

ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдасян

Плоская и осесимметричная задача для давления

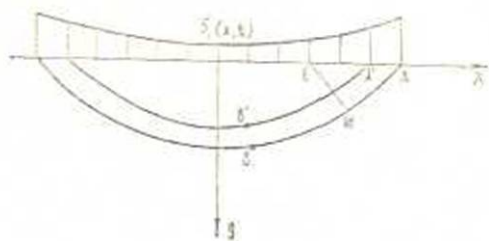
Рассмотрим плоскую задачу для проникания давления в сжимаемую идеальную жидкость. Уравнение политропы для жидкости имеет вид

$$P = B \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^n - 1 \right] \quad (1)$$

где  $P$  — давление,  $p$  — плотность,  $B$ ,  $n$  — постоянные.

Обозначим через  $O$  точку возникновения давления на границе. Выберем ось  $Ox$  в плоскости поверхности жидкости, ось  $Oy$  направим вниз (фиг. 1). Уравнения движения и неразрывности запишутся так [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{dP}{dt} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$



Фиг. 1.

где  $u$  и  $v$  — составляющие скорости по  $Ox$  и  $Oy$ ,  $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость звука,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ .

На границе жидкости имеется граничное условие

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} \bar{P}_1(x, t) & x < R(t), \\ 0 & x > R(t), \end{cases} \quad (3)$$

$x = R(t)$  — радиус фронта давления на поверхности.

Пусть скорость фронта давления сверхзвуковая  $R'(t) > c$ . Найдем ударную волну, идущую в жидкости, предполагая, что она настолько слаба, что не влияет на течение за ней. Будем рассматривать взаимодействие волн разряжения, идущих от границы с ударным фронтом. В качестве волн разряжения возьмем характеристические поверхности первого семейства, догоняющие ударный фронт. Урав-

нение характеристик первого семейства  $y(x, t)$  можно найти обычным способом.

Обозначим через  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  и  $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$  дифференцирование в характеристической поверхности, причем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}}; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial t}}. \quad (4)$$

Для скоростей  $u$  и  $v$  имеем также уравнения (4), где вместо  $P$  нужно подставить  $u$ ,  $v$ .

Подставив (4) в (2) и записав условие неоднозначности решения, получим уравнение характеристики [1]

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial t} \cos \alpha = c + V, \quad (5)$$

где  $y = y(x, t)$  — уравнение характеристики,  $V$  — скорость жидкости, причем в (5) сделано предположение, о нормальности скоростей частиц к характеристике, что выполняется для волн, догоняющих фронт.

Условие совместности на характеристике имеет вид

$$(c \sin \alpha + u) \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + (c \cos \alpha + v) \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \rho c (u \sin \alpha + c) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho c u \cos \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho c v \sin \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \rho c (v \cos \alpha + c) \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \quad (6)$$

Для давлений до  $1000 \text{ кг/см}^2$  величина  $\frac{P}{Bn}$  будет мала. Например, для воды  $\frac{P}{Bn} = 0,05$ .

Будем искать решение (5) и (6) в виде

$$P = P_1 + \frac{1}{Bn} P_2, \quad y = y_1 + \frac{1}{Bn} y_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \frac{1}{Bn} \alpha_2, \quad (7)$$

$$c = a_0 \left(1 + \frac{1}{Bn} P_1\right), \quad dV = \frac{dP}{\rho c},$$

причем последние два уравнения в (7) следуют из (1) и условий на ударном фронте. Если подставить (7) в (5) и (6) и ограничиться малыми первого порядка, легко найти

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} \cos \alpha_1 = a_0, \quad 2 \frac{dP_1}{dt} + \frac{P_1}{a_0} \frac{d\alpha_1}{ds} = 0, \quad (8)$$

где  $\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) a_0 \sin \alpha_1 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) a_0 \cos \alpha_1$ ,  $\frac{d\alpha_1}{ds}$  — кривизна характеристики.

Решение (8) дает конечный результат для линейной задачи

$$\begin{aligned}x - R(t_0) &= a_0(t - t_0) \sin \alpha_1(t_0), \\y &= a_0(t - t_0) \cos \alpha_1(t_0),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\rho = \tilde{P}_1(R, t_0) \frac{\sqrt{-\frac{r(t_0)}{a_0}}}{\sqrt{t - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}} = \frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t - t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}}, \quad (10)$$

где  $R(t_0) = x$  — координата точки  $E$  границы в момент  $t_0$  прохождения через нее фронта волны [2],  $r(t_0)$  — радиус кривизны фронта в момент  $t_0$ .

Для решения, соответствующего не самому фронту  $AB$  (фиг. 1), а произвольной характеристике  $A'B'$ , граничное условие для (8) ставится в точке  $x = \lambda R(t')$  в момент  $t' = t_0 + t'_0$ ,  $\lambda \ll 1$ . Тогда вместо (9) и (10) легко получить уравнение кривой  $A'B'$  (фиг. 1)

$$\begin{aligned}x - \lambda R(t'_0 + t_0) &= a_0(t - t_0 - t'_0) \sin \alpha_1(t_0 + t'_0), \\y_1 &= a_0(t - t_0 - t'_0) \cos \alpha_1(t_0 + t'_0)\end{aligned}\quad (11)$$

и решение на характеристиках

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{A_0(t_0 + t'_0)}{\sqrt{t - t_0 - t'_0 + \frac{r(t_0 + t'_0)}{a_0}}} = \tilde{P}_1(R, t_0 + t'_0) \times \\&\times \frac{\sqrt{-\frac{r(t_0 + t'_0)}{a_0}}}{\sqrt{t - t_0 - t'_0 + \frac{r(t_0 + t'_0)}{a_0}}},\end{aligned}\quad (12)$$

где постоянная

$$A_0(t_0) = \tilde{P}_1(R, t_0) \sqrt{-\frac{r(t_0)}{a_0}}. \quad (13)$$

При определении  $y_2$  следует в (5) приравнять члены второго порядка

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} + a_0 \sin \alpha_1(t_0) \frac{\partial y_2}{\partial x} = a_0 \frac{n+1}{2} \frac{\rho_1}{\cos \alpha_1(t_0)}. \quad (14)$$

В уравнении (14) перейдем к переменным  $t_0, t$  с помощью первого уравнения (9). Нетрудно видеть, что

$$\left. \frac{\partial y_2}{\partial t} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial y_2}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|_x a_0 \sin \alpha_1(t_0).$$

Тогда получим

$$\left. \frac{dy_2}{dt} \right|_{t_0} = a_0 \frac{n+1}{2} \frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0} \cos \alpha_1(t_0)}} \frac{1}{\cos \alpha_1(t_0)}$$

Решение последнего уравнения представляется в виде

$$y_2 = a_0 \frac{n+1}{2} \frac{A_0(t_0)}{\cos \alpha_1(t_0)} 2 \sqrt{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}} - \\ - a_0 \frac{n+1}{2} \frac{A_0(t_0)}{\cos \alpha_1(t_0)} 2 \sqrt{t'-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}, \quad (15)$$

где для определения  $t'$  из граничного условия и (9) будем иметь

$$R(t') - R(t_0) = a_0(t' - t_0) \sin \alpha_1(t_0).$$

Уравнение (15) показывает, что движение характеристик определится по линейным лучам, как и в случае коротких волн [2].

В нашем приближении  $t' = t_0$ . Для определения закона движения ударной волны запишем формулу для ее скорости [3]

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = a_0 \left(1 + \frac{n+1}{4} \frac{\rho_1}{Bn}\right). \quad (16)$$

Рассмотрим (11) и (9). В силу малости  $\frac{\rho}{Bn}$  характеристики, обгоняющие фронт, отстают от него на расстояние порядка  $\frac{\rho_1}{Bn}$ . Поэтому  $t'_0$  и  $\lambda' = 1 - \lambda$  малы.

Разлагая (11) по степеням этих параметров, в силу (9) имеем

$$t'_0 = \frac{\lambda' R(t_0)}{-a_0 \sin \alpha_1(t_0) + a_0(t-t_0) \cos \alpha_1(t_0) \frac{\partial \alpha_1(t_0)}{\partial t_0} + R'(t_0)} \quad (17)$$

и

$$y_1 = a_0(t-t_0) \cos \alpha_1(t_0) - \\ - \frac{a_0(t-t_0) \sin \alpha_1(t_0) \frac{\partial \alpha_1(t_0)}{\partial t_0} + a_0 \cos \alpha_1(t_0) - \lambda' R(t_0)}{R'(t_0) + a_0(t-t_0) \cos \alpha_1(t_0) \frac{\partial \alpha_1(t_0)}{\partial t_0} - a_0 \sin \alpha_1(t_0)}. \quad (18)$$

Вспомнив, что  $y = y_1 + \frac{1}{Bn} y_2$ , подставив (18) и (15) в (16) и оставив только малые первого порядка, получим уравнение для  $\lambda'$  вдоль фронта



$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial t} \frac{a_0(t-t_0) \sin \alpha_1(t_0) \frac{\partial z_1(t_0)}{\partial t_0} + a_0 \cos \alpha_1(t_0)}{R'(t_0) + a_0(t-t_0) \cos \alpha_1(t_0) \frac{\partial z_1(t_0)}{\partial t_0} - a_0 \sin \alpha_1(t_0)} R(t_0) \Big|_{t_0} - \\
& - \frac{a_0(t-t_0) \sin \alpha_1(t_0) \frac{\partial z_1(t_0)}{\partial t_0} - a_0 \cos \alpha_1(t_0)}{R'(t_0) + a_0(t-t_0) \cos \alpha_1(t_0) \frac{\partial z_1(t_0)}{\partial t_0} - a_0 \sin \alpha_1(t_0)} R(t_0) \frac{\partial R}{\partial t_0} \Big|_{t_0} = \\
& = -a_0 \frac{n+1}{4} \frac{P_1}{Bn} \frac{1}{\cos \alpha_1(t_0)}.
\end{aligned}$$

Решение полученного уравнения при условии  $\lambda' = 0$ ,  $x = R(t)$  запишется в виде

$$\begin{aligned}
\lambda' = & +a_0 \frac{n+1}{4} \frac{1}{\cos \alpha_1(t_0)} \frac{1}{Bn} A_0(t_0) \times \\
& \times 2 \left[ \sqrt{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}} - \sqrt{t'-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}} \right] \times \\
& \times \frac{R'(t_0) + a_0(t-t_0) \cos \alpha_1(t_0) \frac{\partial z_1(t_0)}{\partial t_0} - a_0 \sin \alpha_1(t_0)}{a_0(t-t_0) \sin \alpha_1(t_0) \frac{\partial z_1(t_0)}{\partial t_0} + a_0 \cos \alpha_1(t_0)} \quad (19)
\end{aligned}$$

Если подставить  $\lambda'$  из (19) в (18), получим уравнение ударного фронта.

Из формулы (12), отбросив малые второго порядка, получим

$$P_1 = \frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}} + \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{A_0(t_0)}{\sqrt{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}} t_0,$$

где  $t_0$  определяется с помощью (19) и (17).

Для определения давления на ударной волне нужно еще записать условие на характеристике (6) с точностью до малых второго порядка. Имеем

$$2 \frac{dP_2}{dt} + \frac{1}{\sqrt{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}}} P_2 + \psi(x, t) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) = & P_1 a_0 \frac{n+1}{2} \sin \alpha_1 \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + a_0 \cos \alpha_1 \cdot z_2 \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + \\
& + P_1 a_0 \frac{n+1}{2} \cos \alpha_1 \left( \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) - a_0 z_2 \sin \alpha_1 \left( \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) + a_0 P_1^2 \frac{n+1}{2} \left( \frac{\partial \sin \alpha_1}{\partial x} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_0 P_1^2 \frac{n+1}{2} \left( \frac{\partial \cos z_1}{\partial y} \right) + a_0 P_1^2 \left( \frac{\partial \sin z_1}{\partial x} \right) - a_0 P_1 \sin z_1 \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + \\
& + \left( P_1 a_0 \sin^2 z_1 + \frac{n-1}{2} P_1 a_0 \right) \left( \frac{\partial P_1 \sin z_1}{\partial x} \right) - P_1 a_0 \sin z_1 \cos z_1 \times \\
& \times \left( \frac{\partial P_1 \sin z_1}{\partial y} \right) + P_1 a_0 \sin z_1 \cos z_1 \left( \frac{\partial P_1 \cos z_1}{\partial x} \right) + \\
& = P_1 a_0 \left( \cos^2 z_1 + \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{\partial P_1 \cos z_1}{\partial y} \right),
\end{aligned}$$

$$z_2 = -\cos^2 z_1 \frac{\partial y_2}{\partial x},$$

а производные вычисляются в характеристике.

Теперь можно записать на ударной волне

$$P = P_1 + \frac{1}{Ba} P_2,$$

причем

$$P_2 = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x, t) \right) \sqrt{t-t_0 + \frac{r(t_0)}{a_0}} dt.$$

В случае осевой симметрии решение линейной задачи (9), (10) содержит еще множитель  $\frac{1}{r}$  и вычисления сильно усложнятся.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 4 I 1961

#### Յ. Գ. Բազդոնկ

### ՀԱՐՔ ԵՎ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐ՝ ՃՆՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունը մեզ դիտարկված էն սեղմելի հեղուկում ճնշման տարածման հարթ և տանցքաձևերիկ խնդիրը ևարակտերիստիկ համասարման մոտավոր լուծումները օդադործված էն հարվածող ալիքները կատակելու համար: Նախորդ աշխատություններում ալա խնդիրը մեր կողմից լուծված էր մոտավոր դեպքում:

Ստացված լուծումը ճշտում է դժարին մոտավորությունը և բավարար չափով նիշտ է նաև մեծ ճնշումների համար:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочин Н. Е., Кибель и Розе. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, М., 1948.
2. Багдоев А. Г. Определение давления на ударной волне. Вестник МГУ, № 3, 1960.
3. Станюкович К. П. Неустойчивые движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1954.