17}(z)$ не зависят от α_0 .

Введем обозначение

$$R(x, \lambda) = \frac{y(x, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \int_{l-R_n^{-\delta}}^l f(t) z(t, \lambda) dt, \quad (2.47)$$

из оценок (2.4), (2.46) и (1.17') будем иметь, что при

$$\lambda = R_n e^{i\psi} \quad (n \geq n_1), \quad |\psi| \leq \alpha_0 \quad \text{и} \quad x \in [z, l - z]$$

$$\begin{aligned} |R(x, \lambda)| &\leq [C_{14} R_n^{-\tau_{j_0}-\delta} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + C_{15} R_n^{-\delta} (\tau_{j_0} + 1)] \times \\ &\times \left[C_{16}(z) R_n^{-\mu_{j_0}} e^{x R_n \cos \psi} + \frac{C_{17}(z)}{|\log R_n + i\psi|} \right] R_n^{\tau_{j_0}} e^{-i R_n \cos \psi} \leq \\ &\leq C_{15}(z) R_n^{-\delta-\tau_{j_0}-\mu_{j_0}+\gamma} e^{(x-l) R_n \cos \psi} \max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\} + \\ &+ C_{19}(z) R_n^{-\mu_{j_0}-\delta} (\tau_{j_0} + 1) + \gamma e^{(x-l) R_n \cos \psi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{20}(\varepsilon) R_n^{-\delta - \tau_{j_k} + \gamma} e^{-i R_n \cos \psi} \frac{\max \{1, e^{R_n^{1-\delta} \cos \psi}\}}{|\log R_n + i \psi|} + \\
& + C_{21}(\varepsilon) R_n^{-\delta (\tau_{j_k} + 1) + \gamma} \frac{e^{-i R_n \cos \psi}}{|\log R_n + i \psi|}.
\end{aligned} \quad (2.48)$$

Докажем теперь, что равномерно относительно $x \in [z, l - z]$ имеет место формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} R(x, \lambda) d\lambda = 0. \quad (2.49)$$

Для этой цели воспользуемся очевидным неравенством

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-k R_n \cos \psi} d\psi \leq \frac{C_{22}}{k R_n} \quad (k > 0) \quad (2.50)$$

и оценкой (2.48). Тогда при $x \in [z, l - z]$ будем иметь

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\lambda| = R_n \\ |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}}} R(x, \lambda) d\lambda \right| \leq C_{23}(\varepsilon) \left[R_n^{-\delta - \tau_{j_k} - \mu_{j_k} + \gamma} + \right. \\
& \left. + R_n^{-\mu_{j_k} - \delta (\tau_{j_k} + 1) + \gamma} + \frac{R_n^{-\delta - \tau_{j_k} + \gamma}}{\log R_n} + \frac{R_n^{-\delta (\tau_{j_k} + 1) + \gamma}}{\log R_n} \right].
\end{aligned} \quad (2.51)$$

Из условий (1.27) и (2.43'), учитывая, что по (1.26)

$$\gamma = \tau_{j_k} + \mu_{j_k} + 1, \quad (1.26')$$

получим

$$\begin{aligned}
& -\delta - \tau_{j_k} - \mu_{j_k} + \gamma = 1 - \delta < 0, \\
& -\mu_{j_k} - \delta \tau_{j_k} - \delta + \gamma = \tau_{j_k} + 1 - \delta \tau_{j_k} - \delta = (1 - \delta)(1 + \tau_{j_k}) < 0, \\
& -\delta - \tau_{j_k} + \gamma = \mu_{j_k} + 1 - \delta < 0, \\
& -\delta (\tau_{j_k} + 1) + \gamma < 0.
\end{aligned} \quad (2.52)$$

Отсюда следует, что утверждение (2.49) справедливо.

Далее, пусть аргумент ψ числа λ изменяется в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до θ_n , $x \in [z, l - z]$. Заметим, что по формуле (2.14)

$$\left| \vartheta_n - \frac{\pi}{2} \right| < C_{24} \frac{\log R_n}{R_n}, \quad (2.53)$$

откуда получим

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta_n}^{\vartheta_n} e^{-kR_n \cos \psi} d\psi &\leq \left(\vartheta_n - \frac{\pi}{2} \right) e^{-kR_n \cos \vartheta_n} \leq \\ &\leq C_{24} \frac{e^{-kR_n \cos \vartheta_n}}{R_n} \log R_n \quad (k > 0). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Кроме того, из оценки (2.4) следует, что

$$e^{iR_n \cos \psi} \geq C_{25} R_n^{\gamma} (|A_0^*| + |A_1^*| |\log iR_n e^{i\psi}|^{-1}).$$

Поэтому неравенство (2.54) даст

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta_n}^{\vartheta_n} e^{-kR_n \cos \psi} d\psi \leq C_{26} R_n^{\frac{k}{l} \gamma - 1} \log R_n (|A_0^*| + |A_1^*| |\log iR_n e^{i\psi}|^{-1})^{-\frac{k}{l}}. \quad (2.55)$$

Наконец, из оценки (2.48) и из (2.55) вытекает, что при $x \in [z, l - \varepsilon]$ справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda \right| &\leq C_{27}(\varepsilon) [R_n^{-\delta - \tau_{j_0} - \mu_{j_0} + \frac{\varepsilon}{l} \gamma} + \\ &+ R_n^{-\mu_{j_0} - \delta(\tau_{j_0} + 1) + \frac{\varepsilon}{l} \gamma} + \frac{R_n^{-\delta - \tau_{j_0}}}{\log R_n} + \\ &+ \frac{R_n^{-\delta(\tau_{j_0} + 1)}}{\log R_n}]. \end{aligned}$$

Вновь, учитывая условие (2.43') и формулу (1.26'), получим

$$\begin{aligned} -\delta - \tau_{j_0} - \mu_{j_0} &= -\delta + 1 - \gamma < 0, \\ -\mu_{j_0} - \delta(\tau_{j_0} + 1) &< 0, \\ -\delta - \tau_{j_0} &< 0, \\ -\delta(\tau_{j_0} + 1) &< 0. \end{aligned} \quad (2.52')$$

Из (2.52') вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda = 0, \quad (2.49')$$

$$\frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| < \theta_n$$

Пусть теперь $|\lambda| = R_n$, $\theta_n \leq |\arg \lambda| < \alpha_0$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$.

Для этого случая, если учесть формулу (2.5), оценку (2.48) сможем переписать так

$$|R(x, \lambda)| \leq C_{28}(\varepsilon) [R_n^{-\delta - \mu_{j_0} - \tau_{j_0}} e^{x R_n \cos \psi} + R_n^{-\mu_{j_0} - \delta (\tau_{j_0} + 1)} e^{x R_n \cos \psi} +$$

$$+ \frac{R_n^{-\delta - \tau_{j_0}}}{\log R_n} + \frac{R_n^{-\delta (\tau_{j_0} + 1)}}{\log R_n}] . \quad (2.48')$$

Далее, из неравенства

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} e^{x R_n \cos \psi} d\psi \leq \frac{C_{29}(\varepsilon)}{R_n}$$

будем иметь

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} e^{x R_n \cos \psi} d\psi \leq \frac{C_{30}(\varepsilon)}{R_n}, \quad x \in [\varepsilon, l],$$

поэтому

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda \right| \leq C_{31}(\varepsilon) \left[R_n^{-\delta - \tau_{j_0} - \mu_{j_0}} + \right.$$

$$\left. + R_n^{-\mu_{j_0} - \delta (\tau_{j_0} + 1)} + \frac{R_n^{-\delta - \tau_{j_0} + 1}}{\log R_n} + \frac{R_n^{-\delta (\tau_{j_0} + 1) + 1}}{\log R_n} \right] .$$

Как и выше, с учетом условия (2.43') получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda = 0, \quad (2.49'')$$

$$\theta_n \leq |\arg \lambda| < \alpha_0$$

Наконец, осталось разобрать случай, когда $|\lambda| = R_n$, $\alpha_0 \leq |\arg \lambda| < \varphi$.

Здесь из асимптотических формул (1.21), (1.22) и оценки (2.5) нетрудно заметить, что

$$\int_{l-R_n^{-\delta}}^l f(t) z(t, \lambda) dt = O(R_n^{-\delta (\tau_{j_0} + 1)}), \quad (2.56)$$

и

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda \right| = O \left(R_n^{-2(\alpha_n + 1) + 1} \right), \quad (2.56')$$

$$\alpha_n < |\arg \lambda| < \pi$$

откуда вновь в силу условия (2.43) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} R(x, \lambda) d\lambda = 0. \quad (2.49'')$$

$$\alpha_n < |\arg \lambda| < \pi$$

Наконец, из формул (2.49), (2.49'), (2.49'') и (2.49''') следует справедливость утверждения (2.44).

Приступим к исследованию интеграла J_5 . При этом для получения более тонких оценок займемся рассмотрением интеграла

$$J_5 = \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) J_5 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda =$$

$$\frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| < \pi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda +$$

$$\frac{\pi}{2} < |\arg \lambda| < \alpha_n$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|k|=R_n} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{t-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = J_5 + J_6,$$

$$\alpha_n < |\arg \lambda| < \pi$$

где α_0 — произвольное фиксированное число, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$$

Прежде всего, используя то обстоятельство, что $f(t)$ — функция ограниченной вариации, оценим интеграл

$$J_9 = \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} f(t) z(t, \lambda) dt.$$

Из асимптотической формулы (1.18) и формулы

$$\nu(z, \mu) = \frac{d}{dz} \nu(z; \mu + 1)$$

будет следовать

$$\begin{aligned} J_9 &= C_{32} \lambda^{-\tau_{j_n}} [1 + \varphi_3(\lambda)] \frac{1}{\lambda} \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} f(t) d\nu((I-t)\lambda; \tau_{j_n} + 1) = \\ &= C_{32} \lambda^{-\tau_{j_n}-1} [1 + \varphi_3(\lambda)] \left\{ f(I-R_n^{-\varepsilon}) \nu(R_n^{-\varepsilon} \lambda; \tau_{j_n} + 1) - f(0) \nu(I\lambda; \tau_{j_n} + 1) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} \left[e^{(I-t)\lambda} + O\left(\frac{1}{\log(I-t)\lambda}\right) \right] df(t) \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где функция $\varphi_3(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.30).

При $\lambda = R_n e^{i\psi}$

$$\begin{aligned} |J_9| &\leq C_{33} R_n^{-\tau_{j_n}-1} \left[C_{34} e^{R_n^{1-\varepsilon} \cos \psi} + C_{35} e^{IR_n \cos \psi} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} e^{(I-t) R_n \cos \psi} d|f(t)| + O\left(\frac{1}{\log R_n}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Используя эту оценку, а также формулы (1.17) и (2.5), для интеграла J_7 получим

$$\begin{aligned} |J_7| &\leq C_{36} \int \int \left[R_n^{-\nu_{j_n}} e^{x R_n \cos \psi} + O\left(\frac{1}{\log R_n}\right) \right] R_n^{-\tau_{j_n}-2} \times \\ &\quad \times \left[C_{34} e^{R_n^{1-\varepsilon} \cos \psi} + C_{35} e^{IR_n \cos \psi} + \int_0^{I-R_n^{-\varepsilon}} e^{(I-t) R_n \cos \psi} d|f(t)| + \right. \end{aligned}$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log R_n}\right) \Big| |d\lambda|. \quad (2.59)$$

Покажем, что интеграл J_7 стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Действительно, если обозначим

$$J_{10} = R_n^{-\mu_{j_0} - \tau_{j_0} - 2} \int_0^{l - R_n^{-6}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{(x+t-t)R_n \cos \psi} R_n d\psi dt,$$

то из оценки (2.53) при $x \in [z, l - z]$ будем иметь, что

$$J_{10} = R_n^{-\gamma-1} C_{37}(z). \quad (2.60)$$

Поэтому из (1.27') следует, что $J_{10} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично можно показать, что и другие слагаемые интеграла J_7 стремятся к нулю. Таким образом, $J_7 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. (2.61)

Займемся теперь асимптотикой интеграла J_8 . При $z_0 < |\arg \lambda| \leq \varphi$, $|\lambda| = R_n$, асимптотика функций $y(x, \lambda)$, $z(t, \lambda)$ и $\omega(\lambda)$ задается формулами (1.21), (1.22) и (1.23).

Из этих формул следует, что при $x \in [z, l]$ и $t \in [0, l - R_n^{-6}]$

$$y(x, \lambda) z(t, \lambda) = \frac{C_{33}(x, t)}{\log \lambda} + \frac{C_{32}(x, t)}{\log^2 \lambda} + \dots \quad (2.62)$$

Но по формуле (2.5)

$$|\omega(\lambda) - A_0| \geq C_{10},$$

поэтому

$$\left| \frac{y(x, \lambda) z(t, \lambda)}{\omega(\lambda) - A_0} \right| \leq \frac{|C_{31}(x, t)|}{|\log^2 \lambda|} + \frac{|C_{32}(x, t)|}{|\log^3 \lambda|} + \dots, \quad (2.63)$$

где все $|C_k(x, t)| \leq C_{43}$ равномерно по x и t в отрезках $x \in [z, l]$ и $t \in [0, l - R_n^{-6}]$.

Значит для интеграла J_8 при $\lambda = R_n e^{i\varphi}$, $z_0 < \varphi < \pi$, можем написать

$$\begin{aligned} |J_8| &\leq \int_0^{l - R_n^{-6}} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|C_{31}(x, t)|}{\log^2 R_n + \psi^2} d\psi \right] dt + \\ &+ O\left(\int_0^{l - R_n^{-6}} |f(t)| \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|C_{32}(x, t)|}{(\log^2 R_n + \psi^2)^2} d\psi \right] dt \right) = \\ &= O\left(\frac{1}{\log^2 R_n} \right) + O\left(\frac{1}{\log^3 R_n} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Переходя к пределу в формуле (2.64) при $n \rightarrow \infty$, получим, что

$$J_8 = o(1). \quad (2.65)$$

Из формул (2.61) и (2.65) следует, что и для интеграла J_9 имеет место формула

$$J_9 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.66)$$

Нам осталось рассмотреть интегралы J_2 и J_3 .

Оценим интеграл

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{R_n} \frac{y(x, Re^{-i\varphi}) z(t, Re^{-i\varphi})}{Re^{-i\varphi} [\omega(Re^{-i\varphi}) - A_0]} d(Re^{-i\varphi}). \quad (2.67)$$

Согласно формуле (2.62)

$$\begin{aligned} J_2 &= C_{43}(x, t) \int_0^{R_n} \frac{dR}{R \log^2(Re^{-i\varphi})} + O\left(\int_0^{R_n} \frac{dR}{R \log^3(Re^{-i\varphi})}\right) = \\ &= C_{43}(x, t) \int_0^{R_n} \frac{d \log R}{(\log R - i\varphi)^2} + O\left(\int_0^{R_n} \frac{d \log R}{(\log R - i\varphi)^3}\right) = \\ &= C_{44}(x, t) \frac{1}{\log R - i\varphi} \Big|_0^{R_n} + O\left(\frac{1}{(\log R - i\varphi)^2} \Big|_0^{R_n}\right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Из (2.68) очевидно, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_2 \rightarrow 0. \quad (2.69)$$

В случае интеграла J_3 дело обстоит аналогично.

Заметим теперь, что из формулы (2.25) следует

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(\varphi)} \frac{y(x, \lambda) \int_0^{I-R_n^{-1}} f(t) z(t, \lambda) dt}{\lambda [\omega(\lambda) - A_0]} d\lambda = \\ &= \sum_{k=1}^{q_n} \left(\int_0^{I-R_n^{-1}} f(t) Z_k(t) dt \right) Y_k(x), \end{aligned} \quad (2.70)$$

где $q_n = \sum_{j=1}^n p_j$, а $[p_j]$ — кратность нулей $[\lambda_j]$ функции $\omega(\lambda) - A_0$. Так как нули этой функции, начиная с некоторого, простые, то $q_n = n + N_1$, $n \geq N$, N_1 — фиксированное число.

Учитывая, далее, выбор чисел $[R_n]$, нетрудно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l f(t) \frac{\sin R_n(x-t) - \sin \frac{\pi n}{l}(x-t)}{x-t} dt = 0 \quad (2.71)$$

равномерно по $x \in [z, l - \varepsilon]$.

Наконец, переходя в формуле (2.70) к пределу при $n \rightarrow \infty$, с учетом оценок всех интегралов и формул (2.44) и (2.71), получим требуемое равенство (2.23) теоремы.

В заключение отметим, что вышесформулированную теорему можно распространить также на некоторые другие классы функций. Например, для функций, удовлетворяющих условию

$$\frac{f(t)}{l-t} \in L_1(0, l),$$

можно доказать теорему о равносходимости биортогональных разложений по системам (1.15) с обычными рядами Фурье.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 18 IX 1961

Ա. Ա. Կիտբալյան

ՎԵՐԱԾՈՒՄՆԵՐ ՎՈՒՏԵՐԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԲԻՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐՈՎ

Ա. Ա. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մ. Մ. Զբոսառության [1] աշխատության մեջ կառուցված է L_2 դասում
Ֆուրիեի $e^{i\lambda x}$ և վոլանդերի

$$\gamma(z; \mu) = \int_0^\infty \frac{z^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)} dt$$

կորիզներով իրականացվող աղիղ և հակադարձ ինտեգրալ ձևափոխության
ների տեսությանը:

Ներկա աշխատության մեջ ստացված արդյունքները հանդիսանում են
[1] աշխատության արդյունքների զիսկրեա անալոգները վերջավոր հատ-
վածում:

§ 1-ում վոլանդերի ֆունկցիաներից $[0, l]$ վերջավոր հատվածում կա-
ռուցված են բիօրթոգոնալ սիստեմներ:

§ 2-ում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Եթե $f(x)$ -ը սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիա է $[0, l]$ հատվածում, ապա հավասարաչափ $x \in [z, l - \varepsilon]$ -ի նկատմամբ տեղի ունեննում են
վրա վերածումները՝

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t f(t) Z_k(t) dt \right) Y_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t f(t) Y_k(t) dt \right) Z_k(x),$$

որտեղ $Y_k(x)$ -ը և $Z_k(x)$ -ը վնդակերպիլի ֆունկցիաներից կազմված ֆունկցիաներ են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра. Известия АН СССР, серия математическая, **24**, 1960, 387—420.
2. Джрбашян М. М. и Нерсисян А. Б. О построении некоторых специальных биортогональных систем. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 5, 1959, 17—41.