ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. Бабаджанян, С. Н. Цатурян

Определение закона изменения расхода газа вдоль длинного газопровода при нестационарном режиме работы

§ 1. Дифференциальные уравнения движения. Начальные и граничные условия

Нестационарное, одномерное, изотермическое движение газа в длинном газопроводе описывается следующей системой уравнений [1]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda u^2}{2D},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}, \tag{1.1}$$

$$p = gRT\rho,$$

где p, u и ρ—средние значения по сечению давления, скорости и плотности газа в газопроводе, λ—безразмерный коэффициент сопротивления, D—диаметр трубы, g—ускорение силы тяжести, R—газовая постоянная, T—абсолютная температура газа, x—координата, отсчитываемая вдоль газопровода, t—время.

Уравнения системы (1.1) являются, соответственно, уравнениями движения, неразрывности и состояния.

Секундный расход газа по сечению трубы обозначим через $G(x, t)$, тогда

$$G(x, t) = gs\rho u, \tag{1.2}$$

где s—площадь поперечного сечения газопровода. Имея в виду выражение (1.2) и уравнение состояния, систему (1.1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -aG^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -b\frac{\partial G}{\partial x}, \tag{1.3}$$

где

$$P(x, t) = p^2(x, t),$$

$$a = \frac{RT\lambda}{Dgs^2}, \quad b = \frac{2pRT}{s}.$$

Точное интегрирование системы (1.3) при переменном b невозможно, поэтому в выражении b значение давления заменим его средним значением при стационарном режиме согласно следующей формуле [2]

$$(p_0)_{\text{ср.}} = \frac{2}{3}\left(p_{\text{н}} + \frac{p_k^2}{p_{\text{н}} + p_{\text{к}}}\right). \tag{1.4}$$

где $p_{\text{н}}$ — давление в начале трубы,

$p_{\text{к}}$ — давление в конце трубы.

Принимая b постоянным, перекрестным дифференцированием из системы (1.3) получим следующее уравнение

$$AG\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \tag{1.5}$$

где

$$A = \frac{\lambda}{D(p_0)_{\text{ср.}} gs}.$$

Принимаем следующие начальные и граничные условия:

$$\text{при}\quad t=0,\quad G(x, t) = G_0 = \text{const.},$$

$$\text{при}\quad x=0,\quad G(x, t) = G_0,$$

$$\text{при}\quad x=l,\quad G(x, t) = G_0 + f(t),$$

где G_0—расход газа при стационарном режиме,

l—длина газопровода.

Здесь $f(t)$ заданная функция (обращающаяся в нуль при $t \leqslant 0$), которая показывает закон изменения расхода в конце трубопровода.

§ 2. Решение уравнения (1.5)

Решение уравнения при указанных начальных и граничных условиях ищем в виде

$$G(x, t) = G_0 + G'(x, t). \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$AG_0\frac{\partial G'}{\partial t} = \frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} - AG'\frac{\partial G'}{\partial t}, \tag{2.2}$$

для которого начальными и граничными условиями будут

$$\text{при}\quad t=0,\quad G'(x, t) = 0,$$

$$\text{при}\quad x=0,\quad G'(x, t) = 0,$$

$$\text{при}\quad x=l,\quad G'(x, t) = f(t).$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$G' = G_0 G'^*$$

$$x = lx^*,$$

$$t = t_0 t^*,$$

где, G_0, l, t_0—характерные расход, длина и время. Здесь за характерный расход принят расход газа при стационарном режиме, за характерную длину—длина трубопровода, а для характерного времени из уравнения (2.2) получим

$$t_0 = l^2 A G_0. \tag{2.3}$$

После перехода к безразмерным величинам уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial G'}{\partial t} = \frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} - G' \frac{\partial G'}{\partial t}, \tag{2.4}$$

где для простоты записи звездочки опущены.

Начальными и граничными условиями будут

$$\text{при} \quad t = 0, \quad G'(x, t) = 0,$$

$$\text{при} \quad x = 0, \quad G'(x, t) = 0,$$

$$\text{при} \quad x = 1, \quad G'(x, t) = f(t).$$

Для решения уравнения (2.4) удобно ввести новую переменную

$$y = \frac{1-x}{x}.$$

Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 G'}{\partial y^2} - \frac{\partial G'}{\partial t} = G' \frac{\partial G'}{\partial t} - \frac{\partial^2 G'}{\partial y^2} \sum_{k=1}^{4} C_4^k y^k - 2 \frac{\partial G'}{\partial y} \sum_{k=0}^{3} C_3^k y^k, \tag{2.5}$$

а начальные и граничные условия в новых переменных запишутся в виде

$$\text{при} \quad t = 0, \quad G'(y, t) = 0,$$

$$\text{при} \quad y = \infty, \quad G'(y, t) = 0,$$

$$\text{при} \quad y = 0, \quad G'(y, t) = f(t).$$

Следуя А. А. Дородницыну, сделаем следующее преобразование координат

$$\zeta = \frac{y}{2\sqrt{t}}, \qquad \sqrt{t} = \tau,$$

и кроме того положим

$$G'(y, t) = t^2 \Phi(y, t) = \tau^4 \psi(\zeta, \tau). \tag{2.6}$$

Тогда уравнение (2.5) приведется к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - 8\psi - 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \tau^4 \left(8\psi + 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - 2\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) -$$

$$- 4 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \tau \sum_{k=0}^{3} 2^k C_3^k \zeta^k \tau^k - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \sum_{k=1}^{4} 2^k C_4^k \zeta^k \tau^k. \tag{2.7}$$

Положим

$$\psi(\zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\zeta)\, \tau^n. \tag{2.8}$$

Подставив (2.8) в (2.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим систему дифференциальных уравнений для определения всех членов ряда (2.8).

Система дифференциальных уравнений имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_n}{\partial \zeta} - 2(n+4)\psi_n = 2\psi_0 \left(n\psi_{n-1} - \zeta \frac{\partial \psi_{n-4}}{\partial \zeta} \right) + \cdots +$$

$$+ 2\psi_{n-1}\left(n\psi_0 - \zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \right) - 4\sum_{k=0}^{3} 2^k C_3^k \zeta^k \frac{\partial \psi_{n-k-1}}{\partial \zeta} - \sum_{k=1}^{4} 2^k C_4^k \zeta^k \frac{\partial^2 \psi_{n-k}}{\partial \zeta^2}, \tag{2.9}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Считаем, что функция $f(t)$ может быть разложена в ряд по степеням t в следующем виде

$$f(t) = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n/2} = \tau^4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n.$$

Граничными условиями для ψ_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ будут

$$\begin{aligned} &\text{при } \zeta = 0, \quad \psi_n = a_n, \\ &\text{при } \zeta = \infty, \quad \psi_n = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \cdots$.

Перейдем к решению системы (2.9).

Задавая n значения 0, 1, 2,..., получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} - 8\psi_0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} - 10\psi_1 = -4\frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} - 8\zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta}. \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta^2} - 12\psi_2 = -4\frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} - 24\zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} - 8\zeta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} - 24\zeta^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \zeta^2}.$$

. . . .

. . . .

Как видно из (2.11), имея решение первого уравнения, можно решить второе уравнение, затем по значениям ψ_0, ψ_1 определяется ψ_2 из третьего уравнения, причем легко заметить, что если известны $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m-1}$ можно определить ψ_m. Из вышеуказанного следует, что для нахождения ψ_n необходимо решить следующее уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\zeta^2}+2\zeta\frac{\partial\psi_n}{\partial\zeta}-2(n+4)\psi_n=\Psi_n(\zeta).$$

Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\zeta^2}+2\zeta\frac{\partial\psi_n}{\partial\zeta}-2(n+4)\psi_n=0.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$\psi_n=c_1L_{n+4}\zeta+c_2P_{n+4}(\zeta)$$

где c_1 и c_2 постоянные интегрирования, а $P_{n+4}(\zeta)$—полином степени $n+4$ [2].

Функции $L_n(\zeta)$ имеют вид [3]

$$L_n(\zeta)=A_n\int\limits_{\infty}^{\zeta}[\int\int\cdots\int e^{-z^2}(dz)^n]\,dz,$$

в частности

$$L_0=A_0\int\limits_{\infty}^{\zeta}e^{-z^2}\,dz,$$

$$L_n(0)=1,\qquad L_n(\infty)=0.$$

Между коэффициентами A_n и функциями L_n существуют следующие соотношения:

$$A_n=2nA_{n-2},\quad A_0=-\frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad A_1=2.$$

$$\zeta L_n(\zeta)=\frac{A_n}{A_{n+1}}(n+1)[L_{n+1}(\zeta)-L_{n-1}(\zeta)],$$

$$L_n^{(k)}(\zeta)=\frac{A_n}{A_{n-k}}L_{n-k}(\zeta),\quad \int\limits_{\infty}^{\zeta}L_n(\zeta)\,d\zeta=\frac{A_n}{A_{n+1}}L_{n+1}(\zeta).$$

Учитывая граничные условия (2.15), для c_1 и c_2 получим

$$c_1=a_n,$$
$$c_2=0.$$

До непосредственного перехода к решениям дифференциальных уравнений системы (2.9) заметим, что для всех нечетных n краевые условия для ψ однородны, т. е. при нечетных n

$$c_1=c_2=0.$$

Решение уравнения (2.9) имеет вид

при $n=0$

$$\psi_0=a_0L_4, \tag{2.12}$$

при $n=1$

$$\psi_1 = -\frac{A_4}{A_2} a_0 (4L_5 - 7L_2 + 3L_1), \tag{2.13}$$

при $n=2$

$$\psi_2 = a_2 L_6 + 4a_0 (25L_6 - 66L_4 + 57L_2 - 16L_0) - 8A_0 a_0 \zeta e^{-\zeta^2}, \tag{2.14}$$

при $n=3$

$$\psi_3 = -a_2 \frac{A_6}{A_5} (6L_7 - 11L_5 + 5L_3) - 8A_0 a_0 (80L_7 - 264L_5 +$$

$$+ 310L_3 - 145L_1 + 19e^{-\zeta^2}) + 16 \frac{A_2}{A_3} a_0 \zeta^2 e^{-\zeta^2} (9 - 2\zeta^2) \tag{2.15}$$

при $n=4$

$$\psi_4 = a_4 L_8 + 4 \frac{A_4 A_2}{A_5 A_3} a_0^2 (L_5 L_3 - L_8) + 6a_2 (49L_8 - 146L_6 + 153L_4 - 64L_2 +$$

$$+ 8L_0) + 100a_0 (49L_8 - 190L_6 + 276L_4 - 178L_2 + 43L_0) +$$

$$+ 4A_2 a_0 \zeta e^{-\zeta^2} (145 - 50\zeta^2) + 16 \frac{A_2}{A_3} a_0 \zeta^3 e^{-\zeta^2} (13 - 2\zeta^2). \tag{2.16}$$

Ограничиваясь значением $n=4$, в силу (2.8) и (2.6) будем иметь

$$G'(x, t) = t_0^2 \psi_0 + t^{5/2} \psi_1 - t^3 \psi_2 + t^{7/2} \psi_3 + t^4 \psi_4.$$

Таким образом, для расхода получаем

$$G(x, t) = G_0 (1 + t^2 \psi_0 + t^{5/2} \psi_1 + t^3 \psi_2 + t^{7/2} \psi_3 + t^4 \psi_4). \tag{2.17}$$

§ 3. Пример расчета

Для примера возьмем следующие данные

$$l = 165 \text{ км}, \qquad D = 0{,}625 \text{ м},$$

$$P_0 = 36 \text{ атм}, \quad R = 50 \frac{\text{м}}{\text{град}}$$

$$P_к = 14 \text{ атм}, \quad g = 9{,}81 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

$$\lambda = 0{,}0119, \qquad T = 280 \text{ град}.$$

Расчет проводим следующим образом.

1. По формуле (2.3) находим характерное время

$$t_0 = 33078,375 \text{ сек}.$$

Причем при вычислении t_0, $(P_0)_{ср}$ вычисляли согласно формуле (1.4), а G_0 — по формуле [3]

$$G_0 = s \sqrt{\frac{(p_0^2 - p_k^2) gD}{lTR\lambda}}.$$

2. Для определения функции $f(t)$, которая, как мы отметили, обусловлена законом изменения расхода в конце трубопровода, поступим следующим образом. Имея график потребления газа, путем

апроксимации, составим уравнение этой кривой. Для города Еревана аналитическое уравнение графика потребления в суточном разрезе в период провала расхода апроксимировано многочленом четвертой степени в виде

$$G(t) = G_0 + G_0 (a_0 t^2 + a_2 t^3 + a_4 t^4), \tag{3.1}$$

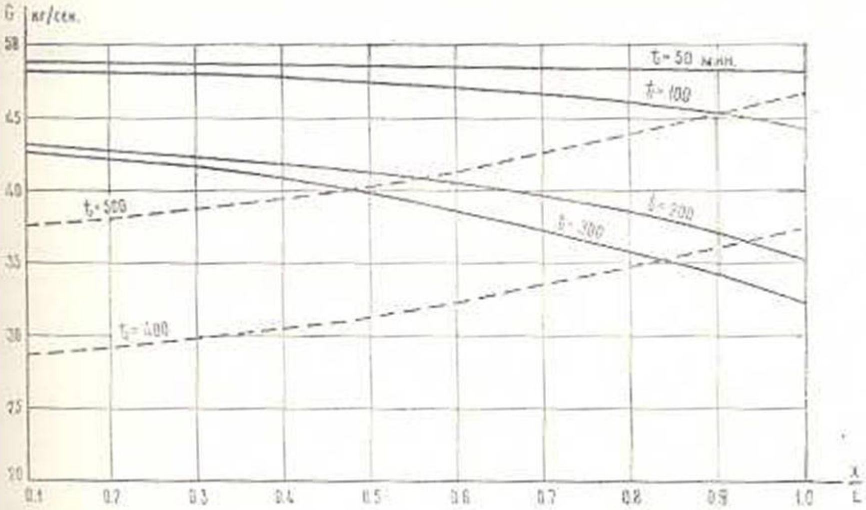
где

$$a_0 = -5{,}28676,$$

$$a_2 = 10{,}14370,$$

$$a_4 = -4{,}85700.$$

3. Имея характерное время, функцию $f(t)$ и протобулированные значения $L_n(\zeta)$ [4], по формулам (2.12)—(2.16) вычислив значения



Фиг. 1.

$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ и подставив их в выражение (2.17), получим закон изменения расхода вдоль газопровода и во времени (фиг. 1).

Институт энергетики и гидравлики
АН Армянской ССР

Поступила 1 XII 1960

Գ. Հ. Բաբաջանյան, Ս. Ի. Ծատուրյան

ՉՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՌԵԺԻՄՈՎ ԱՇԽԱՏՈՂ ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԳԱԶԻ ԵԼՔԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում է երկար գազամուղում գազի չհաստատված շարժումը, որը պայմանավորված է նրա վերջում գազի ելքի ոչ հաստատուն լինելով։

Գազամուղի վերջում տրվում է գազի ելքի փոփոխման օրենքը բազմանդամի տեսքով, որի գործակիցները որոշվում են գազի ելքի փոփոխման օրվա գրաֆիկից։

Խնդրի լուծումը բերվում է ոչ գծային մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը՝ համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմաններում։ Լուծումը տրվում է անվերջ շարքի տեսքով։ Ստացված է նրա բաշխման օրենքը, բավարարվելով շարքի հինգերորդ անդամով։ Հաշված է կոնկրետ օրինակ Ղարադաղ—Երևան գազամուղի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, М—Л, 1951.
2. *Мхитарян А. М.* К теории конвекции большого масштаба. „Известия АН АрмССР, сер. ФМЕТ", **8**, № 1, 1955.
3. *Смирнов А. С., Ширковский А. И.* Добыча и транспорт газа. Гостехиздат, Москва, 1957.
4. *Гутман Л. А.* К вопросу о расчете теплового состояния тел. „Инженерный сборник", **15**, 1953.