

А. Ц. Амагуни, А. Н. Оганесян

Излучения, возникающие при пролете заряженных частиц над системой металлических шаров или цилиндров

В работе получен спектральный состав излучения, образующегося при пролете с постоянной скоростью v нерелятивистской заряженной частицы над шаром и заряженной нити — над цилиндром. Как и следует ожидать из простых соображений, максимум излучения в обоих случаях приходится на частоту $\omega \sim v/l$, где l — прицельное расстояние. В случае цилиндров излучение носит изотропный, по полярному углу, характер. Получены также формулы для излучения m одинаковых шаров (или цилиндров), если известно излучение одного шара (или цилиндра). Простой способ получения этих формул, описывающих интерференционные эффекты при излучении заряженных частиц, движущихся через или над периодической структурой, не содержит допущения $v \ll c$ и имеет общий характер.

1. Пусть частица с зарядом e и постоянной скоростью v пролетает над шаром радиуса $a < l$. При этом возникает излучение, которое иногда называют излучением индуцированных на металлической поверхности переменных зарядов. Если скорость заряженной частицы $v \ll c$, то запаздыванием поля можно пренебречь и для определения возникающего излучения можно использовать электростатический метод изображений. Такой, естественный в данном случае подход к задаче применялся в работе Аскаряна [1], где рассмотрено лобовое столкновение заряженной частицы с металлическим шаром и подсчитана полная энергия излучения. Как уже упоминалось, ниже рассматривается случай пролета частицы над шаром и мы интересуемся не только полной излученной энергией, но и спектральным составом излучения.

Отметим, что мы будем предполагать скорость $v \ll c$, но все же достаточно большой, чтобы иметь возможность считать ее постоянной, т. е. пренебречь отдачей при излучении и изменением скорости из-за взаимодействия с индуцированными на поверхности шара зарядами.

Поле вне шара может быть получено как поле заряда e , движущегося прямолинейно с постоянной скоростью v , и поле зарядов изображений

$$e_1 = -e_2 = -\frac{ea}{q}, \quad (1.1)$$

где q — расстояние от заряда e до центра шара $q = \sqrt{l^2 + v^2 t^2}$.

Заряд e_2 расположен в центре шара, заряд e_1 — на расстоянии $q_1 = \frac{a^2}{q}$ от него на прямой, соединяющей центр с зарядом e . При движении заряда e из $-\infty$ в $+\infty$, переменный по величине заряд — изображение e_1 , описывает окружность диаметра a^2/e , проходящую через центр металлического шара.

Поле излучения будет определяться зарядами e_1, e_2 причем, если $v \ll c$, то скорость движения заряда e_1 будет также меньше скорости света и излучение будет носить дипольный характер ($a \ll \lambda$, где λ — характерная длина волны излучения).

Поместим начало координат в центре шара. Пусть частица движется вдоль оси y , плоскость zoy проходит через центр шара и траекторию частицы. Ось oz перпендикулярна к траектории. Частица с зарядом e при $t = -\infty$ находилась на $-\infty$, при $t = 0$ пересекает ось z на прицельном расстоянии l . Тогда величина дипольного момента $\vec{d}$ равна

$$d_x = 0, \quad d_y = -\frac{ea^2vt}{(l^2 + v^2t^2)^{3/2}}, \quad d_z = -\frac{ea^2l}{(l^2 + v^2t^2)^{3/2}} \quad (1.2)$$

и излучение в телесный угол $d\Omega$

$$dE_{\vec{n}} = \frac{225e^2v^3}{4096c^3l} \left(\frac{a}{l}\right)^6 [7\sin^2\theta + 5(1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi)] d\Omega. \quad (1.3)$$

В (1.3) θ и φ — углы, определяющие направление излучения $\vec{n}$. Из (1.3) видно, что излучение слабо анизотропно, максимум его приходится на $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0, \pi$, а минимум на $\theta = 0, \pi$.

Интегрируя по углам, получим полное излучение за все время прелета

$$E = 1,76 \frac{e^2v^3}{l} \left(\frac{a}{l}\right)^6. \quad (1.4)$$

Из формул (1.3) и (1.4) видно, что излученная энергия довольно сильно зависит от отношения a/l и при прицельном расстоянии l , заметно превышающем радиус шара a , резко падает.

Частотное распределение излучения определяется по формуле

$$dE_{\omega, \vec{n}} = \frac{\omega^4}{c^3} |[\vec{d}_\omega \vec{n}]|^2 d\Omega d\omega, \quad (1.5)$$

где $\vec{d}_\omega$ — фурье-компонента от $\vec{d}(t - \frac{R_0}{c})$ и $R_0 \gg a$ — точка наблюдения поля излучения.

$$d_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d_y \left(t - \frac{R_0}{c} \right) dt = -\frac{ie\omega a^2}{\pi v^2} e^{i\frac{\omega}{c} R_0} K_0 \left(\frac{l\omega}{v} \right),$$

$$d_z(\omega) = -\frac{e\omega a^2}{\pi v^2} e^{i\frac{\omega}{c} R_0} K_1 \left(\frac{l\omega}{v} \right). \quad (1.6)$$

Здесь K_0 и K_1 — модернизированные функции Ганкеля.

Из (1.5) и (1.6) следует:

$$dE_{\perp} = \frac{e^2 \omega^6 a^6}{\pi^2 c^3 v^4} \left\{ K_0^2 \left(\frac{l\omega}{v} \right) \sin^2 \theta + K_1^2 \left(\frac{l\omega}{v} \right) (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \right\} d\Omega d\omega, \quad (1.7)$$

$$dE_{\parallel} = \frac{8e^2 \omega^6 a^6}{3\pi c^3 v^4} \left\{ K_0^2 \left(\frac{l\omega}{v} \right) - K_1^2 \left(\frac{l\omega}{v} \right) \right\} d\omega. \quad (1.8)$$

Максимум излучения приходится на частоту $\omega_{\max} = 2.2 \cdot 10^{14}$ при $\omega \ll \omega_{\max}$

$$dE_{\perp} = \frac{8e^2 a^6 \omega^4}{3\pi c^3 v^2 l^2}, \quad (1.8')$$

при $\omega \ll \omega_{\max}$

$$dE_{\perp} = \frac{8e^2 a^6 \omega^5}{3c^3 v^2 l} \cdot \exp \left(-\frac{2l\omega}{v} \right). \quad (1.8'')$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда заряженная частица с постоянной скоростью $v \ll c$ пролетает параллельно линии центров m одинаковых металлических шаров. Пусть расстояние между центрами соседних шаров есть r . Можно показать, что если $(a/r)^2 \ll 1$, поле излучения, возникающее в этом случае есть сумма полей излучения от зарядов — изображений (1.1) в отдельных шарах. Иначе говоря, при $(a/r)^2 \ll 1$ изображениями изображений можно пренебречь. Нетрудно видеть, что поле излучения $\vec{H}$, возникающее в этом случае, запишется в виде

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \sum_{k=1}^m \left[\vec{d} \left(t_k - \frac{R_0^{(k)}}{c} \right) \vec{n} \right], \quad (2.1)$$

где

$$t_k = t - \frac{r(k-1)}{c},$$

$$R_0^{(k)} \approx R_0 - (k-1) \vec{r} \vec{n} = R_0 - (k-1) r \cos \theta,$$

θ — угол между траекторией частицы и направлением излучения $\vec{n}$

($\cos \theta = \sin \theta \sin \varphi$). Фурье-компоненты от $\vec{d} \left(t_k - \frac{R_0^{(k)}}{c} \right)$ будут отличаться от выражений (1.6) множителем $\exp \left[i \frac{(k-1) r \omega}{v} (1 - \beta \cos \theta) \right]$ и излученная энергия определится выражением

$$dE_{\omega}^{(m)} = c |\vec{H}_m|^2 R_0^2 d\Omega d\omega =$$

$$= \frac{e^2 \omega^6 a^6}{\pi^2 c^3 v^4} \left[K_1^2 \left(\frac{\omega l}{v} \right) \sin^2 \theta + K_0^2 \left(\frac{\omega l}{v} \right) (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \right] \times$$

$$\times \left\{ m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \cos \left[\frac{k \omega r}{v} (1 - \beta \sin \theta \sin \varphi) \right] \right\} d\Omega d\omega. \quad (2.2)$$

Формулу (2.2) можно переписать иначе

$$dE_{\omega}^{(m)} = \frac{e^2 \omega^6 a^6}{\pi^2 c^3 v^4} \left[K_1^2 \left(\frac{\omega l}{v} \right) \sin^2 \theta + K_0^2 \left(\frac{\omega l}{v} \right) (1 - \cos^2 \theta) \right] \times$$

$$\times \frac{\sin^2 \left[\frac{m \omega r}{2v} (1 - \beta \cos \theta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{\omega r}{2v} (1 - \beta \cos \theta) \right]} d\Omega d\omega. \quad (2.3)$$

Таким образом, излучение в случае с m шарами отличается от излучения в случае одного шара множителем

$$\frac{\sin^2 \left[\frac{m \omega r}{2v} (1 - \beta \cos \theta) \right]}{\sin^2 \left[\frac{\omega r}{2v} (1 - \beta \cos \theta) \right]}, \quad (2.4)$$

который описывает интерференцию излучений от отдельных шаров. Обсуждение роли множителя (2.4), характерного для периодических структур, приводится ниже.

3. Рассмотрим теперь, с точки зрения величины выхода излучения, практически несколько более интересную задачу о пролете заряженной нити над металлическим цилиндром и системой параллельно расположенных цилиндров. Начнем со случая одного цилиндра радиуса a , расположенного вдоль оси z . Заряженная нить с линейной плотностью заряда q также параллельна оси z и движется вдоль оси x с постоянной скоростью $v \ll c$ в плоскости, отстоящей на расстоянии l от оси цилиндра.

Опять используя метод изображений найдем, что поле вне цилиндра создается зарядом нити и зарядами двух нитей-изображений $q_1 = -q_2 = -q$, причем, нить с линейной плотностью заряда q_2 расположена на оси цилиндра, нить с постоянным во времени зарядом q_1 находится на прямой, соединяющей центр цилиндра с движущейся прямолинейно нитью q , а нить q_1 находится на расстоянии $a^2/(l^2 + v^2 t^2)^{1/2}$ от оси цилиндра, и при пролете нити q из $-\infty$ в $+\infty$ нить-изображение q_1 описывает цилиндр диаметра a^2/l , проходящий через ось. Поле излучения создается нитью q_1 и вектор потенциал поля определяется формулой [2]

$$\vec{A}(x, y, t) = 2 \int_{-\infty}^t \left[\iint_{\rho=c(t-\tau)} \frac{\vec{j}(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta}{V c^2 (t-\tau)^2 - \rho^2} \right] d\tau, \quad (3.1)$$

где $\rho = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}$, $\vec{j} = q_1 \vec{v} \delta(\zeta - \zeta_0(t)) \delta(\eta - \eta_0(t))$,

$$\zeta_0(t) = \frac{a^2 v t}{l^2 + v^2 t^2}, \quad \eta_0(t) = \frac{a^2 l}{l^2 + v^2 t^2},$$

$$v_x = \frac{\dot{\zeta}_0}{v}, \quad v_y = \frac{\dot{\eta}_0}{v}$$

Для дальнейшего удобно ввести $v_{\pm} = v_x \pm i v_y$ и соответственно $A_{\pm} = A_x \pm i A_y$. Поскольку мы ищем поле излучения на больших (по сравнению с радиусом a цилиндра) расстояниях, и, кроме того, $v \ll c$, можно ρ приближенно заменить на $\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тогда

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= 2q_1 a^2 v \int_{-\infty}^{t-\rho_0/c} \frac{d\tau}{V c^2 (t-\tau)^2 - \rho_0^2} \frac{1}{(l \pm i v \tau)^2} = \\ &= \frac{2q_1 a^2 v}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau'}{V \tau'^2 - \rho_0^2} \cdot \frac{1}{\left[l \pm i v t \mp i \frac{v}{c} \tau' \right]^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для фурье-компоненты потенциала имеем

$$A_{\pm}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} A_{\pm}(t) dt.$$

Выполнив интегрирование по частям и перейдя в плоскость комплексного переменного t (в которой контур интегрирования замыкается большой полуокружностью, расположенной в верхней полуплоскости при $\omega > 0$ и в нижней — при $\omega < 0$), получим

$$\begin{aligned} A_{\pm}(\omega) &= \frac{2q_1 a^2 \omega}{c v} e^{-\frac{i\omega}{v} \rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau' e^{\frac{i\omega}{c} \tau'}}{V \tau'^2 - \rho_0^2} = \\ &= -\frac{4iq_1 a^2 \omega}{c v \pi} e^{-\frac{i\omega}{v} \rho_0} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} \rho_0\right), \quad \omega > 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$A_{\pm}(\omega) = 0, \quad \omega > 0; \quad A_{\pm}(\omega) = 0, \quad \omega < 0,$$

$$A_{\pm}(\omega) = -\frac{4iq_1 a^2 |\omega|}{c v \pi} e^{\frac{i\omega}{v} \rho_0} H_0^{(2)}\left(\frac{|\omega|}{c} \rho_0\right), \quad \omega < 0.$$

Учитывая, что $\rho_0 \gg \lambda = \frac{c}{\omega}$, используем асимптотические разложения функций Ганкеля и для фурье-компоненты магнитного поля $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ получим

$$H_z(\omega) = -\frac{2iq_0 a^2 \omega^2}{\pi v c^2} \int_0^{2\pi} \frac{2c}{\pi |\omega| \rho_0} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{r}{\rho_0} + \frac{\pi}{4} - \epsilon\right)\right)} d\varphi, \quad (3.4)$$

$$H_z(\omega) = H^*(-\omega),$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$ — азимутальный угол полярной системы координат. Тогда для излучения с единицы длины нити за все время пролета будем иметь

$$dE_{\text{изл}} = c |H_z|^2 \rho_0 d\varphi d\omega = \frac{8q_0^2 a^4 \omega^3}{\pi^2 c^2 v^2} e^{-\frac{2\omega}{v}} d\varphi d\omega. \quad (3.5)$$

Из (3.5) видно, что излучение изотропно, максимум излучения приходится на частоту $\omega_{\text{max}} = \frac{3}{2} v/l$, спектр экспоненциально обрывается при $\omega \gg v/l$.

Полная энергия излучения с единицы длины нити

$$E = \frac{16}{\pi^2} q_0^2 \epsilon^2 \left(\frac{a}{l}\right)^4 \approx 1,6 q_0^2 \epsilon^2 \left(\frac{a}{l}\right)^4. \quad (3.6)$$

Из сравнения формул (1.4) и (3.6) видно, что в случае пролета нити над цилиндром несколько менее сильно выражена зависимость от отношения $\frac{a}{l}$ и ϵ . Очевидно, что поскольку линейную плотность заряда можно сделать заметной, в данном случае возможно получить сравнительно большее излучение.

4. Пусть теперь заряженная нить пролетает над системой из m параллельных металлических цилиндров. Оси соседних цилиндров отстоят на r , радиус каждого a и нить, расположенная параллельно осям цилиндров, движется со скоростью $v \ll c$.

Поле, созданное изображением нити в k -ом цилиндре на больших расстояниях от системы будет иметь вид

$$H_z^{(k)}(\omega, \rho_0, y) = H_z c \frac{(ik - 1)e^{-y}}{v} (1 - \delta_{km}), \quad (4.0)$$

где H_z , в пренебрежении, как и ранее, изображениями изображений, определено формулой (3.4), а дополнительная фаза обусловлена сдвигом времени $t \rightarrow t - \frac{(k-1)r}{v}$ и другим расстоянием от k -го шара до точки наблюдения $\rho_0^k \approx \rho_0 - r(k-1)\cos\theta$, где θ — угол между направлением излучения и направлением движения нити. Суммируя поля от от-

дельных цилиндров и найдя общую энергию излучения, получим

$$dE_{\text{изл}}^{(m)} = dE_{\text{изл}} \left[m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \cos \left[\frac{k\omega r}{2v} (1 - \beta \cos \Theta) \right] \right] \quad (4.1)$$

или

$$dE_{\text{изл}}^{(m)} = dE_{\text{изл}} \frac{\sin^2 \frac{m\omega r}{2v} (1 - \beta \cos \Theta)}{\sin^2 \frac{\omega r}{2v} (1 - \beta \cos \Theta)} \quad (4.1')$$

Здесь $dE_{\text{изл}}$ — излучение одного цилиндра, определяемое формулой (3.5). Сравнивая (4.1), (4.1)' с (2.2) и (2.3) мы видим, что эффект интерференции от m периодически повторяющихся объектов в обоих случаях описывается одним и тем же фактором (2.4). Поскольку при получении (2.4) было использовано только условие $\rho_0(R_0) \gg mr$, этот фактор не изменится и в релятивистском случае, когда использованный метод изображений не применим. Ясно также, что этот фактор не зависит от формы металлических объектов периодической структуры.

Заметим, что изложенным выше способом можно просто решать задачи об излучении, возникающем при пролете заряженной частицы над произвольной периодической структурой*. Вся трудность задачи сводится, тем самым, к определению поля излучения от одного элемента структуры. Излучение от m элементов получится тогда путем умножения энергии излучения от одного элемента структуры на фактор типа (2.4), возникающий за счет разности фаз полей излучения, созданного разными элементами структуры. Разность фаз, в свою очередь, как было видно из приведенных выше примеров, определена разностью времен пролета частицы над соседними элементами структуры и разностью оптических путей от этих элементов до точки наблюдения.

Остановимся теперь более детально на роли фактора (2.4) в рассмотренных выше двух случаях.

а) Пусть общая длина системы mr мала, точнее, пусть

$$\frac{m\omega r}{2v} (1 - \beta \cos \Theta) \ll 1, \quad \text{или} \quad mr \ll \frac{\lambda \beta}{1 - \beta \cos \Theta} \quad (4.2)$$

Тогда излучение от m шаров (или цилиндров) будет в m^2 раз больше излучения от одного элемента.

б) Фактор (2.4) будет иметь главные максимумы, пропорциональные m^2 и ширину $\sim 1/m$ при

$$\frac{\omega r}{2v} (1 - \beta \cos \Theta) = \pi k \quad (4.3)$$

При заданном угле излучения Θ условие на λ будет иметь вид

* Пролет через периодическую структуру таким же способом рассмотрен Г. М. Гарибяном (частное сообщение).

$$\lambda = \frac{r}{k} \left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta \right). \quad (4.3')$$

[Например, полезно выбрать λ , соответствующий максимуму в спектрах (1.8) или (3.5)].

При заданной λ максимумы излучения будут наблюдаться под углами

$$\cos\theta = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{k\lambda}{r} \right). \quad (4.4)$$

Это условие имеет простой физический смысл [3,4]. Из (4.4) следует, в частности, что

$$\left| \frac{1}{\beta} - \frac{k\lambda}{r} \right| \leq 1. \quad (4.4')$$

При заданных β и λ/r , (4.4') есть условие на порядок максимума k .

Поскольку $\beta < 1$, k может принимать только положительные целые значения.

Нетрудно видеть, например, что при $r \sim \lambda$ и $\beta \approx 1/3$ имеет место только несколько первых максимумов.

в) Наконец, рассмотрим случай, когда r очень велико

$$\frac{\omega r}{2v} (1 - \beta \cos\theta) \gg 1.$$

Тогда из формулы (2.2) и (4.1) следует, что энергия излучения от m объектов есть m раза излучения одного объекта.

В заключение авторы благодарят Г. М. Гарибяна за полезные обсуждения.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 27 VI 1961

Ս. Ն. Սահակյան, Ս. Կ. Հովհաննիսյան

ՄԵՏԱՂԵ ԳՆԴԵՐԻ ԿԱՄ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՍԻՍԵՄԻ ՎՐԱՅՈՎ ԼԻՑԷԱԿԻՐ ՍԱՍՆԻԿՆԵՐ ԱՆՑՆԵԼԻՍ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ՃԱՌԱԳԱՅՔՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ստացված է մետաղն զնդի վրայով անցնող շ հաստատուն լիցքով մասնիկի և մետաղի գլանի վրայով անցնող զծային շ հաստատուն խառվածք լիցքավորված լարի ճառագայթած էներգիաների սպեկտրալ կազմն այն դեպքում, երբ մասնիկը կամ լարը շարժվում են հաստատուն շ ոչ-սելեկտիվությամբ և լ նշանաձգային հեռավորության վրա:

Առավելագույն ճառագայթումն ստացվում է $\omega \sim v/l$ հաճախությամբ, որպիսին և սպասվում էր ֆիզիկական նկատառումներից: Գլանի համար ճառագայթումն իզոտրոպ է բևեռային անկյան նկատմամբ:

Օգտվելով մի դնդի կամ զլանի ճառագայթման բանաձևերից, ստանում ենք միանման m դնդերի կամ զլանների զեպրում առաջացած ճառագայթման արտահայտությունները:

Պարբերական ստրուկտուրաների վրայով լիցքակիր անցնելիս առաջացած ճառագայթման ինտերֆերենցիոն էֆեկտների նկարագրող այս բանաձևերն ստացված են առանց $v \ll c$ պայմանի օգտագործման և ունեն ընդհանուր բնույթ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аскарян Г. А. Об излучении ускоренно движущегося электрического изображения равномерно движущегося заряда. ЖЭТФ, **29**, 388, 1955.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II, ГИИТ, М., 1951.
3. Smith S. J. and Purcell E. M. Visible light from localized surface charges moving across a grating. Phys. Rev., **92**, 1069, 1955.
4. Амацуки А. Ц. и Корхмазян Н. А. Излучение заряженной частицы в среде с периодически меняющейся плотностью. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 5, 1960.