ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Кручение анизотропных призматических стержней удлиненного профиля, изготовленных из ортотропного материала

В настоящей статье рассматривается задача о кручении анизотропного (ортотропного) стержня удлиненного профиля (эллипс, трапеция, треугольник и авиационный профиль общего типа), когда главные направления упругости не совпадают с главными осями поперечного сечения стержня. По методу малого параметра получены выражения функций напряжений, жесткости и максимального касательного напряжения.

Исследовано влияние различного расположения главных направлений упругости ортотропного материала на наибольшие напряжения и на жесткость. Показано, при какой их ориентации жесткость будет наибольшей, а напряжения—наименьшими. Иначе говоря, в настоящей работе показано, как нужно изготовить анизотропный стержень из ортотропного материала, чтобы он имел наивыгоднейшие механические свойства (наибольшую жесткость и наименьшее максимальное напряжение), и наоборот, как не следует ориентировать главные направления упругости при изготовлении стержня.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность проф. С. Г. Лехницкому за постановку задачи и ценные указания и академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну за руководство.

§ 1. Постановка и решение задачи

Рассмотрим анизотропный призматический стержень из ортотропного материала, находящийся в равновесии под действием усилий, распределенных по концам и приводящихся к скручивающим моментам M_z.

Направим ось z декартовых координат xyz параллельно оси стержня, а плоскость $z=0$ совместим с закрепленным концом стержня. Предположим, что оси $O\xi$ и $O\eta$ являются главными направлениями упругости (физические оси), а ox и oy—направлениями (геометрические оси), не совпадающими с физическими осями. Здесь система $\xi\eta z$ получена из системы xyz путем поворота вокруг общей оси z на некоторый угол φ.

Тогда уравнения обобщенного закона Гука, отнесенные к системе $\xi\eta z$, будут иметь вид [1]

$$\gamma_{\eta z} = \frac{1}{G_{\eta z}} \cdot \tau_{\eta z}$$

$$\gamma_{\xi z} = \frac{1}{G_{\xi z}} \cdot \tau_{\xi z}, \qquad (1.1)$$

$$\tau_{\xi z} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta},$$

где

$$\tau_{\eta z} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi},$$

а $G_{\xi z}$ и $G_{\eta z}$ — модуль сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям ξoz и ηoz. Для определенности положим $G_{\eta z} = G_{\max}$ и $G_{\xi z} = G_{\min}$, т. е. плоскости ηoz и ξoz соответственно назовем „плоскостью наибольшего модуля сдвига" и „плоскостью наименьшего модуля сдвига", а направления η и ξ — „направлением (осью) наибольшего модуля сдвига" и „направлением (осью) наименьшего модуля сдвига".

Здесь функция напряжений удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{G_{\max}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{G_{\min}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} = -2\theta \qquad (1.2)$$

и условию на контуре поперечного сечения

$$\varphi_0 = 0. \qquad (1.3)$$

Задача усложняется, когда оси $o\xi$ и $o\eta$ не совпадают с осями ox и oy.

В этом случае уравнения обобщенного закона Гука (отнесенные к системе xyz) будут

$$\gamma_{yz} = a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz},$$

$$\gamma_{xz} = a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}. \qquad (1.4)$$

Здесь

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad (1.5)$$

а новые упругие постоянные a_{ij} $(i, j = 4,5)$ определяются так [1]

$$a_{44} = \frac{\cos^2\varphi}{G_{\eta z}} + \frac{\sin^2\varphi}{G_{\xi z}},$$

$$a_{55} = \frac{\sin^2\varphi}{G_{\eta z}} + \frac{\cos^2\varphi}{G_{\xi z}}, \qquad (1.6)$$

$$a_{45}=\left(\frac{1}{G_{\gamma z}}-\frac{1}{G_{\xi z}}\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi.$$

В этом случае функция напряжений $\overline{\varphi}=\theta\cdot\Psi$ удовлетворяет уравнению

$$a_{44}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-2a_{45}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+a_{55}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-2 \tag{1.7}$$

или

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{G_{\gamma z}}+\frac{\sin^2\varphi}{G_{\xi z}}\right)\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\left(\frac{1}{G_{\gamma z}}-\frac{1}{G_{\xi z}}\right)\cdot\sin2\varphi\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+$$

$$+\left(\frac{\sin^2\varphi}{G_{\gamma z}}+\frac{\cos^2\varphi}{G_{\xi z}}\right)\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-2 \tag{1.7'}$$

с граничным условием

$$\Psi=0. \tag{1.8}$$

Решим уравнение (1.7) или (1.7′) при граничном условии (1.8) для удлиненных областей. Для этого воспользуемся результатами, полученными в работах [2,3].

Предположим, что область ограничена двумя дугами кривых

$$y=\lambda\varphi_1(x),$$

$$y=\lambda\varphi_2(x).$$

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений x.

Полагая*

$$y=\lambda\eta,\quad \Psi(x,y)=\Phi(x,\eta;\lambda)\quad(0<\lambda<1)$$

решение уравнения (1.7) представим в виде ряда по степеням малого параметра λ.

$$\Phi(x,\eta;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x,\eta)\cdot\lambda^k.$$

Подставив значение Φ в дифференциальное уравнение (1.7), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему рекуррентных дифференциальных уравнений с частными производными, которая при помощи (1.8) последовательно интегрируется и определяются неизвестные функции $P_k(x,\eta)$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

Следовательно, можно записать выражение для функции напряжения

$$\Psi(x,y)=-\frac{y^2}{a_{55}}+\lambda\cdot\left\{\frac{y\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}{a_{55}}+\frac{a_{45}\cdot y^2\cdot D_x(\varphi_1+\varphi_2)}{a_{55}^2}+\cdots\right\}+$$

$$+\lambda^2\cdot\left\{-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a_{55}}-\frac{a_{45}\cdot y\cdot(\varphi_1+\varphi_2)\cdot D_x(\varphi_1+\varphi_2)}{a_{55}^2}+\cdots\right\}+\cdots. \tag{1.9}$$

*Здесь и в дальнейшем приняты обозначения [2,3].

Таким образом, имея функцию напряжений, касательные напряжения можно определить по формуле (1.5), а жесткость стержня находим при помощи формулы [1]

$$T = 2 \cdot \iint \Psi \, dx dy. \tag{1.10}$$

Итак, из (1.5)—(1.10) видно, что касательные напряжения и жесткость кручения ортотропного стержня будут зависеть от геометрических параметров профиля (высоты и длины) и от модулей сдвигов (G_{max} и G_{min}). Жесткость и касательные напряжения при кручении ортотропного стержня будут также зависеть от направлений главных осей анизотропии, т. е. от угла φ.

Рассмотрим кручение анизотропного призматического стержня из ортотропного материала для ряда профилей.

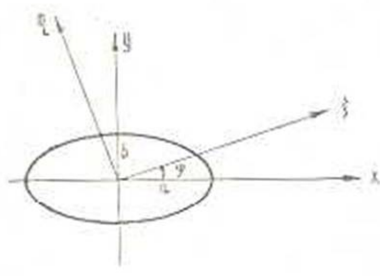
§ 2. Конкретные задачи

а) *Стержень эллиптического сечения.* Пусть контур поперечного сечения (фиг. 1) задан уравнением

$$y = \pm \lambda f(x), \tag{2.1}$$

где

$$f^2(x) = a^2 - x^2, \quad 0 < \lambda = \frac{b}{a} < 1.$$



Фиг. 1.

Подставив значение $f(x)$ из (2.1) в (1.9) и (1.5), выполнив ряд несложных действий, как это сделано в работах [2,3], для функции напряжений и для максимального касательного напряжения окончательно получим следующие выражения

$$\Psi = \frac{\lambda^2 (a^2 - x^2) - y^2}{a_{55} + \lambda^2 a_{44}}, \tag{2.2}$$

$$|\tau_{xz}|^{max} = \left| \tau_{xz} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=a}} \right| = \frac{2M_t}{\pi a b^2}. \tag{2.2'}$$

Из формулы (2.2′) видно, что наибольшее напряжение не зависит от упругих постоянных и имеет такой же вид, как и в соответствущем изотропном стержне [1,4—5].

При помощи (2.2) и (1.10) получим

$$T(\varphi) = \frac{2\pi a^4 \lambda^3 G_{\xi z}}{(1 + \lambda^2)(1 + G^*) + (1 - \lambda^2)(1 - G^*) \cos 2\varphi}, \tag{2.3}$$

где

$$G^* = \frac{G_{min}}{G_{max}} = \frac{G_{\xi z}}{G_{\eta z}} < 1. \tag{2.3'}$$

В частном случае, когда физические оси совпадают с геометрическими осями ($\varphi = 0$), будем иметь

$$T(0) = \frac{\pi a^4 \lambda^3 G_{\eta z} G_{\xi z}}{G_{\xi z} \lambda^2 + G_{\eta z}} . \tag{2.4}$$

Обозначим

$$C_1(\varphi) = \frac{T(\varphi)}{T(0)} .$$

Тогда при помощи (2.3) и (2.4) можно написать

$$C_1(\varphi) = \frac{2(1 + \lambda^2 G^*)}{(1 + \lambda^2)(1 + G^*) + (1 - \lambda^2)(1 - G^*)\cos 2\varphi}$$

или

$$C_1(\varphi) = \frac{A}{1 + B\cos 2\varphi} . \tag{2.5}$$

Здесь $$A = \frac{2(1 + \lambda^2 G^*)}{(1 + \lambda^2)(1 + G^*)}, \qquad B = \frac{(1 - \lambda^2)(1 - G^*)}{(1 + \lambda^2)(1 - G^*)} . \tag{2.6}$$

Как видно из (2.5) и (2.6), $C_1(\varphi)$—периодическая функция с периодом π, а для величин A и B имеют место следующие условия

$$0 < A < 2, \qquad B < 1. \tag{2.7}$$

Так как имеют место условия (2.7), то могут быть два случая существования экстремальных значений: $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим их несколько подробнее.

Для этого составим

$$\frac{d^2 C_1(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{4AB}{(1 + B\cos 2\varphi)^3} \cdot [\cos 2\varphi + B(1 + \sin^2 2\varphi)]. \tag{2.8}$$

В первом случае, когда $\varphi = 0$, при помощи (2.6)—(2.8) и (2.3′) легко убедимся, что выражение $C_1(\varphi)$ принимает минимальное значение. Тогда для рассматриваемого стержня минимальная жесткость кручения будет иметь вид

$$T_{\min} = T(0) = \frac{\pi a^4 \lambda^3 G_{\min}}{1 + G^* \lambda^2} . \tag{2.9}$$

Во втором случае, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, используя опять (2.5)—(2.8) и (2.3′), нетрудно убедиться, что выражение $C_1(\varphi)$ принимает максимальное значение.

Тогда

$$T_{\max} = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a^4 \lambda^3 G_{\min}}{G^* + \lambda^2} . \tag{2.10}$$

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать следующие практически важные выводы:

1) Если хотим изготовить анизотропный стержень эллиптического сечения из ортотропного материала так, чтобы он имел наибольшую жесткость (выгодный случай), то необходимо, чтобы плоскость наибольшего модуля сдвига совпала с главной плоскостью стержня, проходящей через наибольший диаметр сечения.

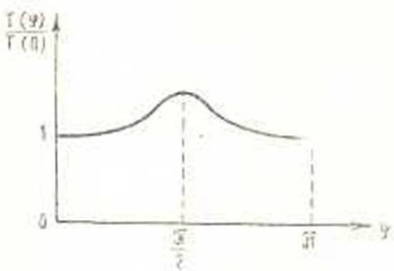
Иначе говоря, ось наибольшего модуля сдвига должна совпасть с наибольшим диаметром сечения (наибольшей осью).

2) Если хотим изготовить анизотропный стержень эллиптического сечения из ортотропного материала так, чтобы он имел наименьшую жесткость (невыгодный случай), то необходимо, чтобы плоскость наибольшего модуля сдвига была нормальна к главной плоскости стержня, проходящей через наибольший диаметр сечения.

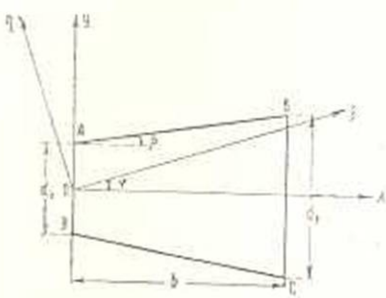
Иначе говоря, ось наибольшего модуля сдвига должна быть нормальна к наибольшему диаметру сечения (наибольшей оси).

Ниже приведен график (фиг. 2), построенный согласно выражению (2.5).

б) *стержень трапециодального поперечного сечения* (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В этом случае

$$y = \lambda f(x)$$

$$y = -\lambda f(x), \quad \text{где} \quad f^2(x) = (ax - c)^2$$

$$a = \frac{d_2 - d_1}{2d_2}, \qquad c = \frac{bd_1}{2d_2}, \qquad 0 < \lambda = \frac{d_2}{b} < 1.$$

Для жесткости кручения стержня удлиненного трапециодального сечения найдено такое выражение [2]

$$T = \frac{b}{12} \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2 - d_1} \cdot \frac{1}{a_{55}\left(1 - \frac{a_{44}}{a_{55}} \cdot k^2\right)}.$$

Здесь

$$k = \operatorname{tg}\beta = a\lambda = \frac{d_2 - d_1}{2b}.$$

Аналогичным образом, как и в предыдущей задаче, находим

$$C_2(\varphi)=\frac{T(\varphi)}{T(0)}=\frac{2(1-k^2G^*)}{(1+G^*)(1-k^2)+(1-G^*)(1+k^2)\cos 2\varphi}, \tag{2.11}$$

$$C_2(\varphi)=\frac{A_1}{1+B_1\cos 2\varphi}, \tag{2.11'}$$

где

$$A_1=\frac{2(1-k^2G^*)}{(1-k^2)(1+G^*)},\qquad B_1=\frac{(1+k^2)(1-G^*)}{(1-k^2)(1+G^*)},\qquad 1-k^2G^*>0.$$

Нетрудно заметить, что имеют место следующие условия*

$$C_2(\varphi+\pi)=C_2(\varphi),\qquad 0<A_1<2,\qquad B_1<1.$$

При этих условиях исследования показывают, что функция $C_2(\varphi)$ имеет точно такой же характер, что и $C_1(\varphi)$.

Причем будем иметь

$$T_{\min}=T(0)=\frac{b}{12}\cdot\frac{d_2^4-d_1^4}{d_2-d_1}\cdot\frac{G_{\min}}{1-k^2G^*},$$

$$T_{\max}=T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{b}{12}\cdot\frac{d_2^4-d_1^4}{d_2-d_1}\cdot\frac{G_{\min}}{G^*-k^2}. \tag{2.12}$$

Отсюда видно как нужно ориентировать физические оси, чтобы иметь стержень с наибольшей жесткостью.

В этом случае, как и в предыдущей задаче, максимальное касательное напряжение не зависит от упругих постоянных [2—3]

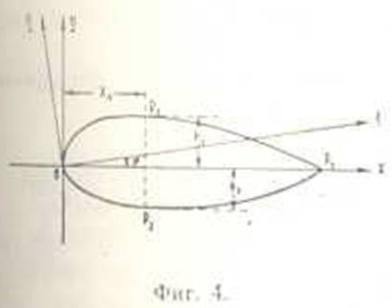
$$|\tau_{xz}|_{\max}=\left|\tau_{xz}\Big|_{\substack{x=b\\ y=\frac{d_2}{2}}}\right|=M_z\cdot\frac{12d_2}{b}\cdot\frac{d_2-d_1}{d_2^4-d_1^4}.$$

В частном случае, когда $d_1=0$, из (2.11)—(2.12) получим выражение жесткости кручения для стержня удлиненного треугольного поперечного сечения.

в) *Авиационный профиль* (фиг. 4). Следуя академику Л. С. Лейбензону, авиационным профилем назовем область ограниченную двумя кривыми

$$y=a\left(\frac{x}{b}\right)^m\cdot\left[1-\left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q, \tag{2.13}$$

$$y=-a_1\left(\frac{x}{b}\right)^m\cdot\left[1-\left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q,$$



Фиг. 4.

* Последним двум условиям можно удовлетворять для удлиненных профилей за счет k и G^*, т. е. принять $G^*-k^2>0$.

где a, a_1—постоянные коэффициенты, m, p, q—положительные числа, b—ширина профиля.

Решив дифференциальное уравнение (1.7) при граничном условии (1.8), для рассматриваемой области, как это сделано в работе [3], будем иметь $\Psi(x, y)$. Затем, выполнив ряд несложных, но трудоемких действий, для максимального касательного напряжения получим следующее компактное выражение*

$$\tau_{\max} = \left| \tau_{xz} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=h_1}} \right| = k_1 \cdot \frac{M_t}{b(h_1+h_2)} \cdot \frac{1-\lambda^2 E_1 \Delta_2}{1-\lambda^2 E_2 k_2}$$

или

$$\tau_{\max} = k_1 \cdot \frac{M_t}{b(h_1+h_2)^2} \cdot \frac{a_{55}^2 - a_{44}a_{55} \cdot e_1 + a_{45}^2 e_2}{a_{55}^2 - a_{55}a_{44} e_3 + a_{45}^2 \cdot e_4}. \tag{2.14}$$

Здесь

$$e_1 = \frac{2\lambda^2 \Delta_2}{3} \cdot \frac{2h_1^3 + 5h_1^2 h_2 + 4h_1 h_2^2 + h_2^3}{(h_1+h_2)^3},$$

$$e_2 = \frac{4\lambda^2 \Delta_2}{3} \cdot \frac{h_1^3 + 4h_1^2 h_2 - 4h_1 h_2^2 - h_2^3}{(h_1+h_2)^3},$$

$$e_3 = -\lambda^2 k_2 \cdot \frac{(h_1-h_2)^2 \delta_1 + 4h_1 h_2 \delta_1}{(h_1+h_2)^2},$$

$$e_4 = -4\lambda^2 k_2 \cdot \frac{(h_1-h_2)^2 \cdot [3h_1 h_2 \delta_1 - (h_1+h_2)^2 \delta_2]}{(h_1+h_2)^4},$$

$\lambda = \dfrac{h_1+h_2}{2b}$ — малый параметр, а величины E_1, E_2, k_1, k_2, Δ_2, δ_1, δ_2, δ_3 имеют такие же значения, что и в работе [3].

Подставив значения a_{ij} из (1.6) в (2.14), введя обозначения

$$c_1 = \frac{1+G^*}{2G_{zz}}, \quad c_2 = \frac{G^*-1}{G^*+1}, \quad c_3 = \frac{G^*-1}{2G_{zz}}, \quad R(\varphi) = \frac{\tau_{\max}(\varphi)}{\tau_{\max}(0)},$$

где

$$\tau_{\max}(0) = \frac{1-c_2-e_1(1+c_2)}{1-c_2-e_3(1+c_2)} \cdot \frac{M_t \cdot k_1}{b(h_1+h_2)^2}$$

и произведя некоторые преобразования, окончательно для авиационного профиля общего типа получим

$$R(\varphi) = \frac{1-G^* c_2}{1-G^* c_1} \cdot \frac{1-e_1+e_2 c_2^2 - 2c_2 \cos 2\varphi + c_2^2(1-e_1-e_2) \cdot \cos^2 2\varphi}{1-e_3-e_4 c_2^2 - 2c_2 \cos 2\varphi + c_2^2(1+e_3-e_4) \cdot \cos^2 2\varphi}. \tag{2.15}$$

Очевидно, что $R(\varphi+\pi) = R(\varphi)$.

* Наибольшее напряжение сдвига получается в одной из точек P_1 или P_2, в которых касательная параллельна оси профиля ox.

Полученный результат значительно упрощается для симметричного авиационного профиля $\left(h_1 = h_2 = h = \frac{H}{2}\right)$

$$R(\varphi) = d_0 \cdot \frac{1 - d_1 \cdot \cos 2\varphi}{1 - d_2 \cdot \cos 2\varphi}, \tag{2.16}$$

где

$$d_0 = \frac{1 + G^* \lambda^2 k_2 \delta_3}{1 - G^* \lambda^2 \Delta_2} \cdot \frac{1 - \lambda^2 \Delta_2}{1 + \lambda^2 k_2 \delta_3}, \quad d_1 = c_2 \cdot \frac{1 + \lambda^2 \Delta_2}{1 - \lambda^2 \Delta_2}, \quad d_2 = c_2 \cdot \frac{1 - \lambda^2 \delta_3 k_2}{1 + \lambda^2 \delta_3 k_2}.$$

Выражение (2.15) или (2.16) показывает, как изменяется максимальное касательное напряжение авиационного профиля при кручении, в зависимости от ориентации главных направлений упругости ортотропного материала, т. е. формула (2.15) или (2.16) показывает влияние расположения осей анизотропии на максимальное касательное напряжение.

Для иллюстрации полученного результата рассмотрим авиационный профиль проф. В. П. Ветчинкина $\left(m = \frac{1}{2}, \quad p = q = 1\right)$. Тогда

$$d_0 = \frac{1 - 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2}}{1 - 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2} \cdot G^*} \cdot \frac{1 - 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2} \cdot G^*}{1 - 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2}},$$

$$d_1 = \frac{G^* - 1}{G^* + 1} \cdot \frac{1 + 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2}}{1 - 1{,}6875 \cdot \frac{H^2}{b^2}}, \quad d_2 = \frac{G^* - 1}{G^* + 1} \frac{1 \mp 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2}}{1 - 1{,}428 \cdot \frac{H^2}{b^2}}. \tag{2.17}$$

Рассмотрим численный пример для данного профиля.

Пусть $\frac{H}{b} = \frac{1}{5}$, $G^* = \frac{1}{10}$. Тогда, используя выражение (2.17), формула (2.16) примет вид

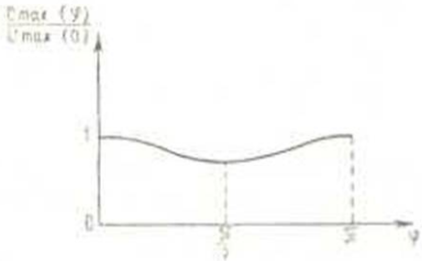
$$R(\varphi) = 0{,}9902 \cdot \frac{1 + 0{,}93663 \cos 2\varphi}{1 + 0{,}91728 \cos 2\varphi}. \tag{2.18}$$

Видно, что $R(\varphi)$ симметрично относительно прямой $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Поэтому достаточно выполнить вычисления для значения φ от 0° до 90°.

Ниже приведены таблица и график (фиг. 5), подсчитанные по (2.18), для максимального напряжения авиационного профиля проф. В. П. Ветчинкина.

Таблица 1

φ	0	15	30	45	60	75	90
$\frac{\tau_{max}(\varphi)}{\tau_{max}(0)}$	1	0,99926	0,99658	0,99002	0,97233	0,90833	0,75852



Фиг. 5.

Перейдем к определению жесткости кручения авиационного профиля общего типа, в зависимости от угла φ. Для жесткости кручения очень тонких профилей нами было получено выражение [3]

$$C_t = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p a_{55}} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)$$

Подставив значение a_{55} из (1.6) и введя обозначения $C_3(\varphi) = \frac{C_t(\varphi)}{C_t(0)}$, находим

$$C_3(\varphi) = \frac{2}{1+G^* + (1-G^*)\cos 2\varphi}. \tag{2.19}$$

Легко видеть, что $C_3(\varphi)$ принимает экстремальные значения при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Далее, обычным способом устанавливаем:

1) $C_3(\varphi)$ в $\varphi = 0$ принимает наименьшее значение. В этом случае будем иметь

$$C_t^{min} = C_t(0) = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3 G_{min}}{3p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right),$$

2) $C_3(\varphi)$ принимает наибольшее значение в $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда будем иметь

$$C_t^{max} = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3 G_{max}}{3p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right).$$

График функции $C_3(\varphi)$ такой же как и в предыдущих задачах. Для удлиненных профилей была получена более точная формула [3]

$$C_t = \frac{B_1 a_{55}^2 + B_2 a_{44} a_{55} + B_3 a_{45}^2}{a_{55}^3}, \tag{2.20}$$

где

$$B_1 = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right),$$

$$B_2 = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^5}{3p(h_1+h_2)^2} \cdot \left[(h_1-h_2)^2 \delta_1 + 4h_1 h_2 \delta_2\right] \cdot B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)$$

$$B_3=\frac{32b^4\lambda^5\Delta^5(h_1-h_2)^2\cdot[(h_1+h_2)^2\cdot\delta_2-3h_1h_2\delta_1]}{3p(h_1+h_2)^4}\cdot B\left(\frac{5m-1}{p},\,5q-1\right).$$

Внеся значения a_{ij} из (1.6) в (2.20) и обозначив $C_4(\varphi)=\dfrac{C_t(\varphi)}{C_t(0)}$ получим

$$C_4(\varphi)=A\cdot\frac{(1-c_2\cos 2\varphi)^2+N_1(1-c_2^2\cos^2 2\varphi)+N_2c_2^2\sin^2 2\varphi}{(1-c_2\cos 2\varphi)^3}. \tag{2.21}$$

Здесь

$$N_1=\frac{B_2}{B_1},\qquad N_2=\frac{B_3}{B_1},\qquad A=\frac{(1-c_2)^2}{1-c_2+N_1(1-c_2)}.$$

В частном случае, для симметричного авиационного профиля будем иметь

$$C_4(\varphi)=A\cdot\frac{1+N_1+(N_1-1)\,c_2\cos 2\varphi}{(1-c_2\cos 2\varphi)^2}. \tag{2.22}$$

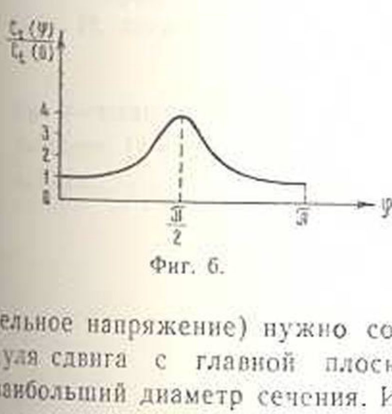
Для наглядности полученного результата опять рассмотрим численный пример для того же авиационного профиля $\left(m=\dfrac{1}{2},\right.$ $\left.p=q=1,\ \dfrac{H}{b}=\dfrac{1}{5},\ G^*=\dfrac{1}{10}\right)$. Тогда (2.22) будет иметь вид

$$C_4(\varphi)=1{,}72418\cdot\frac{1+0{,}91731\cos 2\varphi}{(1+0{,}81818\cos 2\varphi)^2}. \tag{2.23}$$

Ниже приведены таблица и график (фиг. 6) жесткости кручения рассматриваемого частного профиля, подсчитанные по (2.23).

Таблица 2

φ	0°	15°	30	45°	60°	75°	90°
$\dfrac{C_t(\varphi)}{C_t(0)}$	1	1,05986	1,26666	1,72418	2,66407	4,1732	4,31273



Фиг. 6.

Таким образом можно сделать следующий вывод:

Чтобы из ортотропного материала изготовить стержень с поперечным сечением в виде авиационного профиля, обладающий наивыгоднейшими механическими свойствами (наибольшая жесткость и наименьшее максимальное касательное напряжение) нужно совпадение плоскости наибольшего модуля сдвига с главной плоскостью стержня, проходящей через наибольший диаметр сечения. Иначе говоря, ось наибольшего модуля сдвига должна совпасть с наибольшим диаметром сечения (длиной профиля).

Ереванский государственный университет Поступила 23 V 1961

Վ. Ս. Սարգսյան

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԻՑ ԲԱՂԿԱՑԱԾ ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ՊՐՈՖԻԼՆԵՐՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊՐԻԶՄԱՅԱՁԵՎ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտարկված է օրթոտրոպ նյութից բաղկացած երկարացված պրոֆիլով (էլիպս, սեղան, եռանկյուն և ընդհանուր տեսքի ամե... ցիոն պրոֆիլ) անիզոտրոպ պրիզմայաձև ձողի ոլորման խնդիրը, երբ առաձգականության գլխավոր ուղղությունները (ֆիզիկական առանցքները) չեն համընկնում ձողի լայնական հատվածքի գլխավոր առանցքների (երկրաչափական առանցքների) հետ: Ուսումնասիրված է օրթոտրոպ նյութի առաձգականության գլխավոր առանցքների տարբեր դիրքերի ազդեցությունը ամենամեծ լարումների և կոշտության վրա: Ցույց է տրված, թե նրանց ինչպիսի օրիենտացիայի դեպքում ձողի ոլորման կոշտությունը կլինի ամենամեծը, իսկ լարումները՝ ամենափոքրը: Եվ հակառակը:

Դիտարկված են մի քանի կոնկրետ խնդիրներ: Կառուցված են գրաֆիկներ և կազմված են աղյուսակներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат технико-теорет. лит., М.—Л., 1950.
2. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 2, 1959.
3. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней сечением в виде удлиненного авиационного профиля. Известия АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 2, 1961.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1935.
5. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.