

Р. М. Мартirosян

О спектре некоторых несамосопряженных операторов

В основе настоящей заметки лежит следующая простая идея. Предположим, что резольвента R_λ самосопряженного A , определенного на многообразии D_A , плотном в гильбертовом пространстве $L_2(E)$, где E — неограниченная область n -мерного евклидова пространства E_n , является интегральным оператором

$$R_\lambda f(M) = \int_E H(M, Q; \lambda) f(Q) dQ. \quad (1)$$

Пусть, далее, λ и $u(Q)$ являются соответственно собственным значением и собственной функцией возмущенного оператора

$$Tu = Au + cu,$$

где комплексная функция $c(Q)$ ограничена.

Тогда $u(Q)$ должна удовлетворять уравнению

$$u(M) = - \int_E H(M, Q; \lambda) c(Q) u(Q) dQ.$$

Легко видеть, что в этом случае λ оказывается одновременно собственным значением следующего уравнения

$$\varphi(M) = - \int_E \sqrt{c(M)} H(M, Q; \lambda) \sqrt{c(Q)} \varphi(Q) dQ.$$

Исследовать это уравнение, вообще говоря, проще, чем исходное потому, что, если $c(Q)$, например, финитна, то достаточно знать поведение функции $H(M, Q; \lambda)$ лишь в ограниченной области для получения нужных оценок. Оказывается, такая замена исходного уравнения новым уравнением позволяет вообще высказать общие соображения о спектре возмущенного оператора. Но, быть может, гораздо интереснее то, что иногда можно таким путем выяснить — может ли возмущенный оператор иметь собственные значения, принадлежащие непрерывному спектру невозмущенного оператора? Мы это проиллюстрируем ниже на примере несамосопряженного оператора Шредингера. Для бигармонического оператора это будет сделано в другой заметке.

$$Tu - \lambda_0 u = Au + S^2 u - \lambda_0 u = f, \quad (3)$$

равносильное следующему

$$u + R_{\lambda_0} S^2 u = R_{\lambda_0} f. \quad (4)$$

Введем далее в рассмотрение уравнение

$$\varphi + SR_{\lambda_0} S\varphi = SR_{\lambda_0} f,$$

решение которого представляется в виде

$$\varphi = (E + SR_{\lambda_0} S)^{-1} SR_{\lambda_0} f = SR_{\lambda_0} f - SR_{\lambda_0} S(E + SR_{\lambda_0} S)^{-1} SR_{\lambda_0} f.$$

Положим

$$u = R_{\lambda_0} f - R_{\lambda_0} S(E + SR_{\lambda_0} S)^{-1} SR_{\lambda_0} f.$$

Легко видеть, что $u = R_{\lambda_0} f - R_{\lambda_0} S'u$, т. е. u удовлетворяет уравнению (4), а следовательно и уравнению (3), откуда и следует формула (2).

Для доказательства первой части теоремы допустим, что точка λ_0 , принадлежащая непрерывному спектру оператора A , является регулярной точкой для оператора T . Очевидно, уравнение

$$Au - \lambda_0 u = Tu - S^2 u - \lambda_0 u = f \quad (5)$$

эквивалентно уравнению

$$u - B_{\lambda_0} f + B_{\lambda_0} S^2 u. \quad (6)$$

С другой стороны, уравнение $u = B_{\lambda_0} S^2 u$ имеет лишь тривиальное решение, а потому, как легко видеть, и уравнение $\varphi = SB_{\lambda_0} S\varphi$ имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение

$$\varphi = SB_{\lambda_0} S\varphi + SB_{\lambda_0} f \quad (7)$$

разрешимо при всех $f \in H$. Положив $u = B_{\lambda_0} S\varphi + B_{\lambda_0} f$, где φ — решение уравнения (7), легко убедиться, что u является решением уравнения (6), а следовательно и уравнения (5), а это противоречит тому, что λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A .

Переходя к доказательству второй части теоремы установим сперва, что если λ не принадлежит спектру оператора A и не является собственным значением оператора T , то λ — регулярная точка для оператора T . В самом деле, по условию уравнение $u + R_{\lambda} S^2 u = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Поэтому, как легко видеть, и уравнение $\varphi + SR_{\lambda} S\varphi = 0$ имеет только тривиальное решение. Отсюда, как и выше, пользуясь альтернативой Фредгольма, находим, что уравнение $u + R_{\lambda} S^2 u = R_{\lambda} f$, следовательно и равносильное ему уравнение $Tu - \lambda u = Au + S^2 u - \lambda u = f$, разрешимы при всех $f \in H$. В силу замкнутости T оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ ограничен.

Покажем, наконец, что собственные значения оператора T , лежащие вне спектра оператора A , не имеют предельных точек вне

спектра оператора A . В самом деле, если λ — собственное значение оператора T , то очевидно $u + R_\lambda S^2 u = 0$, $\|u\| > 0$. Но тогда $\varphi = Su$ удовлетворяет уравнению $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$, причем, как легко видеть, $\|\varphi\| > 0$. Итак, достаточно доказать, что собственные значения уравнения $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ не имеют предельных точек вне спектра оператора A . Но это вытекает из леммы 1, так как $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_{\lambda+i\epsilon}\| = 0$.

Отметим одно следствие доказанной теоремы. Для этого предположим, что область определения D_A самосопряженного оператора A плотна в пространстве $L_2(E)$, где E — неограниченная область n -мерного евклидова пространства E_n и что резольвента R_λ этого оператора допускает представление (1), причем для любых ограниченных областей $G_1, G_2 \subset E$ выполняется неравенство

$$\int_{G_1} \left(\int_{G_2} |H(M, Q; \lambda)|^2 dQ \right) dM < \infty. \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть ограниченная измеримая комплекснозначная функция $c(Q)$ стремится к нулю на бесконечности, а самосопряженный оператор A удовлетворяет условиям (1) и (8) и пусть $Tu = Au + cu$ ($D_T = D_A$). Тогда все точки непрерывного спектра оператора A принадлежат спектру оператора T , причем точками спектра оператора T , лежащими вне спектра оператора A , могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора A .

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что семейство функций $\sqrt{c} R_\lambda \sqrt{c} f$ ($\|f\| \leq 1$) компактно в $L_2(E)$. Обозначив через χ_R характеристическую функцию шара K_R радиуса R с центром в начале координат, установим сперва компактность в $L_2(E)$ семейства функций вида $\sqrt{c} R_\lambda \sqrt{c} \chi_R f$ ($\|f\| \leq 1$) при любом конечном $R > 0$. Предполагая, что $|c(Q)| \leq N$ и $\|f\| \leq 1$ при заданном $\epsilon > 0$, найдем такое $R_1 > 0$, чтобы

$$\|(1 - \chi_{R_1}) \sqrt{c} R_\lambda \sqrt{c} \chi_{R_1} f\| \leq \sqrt{N} \|R_\lambda\| \cdot \sup_{r_M > R_1} \sqrt{|c(M)|} < \epsilon, \quad \|f\| \leq 1. \quad (9)$$

С другой стороны, в силу (8), семейство функций вида

$$\chi_{R_1} \sqrt{c} R_\lambda \sqrt{c} \chi_{R_1} f \quad (\|f\| \leq 1)$$

компактно в пространстве $L_2(E \cap K_{R_1})$. Если φ_k ($k=1, \dots, r$) — конечная ϵ -сеть для этого семейства в $L_2(E \cap K_{R_1})$, то функции $\tilde{\varphi}_k$, совпадающие с φ_k в $E \cap K_{R_1}$ и равные нулю в $E \setminus E \cap K_{R_1}$, образуют, в силу (9), 2ϵ -сеть для семейства $\sqrt{c} R_\lambda \sqrt{c} \chi_{R_1} f$ ($\|f\| \leq 1$), и поэтому это семейство компактно в $L_2(E)$. Аналогично доказывается компактность семейства $\sqrt{c} R_\lambda \sqrt{c} f$ ($\|f\| \leq 1$).

Отметим один частный случай доказанной теоремы. В трехмерном евклидовом пространстве E_3 рассмотрим симметрический оператор эллиптического типа B , определенный на совокупности D_B всех финитных, дважды дифференцируемых функций равенством

$$Bu = - \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ik}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] + c(x_1, x_2, x_3) u, \quad (a_{ik} = a_{ki}), \quad (10)$$

где a_{ik} — четырежды дифференцируемые функции, а $c(x_1, x_2, x_3)$ — вещественная непрерывная функция в E_3 . Как показал М. Ш. Флексер [2], резольвента $R_\lambda (\lambda \neq \lambda)$ любого самосопряженного расширения оператора B является интегральным оператором с ядром типа Карлемана. Поэтому из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть измеримая, ограниченная, комплекснозначная функция $p(Q)$ стремится к нулю на бесконечности, A — любое самосопряженное расширение оператора B , определенного равенством (10). Тогда все точки непрерывного спектра оператора A принадлежат спектру возмущенного оператора $Tu = Au + pu$, причем точками спектра оператора T , лежащими вне спектра оператора A , могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора A .

Покажем теперь на примере оператора Шредингера, каким путем можно получить более полные сведения о точках спектра возмущенного оператора, лежащих на непрерывном спектре невозмущенного оператора. Для этого обозначим через Ω_n область определения самосопряженного оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$ функций, суммируемых с квадратом во всем евклидовом пространстве E_n . Как известно [3], каждая функция $u \in \Omega_n$ обладает всеми обобщенными производными в смысле С. Л. Соболева до второго порядка включительно, причем все эти производные суммируемы с квадратом в E_n . Поэтому функция u , равно как и ее первые производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, эквивалентны таким функциям, для которых существуют интегралы по любой сфере $S_R(M)$, лежащей в E_n , причем эти интегралы непрерывно зависят от радиуса R сферы, если центр ее M зафиксирован. Более того, справедлива формула интегрирования по частям. Эти замечания позволяют без труда доказать следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $u \in \Omega_n$. Через $\omega_n(r)$ обозначим площадь поверхности сферы $S_r(M)$ радиуса r , а через $\tau_n(r) = \int_0^r \omega_n(\rho) d\rho$ — объем шара $K_r(M)$ радиуса r с центром в точке M . Тогда $u(Q)$ эквивалентна функции, для которой справедливо следующее утверждение: для почти всех $M \in E_n$ существует такая последовательность $r_k \rightarrow 0$ положительных чисел (зависящая от выбора точки M), что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S_r(M)} \frac{\partial u}{\partial n} dz = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(r_k)} \int_{S_{r_k}(M)} u dz = u(M).$$

Доказательство. Первое равенство немедленно следует из теоремы Лебега, если заметить, что

$$\int_{S_r(M)} \frac{\partial u}{\partial n} dz = \int_{K_r(M)} \Delta u dQ.$$

Для доказательства второго равенства достаточно заметить, что

$$\int_{K_r(M)} u dQ = \int_0^r \left(\int_{S_\rho(M)} u dz \right) d\rho,$$

причем внутренний интеграл непрерывно зависит от ρ при $\rho > 0$. Остается вновь воспользоваться теоремой Лебега и классической формулой Коши

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$\Phi_{n,\lambda}(r) = \frac{i}{4} \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^{\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}^{(1)}(\lambda r), \quad (11)$$

где через $H_n^{(1)}(z)$ обозначена функция Ханкеля первого рода. Ряд свойств этой функции отмечен в работе автора [4]. Для дальнейшего изложения нам понадобятся лишь следующие, легко устанавливаемые оценки. Существуют такие константы B_n и C_n , что при $n \geq 1$ и $|\lambda r| \geq 1$

$$|\Phi'_{n,\lambda}(r)| \leq B_n |\lambda|^{\frac{n-1}{2}} \frac{|e^{i\lambda r}|}{r^{\frac{n-1}{2}}}, \quad |\Phi_{n,\lambda}(r)| \leq C_n |\lambda|^{\frac{n-3}{2}} \frac{|e^{i\lambda r}|}{r^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (12)$$

Лемма 3. Если $f(Q) \in L_2(E_n)$ суммируема в E_n и при некотором положительном λ уравнение $-\Delta u - \lambda u = f$ имеет решение $u \in \mathcal{Q}_n$, то

$$u(M) = \int_{E_n} \Phi_{n,\lambda}(r_{MQ}) f(Q) dQ. \quad (13)$$

Доказательство. Пользуясь асимптотикой $\Phi_{n,\lambda}(r)$, например, оценкой (12), легко установить, что интеграл (13) сходится почти для всех $M \in E_n$. Пусть для точки $M \in E_n$ этот интеграл существует и выполнены оба утверждения леммы 2. Зафиксировав эту

точку, рассмотрим $\Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ как функцию точки Q в области $K_R(M) \setminus K_\varepsilon(M)$, ограниченной сферами $S_R(M)$ и $S_\varepsilon(M)$, предположив R настолько большим, чтобы $\lambda R > 1$. Замечая, что $\Delta \Phi_{n, \sqrt{\lambda}} + \lambda \Phi_{n, \sqrt{\lambda}} = 0$ в рассматриваемой области и $u \in \mathcal{Q}_n$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{K_R(M) \setminus K_\varepsilon(M)} \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) j(Q) dQ = & \int_{S_R(M)} \left(u \frac{\partial \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}}{\partial n} - \Phi_{n, \sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dz + \\ & + \int_{S_\varepsilon(M)} \left(u \frac{\partial \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}}{\partial n} - \Phi_{n, \sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dz. \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны, из (12) следует

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_R(M)} u \frac{\partial \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}}{\partial n} dz \right|^2 & \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} B_n^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \int_{S_R(M)} |u|^2 dz, \\ \left| \int_{S_R(M)} \Phi_{n, \sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} dz \right|^2 & \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} C_n^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda^{\frac{n-3}{2}} \int_{S_R(M)} \sum \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dz. \end{aligned}$$

Но так как функция $|u|^2 + \sum \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$ суммируема в E_n , то существует такая последовательность положительных чисел $R_k \rightarrow \infty$, что первый интеграл в правой части формулы (14), взятый по сферам $S_{R_k}(M)$, стремится к нулю. Итак

$$\int_{E_n \setminus K_\varepsilon(M)} \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) j(Q) dQ = \int_{S_\varepsilon(M)} \left(u \frac{\partial \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}}{\partial n} - \Phi_{n, \sqrt{\lambda}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dz.$$

Для доказательства леммы достаточно в этом равенстве совершить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и воспользоваться леммой 2, заметив при этом, что, как показано в [4], имеют место равенства

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_n(r) \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}(r) = -1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \omega_n(r) \Phi_{n, \sqrt{\lambda}}'(r) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Можно доказать более общее предложение. Именно, пусть самосопряженный оператор A определен на $D_A \subset L_2(E) \subset L_2(E_n)$. Допустим, что λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A и E_λ — разложение единицы, а R_λ — резольвента этого оператора. Если при некотором $f \in L_2(E)$ уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ имеет решение $u \in D_A$ и, кроме того, существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} R_\lambda f$ в смысле сходимости почти всюду, то $u = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} R_\lambda f$. В самом деле, при любом не вещественном λ функция u удовлетворяет уравнению

$$u = R_{\lambda} f + (\lambda_0 - \lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda_1} \frac{1}{\mu - \lambda} dE_{\mu} u + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\mu - \lambda} dE_{\mu} u + \int_{\lambda_2}^{\infty} \frac{1}{\mu - \lambda} dE_{\mu} u \right\},$$

где $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$. Поскольку первый и третий интегралы после умножения на $\lambda_0 - \lambda$ по норме сходятся к нулю, то можно выбрать такую подпоследовательность $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$, чтобы они сходились к нулю почти всюду. Итак, в смысле сходимости почти всюду будем иметь

$$u = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} R_{\lambda} f + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda} E_{\Delta} u,$$

где $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$, откуда и следует наше утверждение. Это замечание показывает, что нижеследующие рассуждения, опирающиеся на лемму 3, имеют несколько более общий характер.

Теорема 4. Пусть ограниченная комплекснозначная функция $c(Q) \in L_2(E_n)$ и

$$\sup_{M \in E_n} \int_{E_n} |\Phi_{n, V\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})| c(Q) |dQ| < 1,$$

где функция $\Phi_{n, \lambda}(r)$ определена формулой (11). Тогда λ_0 не является собственным значением оператора $-\Delta u + cu$. Если, кроме того, $\lambda_0 > 0$, то λ_0 принадлежит непрерывному спектру (в смысле Денфорта [5]) этого оператора.

Доказательство. Из доказательства леммы 3 легко усмотреть, что функция $\Phi_{n, V\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$ ($\operatorname{Im} V\sqrt{\lambda} > 0$) является ядром резольвенты оператора $-\Delta u$. Допустим, что $-\Delta u + cu = \lambda_0 u$, $u \neq 0$, $u \in \mathcal{Q}_n$. Воспользовавшись еще леммой 3, если $\lambda_0 > 0$, получим, что в любом случае

$$\varphi(M) = - \int_{E_n} \sqrt{c(M)} \Phi_{n, V\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) \sqrt{c(Q)} \varphi(Q) dQ,$$

где положено $\varphi(M) = \sqrt{c(M)} u(M)$ и, следовательно, $\|\varphi\| > 0$. Поэтому

$$\|\varphi\|^2 \leq \left\{ \sup_{M \in E_n} \int_{E_n} |\Phi_{n, V\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})| c(Q) |dQ| \right\}^2 \|\varphi\|^2,$$

откуда и вытекает первое утверждение теоремы. Заметим далее, что, как показано в [4] (теорема 2.3), если $c(Q) \in L_2(E_n)$ ограничена, то все точки положительной полуоси принадлежат спектру оператора $-\Delta u + cu$. Если бы при этом оказалось, что многообразие функций вида $-\Delta u + cu = \lambda_0 u$ неплотно в $L_2(E_n)$, то $\lambda_0 > 0$ было бы собственным значением оператора $-\Delta u + cu$, что противоречит доказанному выше.

Теорема 5. Пусть $n=3$ и $c(Q)$ ограничена и суммируема в E_3 . Тогда собственные значения (включая и положительные) опе-

ратора $-\Delta u + cu$ лежат в ограниченной области λ -плоскости, вне которой спектр чисто непрерывен и совпадает с соответствующей частью положительной полуоси.

Доказательство. Допустим, что λ_0 — собственное значение оператора $-\Delta u + cu$ и заметив, что $\Phi_{\lambda_0, \sqrt{\lambda_0}}(r) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}r}}{4\pi r}$, найдем, что уравнение

$$u(M) = - \int_{E_2} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} c(Q) u(Q) dQ,$$

а, следовательно, и итерированное уравнение

$$u(M) = \int_{E_2} K_{\lambda_0}(M, Q_1) c(Q_1) u(Q_1) dQ_1,$$

где положено

$$K_{\lambda_0}(M, Q_1) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{E_2} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{MQ}} e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{QQ_1}}}{r_{MQ} r_{QQ_1}} c(Q) dQ,$$

имеют нетривиальное решение $u(Q)$. Переходя, как и при доказательстве теоремы 4, к уравнению для $\varphi(M) = \sqrt{c(M)} u(M)$, придем к оценке

$$\|\varphi\|^2 \leq \sup_{M, Q_1 \in E_2} |K_{\lambda_0}(M, Q_1)| \left(\int_{E_2} |c(Q)| dQ \right) \|\varphi\|^2, \quad \|\varphi\| > 0.$$

Остается воспользоваться леммой 4 из работы автора [6]. Доказательство второго утверждения теоремы проводится так же, как и в предыдущей теореме.

Теоремы 4 и 5 интересно сравнить с замечательным результатом Т. Като [7] о росте дважды дифференцируемых решений уравнения $-\Delta u + cu - \lambda u = 0$ ($\lambda > 0$) при непрерывной $c(Q)$, стремящейся к нулю на бесконечности, доказательство которого довольно сложно и основано на специфических свойствах оператора Лапласа. Существенное отличие теоремы 1 от аналогичной теоремы И. М. Гельфанда [8] (или более общей теоремы И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна, см. подстрочное примечание на стр. 10) отмечено в самом начале этой заметки.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 VI 1961



2. Մ. Մարտիրոսյան

ՈՐՈՇ ՈՉ-ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածի հիմնական բովանդակությունը տրվում է հետևյալ երկու թեզերմներով:

Թեզ 1. Դիցուք A ինքնահամալուծ օպերատորը պաշտպանված է H հիլբերտյան տարածության մեջ խիտ D_A բաղմանկերպի վրա և S -ը որևէ սահմանափակ զծախին օպերատոր է (ոչ-ինքնահամալուծ), $D_S = H$ ։ Դիցուք, ահռահռահ, $SR_\lambda S$ օպերատորը, որտեղ $R_\lambda = A - \lambda$ օպերատորի սեղորվենան է, լիովին անընդհատ է բոլոր ոչ-իրական λ -ների դեպքում: Այդ դեպքում A օպերատորի անընդհատ սպեկտրի բոլոր կետերը պատկանում են $T = A + S^2$ ($D_T = D_A$) զրգալած օպերատորի սպեկտրին, ընդ որում T օպերատորի սպեկտրի կետերը, որոնք ընկած են Λ օպերատորի սպեկտրից դուրս, կարող են լինել միայն սեփական արժեքներ, որոնք չունեն սահմանափակ կետեր Λ օպերատորի սպեկտրից դուրս:

Մայրենք հետևյալ նշանակումները: $L_n(E_n)$ -ով նշանակենք այն ֆունկցիաների հիլբերտյան տարածությունը, որոնք հանրադրմարելի են մոդուլի քառակուսիով ամբողջ n -չափանի E_n էվկլիդեսյան տարածության մեջ: Ահռահռահ Δ_n մասնակցի

$$\Phi_{n,\lambda}(r) = \frac{i}{4} \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^{\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}^{(1)}(\lambda r), \quad \text{Im } \lambda > 0, r > 0,$$

ֆունկցիան, որտեղ $H_n^{(1)}(z)$ -ը Հանկելի առաջին սեփական ֆունկցիան է:

Թեզ 2. Դիցուք կոմպակտ արժեք $c(Q)$ ֆունկցիան պատկանում է $L_2(E_n)$ -ին և

$$\sup_{\substack{M \in \mathcal{M}_n \\ E_n}} \int_{E_n} |\Phi_{n,\lambda}(rMQ) c(Q)| dQ < 1.$$

Այդ դեպքում λ_0 -ն չի հանդիսանում $-\Delta u + cu$ օպերատորի սեփական արժեք: Եթե, բացի դրանից, $\lambda_0 > 0$, ապա λ_0 -ն պատկանում է այդ օպերատորի անընդհատ սպեկտրին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. «ДАН СССР», новая серия, 77, 1, 1951.
2. Флексер М. Ш. О спектральной функции оператора $-\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] + cu$. «Мат. сборник», 40 (82), № 1, 1956.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V. М., Физматгиз, 1959.
4. Мартиросян Р. М. О спектре некоторых возмущений оператора Лапласа в многомерном и трехмерном пространствах. «Известия АН СССР, серия математ.», 24, № 6, 1960.

5. *Dunford N.*, Spectral theory. I. Convergence to projections. „Trans. Amer. Math. Soc.“, 51, 1943.
6. *Мартиросян Р. М.* О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta u + cu$ в трехмерном пространстве. „Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук)“, 10, № 1, 1957.
7. *Като Т.* Свойства роста решений приведенного полного уравнения с переменным коэффициентом. „Математика“ (сборник переводов иностранных статей), 5:1, 1961.
8. *Гельфанд И. М.* О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов. „Успехи матем. наук“, VII, вып. 6, 1952.