ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 6, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

О производной квази-полинома С. Н. Бернштейна

Рассмотрим последовательность чисел

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots\to\infty,\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}=\infty \tag{1}$$

и функций

$$\lambda_{p,k}(x)=\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}\lambda_\nu}{2\pi i}\int\limits_C\frac{x^{-\zeta}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\lambda_\nu)},\qquad k=0,1,2,\ldots,p, \tag{2}$$

где $\prod\limits_{\nu=p+1}^{p}\lambda_\nu=1$, а простой контур C здесь, и впредь в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя подинтегральной функции.

А. О. Гельфондом [1] доказано, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, а

$$B_p(f,x)=\sum_{k=0}^{p}f(\tau_{p,k})\,\lambda_{p,k}(x), \tag{3}$$

где

$$\tau_{p,k}=\prod_{\nu=k+1}^{p}\left(\frac{\lambda_\nu-\lambda_1}{\lambda_\nu}\right)^{1/\lambda_1},\qquad k=0,1,2,\ldots,p,\qquad \tau_{p,p}=1, \tag{4}$$

то

$$\lim_{p\to\infty}B_p(f,x)=f(x)$$

равномерно на всем сегменте $[0, 1]$*, притом указана также быстрота приближения.

В работе [2] доказано, что в качестве последовательности $\{\tau_{p,k}\}$ можно брать любую другую последовательность $\{\tau^*_{p,k}\}$, если только

$$\lim_{p\to\infty}(\tau^*_{p,k}-\tau_{p,k})=0$$

равномерно относительно всех $k=0,1,2,\ldots,p$.

* Представление (2) функций $\lambda_{p,k}(x)$ впервые дано в [2].

В частности можно полагать

$$\tau_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu + 1}$$

или же

$$\tau_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu},$$

если только в последнем случае $\gamma_1 \geqslant 1$.

В настоящей статье исследуется вопрос приближения $B'_p(f, x)$ к $f'(x)$ при предположении непрерывности последней на $[0, 1]$.

Естественно считать, что $\gamma_1 = 1$, так как в противном случае, вообще говоря,

$$\lim_{x \to 0+} B'_p(f, x) = \begin{cases} 0, \text{ когда } \gamma_1 > 1, \\ \infty, \text{ когда } \gamma_1 < 1. \end{cases}$$

Это значит, что следует брать $\gamma_1 = 1$ и

$$\tau_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \quad \tau_{p,p} = 1. \tag{5}$$

Сперва докажем нужные для изложения основного вопроса предложения.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{p} (x - \tau_{p,k}) l'_{p,k}(x) = 1. \tag{6}$$

Доказательсто. Действительно, заметим, что

$$\sum_{k=0}^{p} l_{p,k}(x) = 1 \tag{7}$$

(см. [1], [2]). Значит

$$\sum_{k=0}^{p} l'_{p,k}(x) = 0, \tag{7'}$$

а

$$\sum_{k=0}^{p} \tau_{p,k} l'_{p,k}(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\prod_{\nu=k+1}^{p} (\gamma_\nu - 1)}{2\pi i} \int\limits_C \frac{-\zeta x^{-\zeta-1} d\zeta}{\prod_{\nu=k}^{p} (\zeta + \gamma_\nu)} =$$

$$= -x^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \sum_{k=0}^{p} \frac{\prod_{\nu=k+1}^{p} (\gamma_\nu - 1) x^{-\zeta}}{\prod_{\nu=k}^{p} (\zeta + \gamma_\nu)} \zeta d\zeta =$$

$$= -\frac{x^{-1}}{2\pi i}\int\limits_C \left[1 - \prod_{\nu=0}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\zeta + \gamma_\nu}\right] \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta - 1} = -\frac{x^{-1}}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta - 1} = -1,$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^{p} \gamma_{p,k}\, \lambda'_{p,k}(x) = -1. \tag{8}$$

В силу (7) и (8) лемма доказана.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$x\lambda'_{p,k}(x) = \gamma_k \lambda_{p,k}(x) - \gamma_{k+1}\lambda_{p,k+1}(x), \tag{9}$$

когда

$$k = 1, 2, \ldots, p-1,$$

а

$$x\lambda'_{p,0}(x) = -\gamma_1 \lambda_{p,1}(x), \tag{10}$$

$$x\lambda'_{p,p}(x) = \gamma_p \lambda_{p,p}(x). \tag{11}$$

Доказательство. Действительно, пусть сперва $1 \leq k < p$, тогда

$$x\lambda'_{p,k}(x) = x\,\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{-\zeta x^{-\zeta-1}}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\gamma_\nu)}\, d\zeta =$$

$$= -\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\gamma_\nu)} = -\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(\zeta+\gamma_k-\gamma_k)\, x^{-\zeta}}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\gamma_\nu)}\, d\zeta =$$

$$= -\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}(\zeta+\gamma_\nu)} + \gamma_k\,\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\gamma_\nu)}$$

или

$$x\lambda'_{p,k}(x) = \gamma_k \lambda_{p,k}(x) - \gamma_{k+1}\lambda_{p,k+1}(x).$$

Пусть теперь $k = 0$. Тогда

$$x\lambda'_{p,0}(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{-\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{p}(\zeta+\gamma_\nu)} = -\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{p}(\zeta+\gamma_\nu)} =$$

$$= -\gamma_1 \lambda_{p,1}(x).$$

Наконец

$$x\lambda'_{p,p}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{-\zeta x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta + \gamma_p} = \gamma_p x^{\gamma_p} = \gamma_p \lambda_{p,p}(x).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь последовательности чисел

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots \to \infty, \quad \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu} = \infty,$$

$$\gamma_{p,k}(\alpha) = \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \gamma_{p,p}(\alpha) = 1 \tag{12}$$

и функций

$$\lambda_{p,k}(x; \alpha) = \frac{\prod_{\nu=k+1}^{p} \alpha_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=k}^{p} (\zeta + \alpha_\nu)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p. \tag{13}$$

Введем еще обозначения

$$\mu_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1} - \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\alpha_\nu - 1}{\alpha_\nu}, \tag{14}$$

$$\mu'_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p} \left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1}\right)^2 - \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\alpha_\nu - 2}{\alpha_\nu}. \tag{14'}$$

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\lim_{p\to\infty} \mu_{p,k} = \lim_{p\to\infty} \mu'_{p,k} = 0 \tag{14''}$$

равномерно для всех $k = 1, 2, \ldots, p$.

Замечание. При $k \leqslant n_0$, где $n_0 > 0$ — некоторое число, утверждение леммы очевидно.

Пусть $k > n_0$. Тогда

$$\mu_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1} \left[1 - \prod_{\nu=k+1}^{p} \left(1 - \frac{1}{\alpha_\nu^2}\right)\right].$$

Нетрудно заметить, что в силу $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \infty$

$$1 > \prod_{\nu=k+1}^{p} \left(1 - \frac{1}{\alpha_\nu^2}\right) > 1 - \sum_{k+1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu^2}$$

или

$$0 < \mu_{p,k} < \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1} \cdot \sum_{\nu=k+1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu^2} < \frac{\exp\left((\varepsilon - 1)\sum_{k+1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu}\right)}{\alpha_{k+1}} \sum_{k+1}^{p} \frac{1}{\alpha_\nu}.$$

где при достаточно большом p, $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ — число сколь угодно малое.

Это значит, что

$$0 < \mu_{p,k} < \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\nu=k+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right)}{\alpha_{k+1}}. \tag{15}$$

Оценим теперь $|\mu'_{p,k}|$, где опять достаточно рассматривать случай, когда $k \geqslant n_0 > 0$, так как при малых k равномерное стремление $\mu'_{p,k}$ к нулю, когда $p \to +\infty$, очевидно.

Имеем

$$\mu'_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+1}\right)^2\left[1 - \prod_{\nu=k+1}^{p}\left(1+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)^2\left(1-\frac{2}{\alpha_\nu}\right)\right] =$$

$$= \prod_{\nu=k+1}^{p}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+1}\right)^2\left[1 - \prod_{\nu=k+1}^{p}\left(1-\frac{3}{\alpha_\nu^2}-\frac{2}{\alpha_\nu^3}\right)\right] <$$

$$< \prod_{\nu=k+1}^{p}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+1}\right)^2\left[1 - \prod_{\nu=k+1}^{p}\left(1-\frac{4}{\alpha_\nu^2}\right)\right] < \prod_{\nu=k+1}^{p}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+1}\right)^2 \cdot 4\sum_{\nu=k+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu^2},$$

так как при достаточно больших $n_0 > 0$ и $k > n_0$, $\alpha_k > 4$.

Это значит, что при достаточно большом $n_0 > 0$ и $k > n_0 > 0$

$$0 < \mu'_{p,k} < \frac{4}{\alpha_{k+1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right). \tag{16}$$

Следовательно, согласно замечанию к лемме, $\mu_{p,k}$ и $\mu'_{p,k}$ стремятся к нулю, когда $p \to \infty$ равномерно для всех k.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{p}[\tau_{p,k}(\alpha) - x]^2 \, t_{p,k}(x, \alpha) < C\,\mu_p^*, \tag{17}$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная,

$$\mu_p^* = \max_{1 \leqslant k \leqslant p}\left\{\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right)}{\alpha_{k+1}}, \quad \exp\left(-\sum_{1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\right\}. \tag{18}$$

Доказательство. Действительно, прежде всего нетрудно заметить, что

$$\sum_{k=1}^{p} t_{p,k}(x, \alpha) = 1,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{p}\iota_{p,k}(x,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\sum_{k=1}^{p}\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}\alpha_\nu\, x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\alpha_\nu)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\left(1-\prod_{\nu=1}^{p}\frac{\alpha_\nu}{\zeta+\alpha_\nu}\right)\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta}.$$

Но $\alpha_1=0$, значит

$$\sum_{k=1}^{p}\iota_{p,k}(x,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta}=1.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{p}\tau_{p,k}(\alpha)\,\iota_{p,k}(x,\alpha)=\sum_{k=1}^{p}\mu_{p,k}\iota_{p,k}(x,\alpha)+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p}(\alpha_\nu-1)}{2\pi i}\int_{C}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\alpha_\nu)}$$

или

$$\sum_{k=1}^{p}\tau_{p,k}(\alpha)\,\iota_{p,k}(x,\alpha)=\sum_{k=1}^{p}\mu_{p,k}\iota_{p,k}(x,\alpha)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\left(1-\prod_{\nu=1}^{p}\frac{\alpha_\nu-1}{\zeta+\alpha_\nu}\right)\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\mu_{p,k}\iota_{p,k}(x,\alpha)+x-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\prod_{\nu=1}^{p}\frac{\alpha_\nu-1}{\zeta+\alpha_\nu}\,\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+1},$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{p}\tau_{p,k}(\alpha)\,\iota_{p,k}(x,\alpha)=x+\sum_{k=1}^{p}\mu_{p,k}\iota_{p,k}(x,\alpha)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\prod_{\nu=1}^{p}\frac{\alpha_\nu-1}{\zeta+\alpha_\nu}\,\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\zeta+1}.\tag{19}$$

Составим, наконец,

$$\sum_{k=1}^{p}\tau_{p,k}^{2}(\alpha)\,\iota_{p,k}(x,\alpha)=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\mu_{p,k}^{\prime}\iota_{p,k}(x,\alpha)+\sum_{k=1}^{p}\frac{\prod\limits_{k+1}^{p}(\alpha_\nu-2)}{2\pi i}\int_{C}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{k}^{p}(\zeta+\alpha_\nu)}.$$

Зная, что

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{\prod\limits_{k+1}^{p}(\alpha_\nu-2)}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta+\alpha_\nu)}=1-\prod_{\nu=1}^{p}\frac{\alpha_\nu-2}{\zeta+\alpha_\nu},$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_{p,k}^2(\alpha)\,\lambda_{p,k}(x,\alpha) = x^2 - \sum_{k=1}^{p} \mu'_{p,k}\,\lambda_{p,k}(x,\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\alpha_\nu - 2}{\zeta + \alpha_\nu}\cdot\frac{x^{\zeta}\,d\zeta}{\zeta+2}. \quad (20)$$

Помножив (19), (20) и (21) соответственно на x^2, $-2x$, 1 и сложив, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{p} |\xi_{p,k}(\alpha) - x|^2\,\lambda_{p,k}(x,\alpha) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (\mu_{p,k} - \mu'_{p,k})\,\lambda_{p,k}(x,\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\alpha_\nu - 1}{\zeta + \alpha_\nu}\,\frac{x^{\zeta}\,d\zeta}{\zeta+1} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\alpha_\nu - 2}{\zeta + \alpha_\nu}\,\frac{x^{\zeta}\,d\zeta}{\zeta+2}. \quad (21)$$

С другой стороны нетрудно заметить, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\alpha_\nu - 1}{\zeta + \alpha_\nu}\,\frac{x^{\zeta}\,d\zeta}{\zeta+1}\right| < C\prod_{\nu=1}^{p}\left|\frac{\alpha_\nu - 1}{\alpha_\nu}\right| < C\exp\left(-\sum_{1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right),$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\alpha_\nu - 2}{\zeta + \alpha_\nu}\,\frac{x^{\zeta}\,d\zeta}{\zeta+2}\right| < C\exp\left(-\sum_{1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right), \quad (22)$$

где C — абсолютная постоянная, $\exp\left(-\sum_{1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right)$ при больших p — число сколь угодно малое.

В силу (15), (16) и (22) из (21) получаем

$$0 \le \sum_{k=1}^{p} |\xi_{p,k}(\alpha) - x|^2\,\lambda_{p,k}(x,\alpha) <$$

$$< C\left[\max_k \frac{1}{\alpha_{k+1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k+1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right) + \exp\left(-\sum_{1}^{p}\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\right].$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Для всякого δ, $0<\delta<1$, $x \in [0,1]$ и $|\xi_{p,k}(\alpha) - x| \ge \delta$ справедливо неравенство*

$$0 \le {\sum_{k}}' \lambda_{p,k}(x,\alpha) \le \frac{C}{\delta^2}\,\mu^*_p, \quad (23)$$

где ${\sum_{k}}'$ *распространено на те* k, *для которых* $|\xi_{p,k}(\alpha) - x| \ge \delta$, *а* μ^*_p *определено в* (18).

Доказательство. Действительно.

$$\sum_k{}' \lambda_{p,k}(x,\alpha) \leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_k{}' [\tau_{p,k}(\alpha)-x]^2 \lambda_{p,k}(x,\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{p}{}' [\tau_{p,k}(x)-x]^2 \lambda_{p,k}(x,\alpha).$$

В силу леммы 4 имеем

$$0 < \sum_k{}' \lambda_{p,k}(x,\alpha) < \frac{C}{\delta^2}\mu_p^*. \tag{24}$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Для всякой функции $f(x)$, имеющей на $[0, 1]$ непрерывную производную, справедливо равенство*

$$\lim_{p\to\infty} B_p'(f, x) = f'(x)$$

равномерно на всем сегменте $[0, 1]$, где $B_p(f, x)$ — квази-полиномы С. Н. Бернштейна, определенные для последовательности

$$0=\gamma_0,\ \gamma_1=1<\gamma_2\leqslant\cdots\to\infty,\ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty,$$

а

$$\tau_{p,k}=\prod_{\nu=k+1}^{p}\frac{\gamma_\nu-1}{\gamma_\nu},\qquad k=0,1,2,\ldots,p-1,\qquad \tau_{p,p}=1.$$

Доказательство. Имеем

$$f(\tau_{p,k})=f(x)+[f'(x)+\theta(\tau_{p,k},x)](\tau_{p,k}-x), \tag{25}$$

где $\theta(\tau_{p,k}, x)\to 0$, когда $\tau_{p,k}\to x$.

Подставив значение $f(\tau_{p,k})$ из (25) в

$$B_p'(f,x)=\sum_{k=0}^{p} f(\tau_{p,k})\lambda_{p,k}'(x)$$

в силу (6) и (7′) получаем

$$B_p'(f,x)=f'(x)+\sum_{k=0}^{p}\theta(\tau_{p,k},x)(\tau_{p,k}-x)\lambda_{p,k}'(x). \tag{26}$$

Для краткости обозначим

$$\gamma_k\theta(\tau_{p,k},x)(\tau_{p,k}-x)=a_k, \tag{27}$$

$$\gamma_{k+1}\theta(\tau_{p,k},x)(\tau_{p,k}-x)=b_k, \tag{28}$$

тогда в силу леммы 2 равенство (26) запишется в виде

$$B_p'(f,x)=f'(x)+\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{p-1}[a_k\lambda_{p,k}(x)-b_k\lambda_{p,k+1}(x)]-$$

$$-\frac{b_0}{x}\lambda_{p,1}(x)+\frac{a_p}{x}\lambda_{p,p}(x). \tag{26'}$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[a_k\lambda_{p,k}(x)-b_k\lambda_{p,k+1}(x)\right]=a_1\lambda_{p,1}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{p-2}(a_{k+1}-b_k)\lambda_{p,k+1}(x)-b_{p-1}\lambda_{p,p}(x). \tag{29}$$

В силу (29) равенство (26') запишется в виде

$$B_p'(f,x)=f'(x)+\frac{1}{x}\Big\{a_1\lambda_{p,1}(x)+\sum_{k=1}^{p-2}(a_{k+1}-b_k)\lambda_{p,k+1}(x)-$$

$$-b_{p-1}\lambda_{p,p}(x)-b_0\lambda_{p,1}(x)+a_p\lambda_{p,p}(x)\Big\}=$$

$$=f'(x)+\frac{1}{x}\Big\{(a_1-b_0)\lambda_{p,1}(x)+\sum_{k=1}^{p-2}(a_{k+1}-b_k)\lambda_{p,k+1}(x)+$$

$$+(a_p-b_{p-1})\lambda_{p,p}(x)\Big\},$$

т. е.

$$B_p'(f,x)=f'(x)+\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{p-1}(a_{k+1}-b_k)\lambda_{p,k+1}(x)$$

или

$$B_p'(f,x)=f'(x)+\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{p}(a_k-b_{k-1})\lambda_{p,k}(x). \tag{26''}$$

Согласно обозначениям (27) и (27') имеем

$$a_k-b_{k-1}=\gamma_k\theta(\tau_{p,k},x)(\tau_{p,k}-x)-\gamma_k\theta(\tau_{p,k-1},x)(\tau_{p,k-1}-x)=$$

$$=\gamma_k\left[\theta(\tau_{p,k},x)(\tau_{p,k}-x)-\theta(\tau_{p,k-1},x)(\tau_{p,k}-x)\right]=\gamma_k\varphi(k,x). \tag{30}$$

Выразим теперь $\varphi(k,x)$ через $f(x)$ и $f'(x)$. Имеем

$$f(\tau_{p,k})=f(x)+\left[f'(x)+\theta(\tau_{p,k},x)\right](\tau_{p,k}-x),$$

$$f(\tau_{p,k-1})=f(x)+\left[f'(x)+\theta(\tau_{p,k-1},x)\right](\tau_{p,k}-x).$$

Это значит, что

$$\varphi(k,x)=f(\tau_{p,k})-f(\tau_{p,k-1})+f'(x)\left[\tau_{p,k}-x-(\tau_{p,k-1}-x)\right]. \tag{31}$$

Если обозначить

$$\Delta\tau_{p,k-1}=\tau_{p,k}-\tau_{p,k-1}=\frac{1}{\gamma_k}\prod_{\nu=k+1}^{p}\frac{\gamma_\nu-1}{\gamma_\nu}$$

и

$$\Delta f(\tau_{p,k-1}) = f(\tau_{p,k}) - f(\tau_{p,k-1}),$$

тогда

$$\varphi(k, x) = \Delta f(\tau_{p,k-1}) - f'(x)\,\Delta\tau_{p,k-1} = [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(x)] \cdot \frac{1}{\gamma_k} \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu}, \tag{31'}$$

где

$$\tau_{p,k-1} < \xi_{p,k-1} < \tau_{p,k}.$$

Подставив значение $\varphi(k, x)$ из (31') в (26''), получим

$$B'_p(f, x) = f'(x) + \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{p} [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(x)] \prod_{k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu} \lambda_{p,k}(x). \tag{26'''}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{x}\prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu} \lambda_{p,k}(x) = \frac{\prod\limits_{k+1}^{p}(\gamma_\nu - 1)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta-1}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta + \gamma_\nu)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{k+1}^{p}(\gamma_\nu - 1)}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta + \gamma_\nu - 1)} = \frac{\prod\limits_{k+1}^{p}\alpha_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p}(\zeta + \alpha_\nu)},$$

т. е.

$$\frac{1}{x}\prod_{k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu} \lambda_{p,k}(x) = \lambda_{p,k}(x, \alpha). \tag{32}$$

Из (26''') в силу (32) получаем

$$B'_p(f, x) = f'(x) + \sum_{k=1}^{p} [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(x)]\,\lambda_{p,k}(x, \alpha) =$$

$$= f'(x) + \sum_{k=1}^{p} [f'(\xi_{p,k-1}) - f'(\tau^*_{p,k})]\,\lambda_{p,k}(x, \alpha) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} [f(\tau^*_{p,k}) - f'(x)]\,\lambda_{p,k}(x, \alpha), \tag{26''''}$$

где

$$\tau^*_{p,k} = \prod_{k+1}^{p} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1} = \prod_{k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu} = \tau_{p,k}.$$

Для оценки сверху

$$|f'(\xi_{p,k-1}) - f'(\tau^*_{p,k})|$$

заметим, что

$$|\xi_{p,k-1} - \tau^*_{p,k}| < |\tau_{p,k-1} - \tau^*_{p,k}| =$$

$$= \tau_{p,k} - \tau_{p,k-1} = \frac{1}{\gamma_k} \prod_{\nu=k+1}^{p} \frac{\gamma_\nu - 1}{\gamma_\nu} = \frac{1}{\gamma_k} \tau_{p,k}.$$

Нетрудно заметить еще, что в силу условия теоремы для всякого $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ и достаточно большое p, такие, что

$$|f'(\xi_{p,k-1}) - f'(\tau^*_{p,k})| < \varepsilon \tag{33}$$

если только $\tau_{p,k-1} < \xi_{p,k-1} < \tau_{p,k}$, а

$$\frac{1}{\gamma_k} \tau_{p,k} < \delta$$

для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, p$.

С другой стороны, согласно лемме 4, разбивая сумму

$$\sum_{k=1}^{p} |f'(\tau^*_{p,k}) - f'(x)| \lambda_{p,k}(x, \alpha)$$

на два слагаемые $\sum\limits_k{}'$ и $\sum\limits_k{}''$, распространенные на те k, для которых соответственно

$$|x - \tau^*_{p,k}| = |x - \tau_{p,k}| < \delta \text{ и } |x - \tau_{p,k}| \geq \delta,$$

будем иметь

$$\left| \sum_k{}' \right| < \varepsilon,$$

а

$$\left| \sum_k{}'' \right| \leq 2M \sum_k{}'' \lambda_{p,k}(x, \alpha).$$

Согласно лемме 5 имеем

$$\left| \sum_k{}'' \right| \leq \frac{2MC}{\delta^2} \mu^*_p,$$

где

$$M = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|,$$

а C и μ^*_p определены в (18).

В силу последних неравенств из (26'''') получаем

$$|f'_{(x)} - B'_p(f, x)| < C_1(\varepsilon + \mu^*_p) = \mu^{**}_p,$$

где, как нетрудно заметить,

$$\lim \mu^{**}_p = 0.$$

Этим теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 2 II 1961

Հ. Վ. Բադալյան

Ս. Ն. ԲԵՐՆՇՏԵՅՆԻ ՔՎԱԶԻ ՊՈԼԻՆՈՄԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են թվերի և ֆունկցիաների հետևյալ հաջորդականությունները՝

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots \to \infty, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty$$

և

$$\lambda_{p,k}(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=k+1}^{p} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{p} (\zeta + \gamma_\nu)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

որտեղ $p = 0, 1, 2, \ldots$, $\prod\limits_{\nu=p+1}^{p} \gamma_\nu = 1$, *իսկ պարզ կոնտուր* C-*ն ընդգրկում է ընդինտեգրալ ֆունկցիայի բևեռները։*

Տված $f(x)$ *ֆունկցիայի համար կառուցված*

$$B_p(f, x) = \sum_{k=0}^{p} f(\tau_{p,k})\, \lambda_{p,k}(x)$$

ֆունկցիան, որտեղ $f(x)$ *որոշված է* $[0, 1]$ *հատվածում,*

$$\tau_{p,k} = \prod_{\nu=k+1}^{p} \left(\frac{\gamma_\nu - \gamma_1}{\gamma_\nu} \right)^{1/\gamma_1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \tau_{p,p} = 1,$$

անվանենք $f(x)$ *ֆունկցիայի Ս. Ն. Բեռնշտեյնի քվազի պոլինոմ։*

Ապացուցված է

Թեորեմ — Երբ $f(x)$ ֆունկցիան $[0, 1]$ հատվածում ունի անընդհատ ածանցյալ, ապա այդ ֆունկցիայի Ս. Ն. Բեռնշտեյնի քվազի պոլինոմի ածանցյալը ձգտում է $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալին ամբողջ $[0, 1]$ սեգմենտում հավասարաչափ, երբ միայն

$$0 = \gamma_0, \ \gamma_1 = 1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots \to \infty,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty։$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* К вопросу об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна. Известия АН СССР, серия математическая, 14, 1950.
2. *Бадалян Г. В.* Обобщение Хаусдорфовского метода суммирования рядов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 6, 1959.