ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 5, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. Л. Лунц

Применение рядов Тейлора-Дирихле к оценке роста целых функций

§ 1. Теорема Крамера для рядов Тейлора-Дирихле

Пусть $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция первого порядка и типа σ. Тогда, как известно, функция

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!c_n}{z^{n+1}}$$

аналитична вне круга $|z|=\sigma$ и

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{zu}\Phi(u)\,du, \tag{1.1}$$

где Γ — окружность $|u|=\sigma+\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Пусть, далее,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{1.2}$$

где m_n — натуральные числа или нули, $\lambda_{n+1}>\lambda_n$, $\lambda_n\uparrow\infty$, G — область абсолютной сходимости ряда (2), состоящая, возможно, из нескольких связных компонент (см. [1]). Обозначим через G_σ множество, которое мы получим, выбросив из G область, заметаемую кругом радиуса σ, центр которого описывает границу области G. Если $z\in G_\sigma$ и ε достаточно мало, то, когда точка u движется по окружности Γ: $|u|=\sigma+\varepsilon$, точка $z-u$ описывает окружность радиуса $\sigma+\varepsilon$ с центром в точке z, причем эта окружность лежит внутри G и поэтому при фиксированном z ряд

$$f(z-u)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-u)^{m_n} e^{-\lambda_n (z-u)}$$

сходится на Γ равномерно и функция

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z-u)\,\Phi(u)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-u)^{m_n}e^{-\lambda_n(z-u)}\Phi(u)\,du \tag{1.3}$$

аналитична в точке z, а в правой части (1.3) можно произвести почленное интегрирование.

Но

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(z-u)^{m_n}e^{-\lambda_n(z-u)}\Phi(u)\,du=$$

$$=e^{-\lambda_n z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left[z^{m_n}-\binom{m_n}{1}z^{m_n-1}u+\cdots+(-1)^{m_n}u^{m_n}\right]e^{\lambda_n u}\Phi(u)\,du,$$

а так как из (1.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{\lambda_n u}\Phi(u)\,du=\varphi(\lambda_n),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}u^k e^{\lambda_n u}\Phi(u)\,du=\varphi^{(k)}(\lambda_n)\quad(k=1,2,\cdots),$$

то

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[z^{m_n}\varphi(\lambda_n)-\binom{m_n}{1}z^{m_n-1}\varphi'(\lambda_n)+\cdots+(-1)^{m_n}\varphi^{(m_n)}(\lambda_n)\right]e^{-\lambda_n z}, \tag{1.4}$$

если $z\in G_\sigma$, причем функция $F(z)$ регулярна в G_σ (в каждой ее связной компоненте).

Если $f(z)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую область D ($G\subset D$ или одна из компонент G принадлежит D), то с помощью (1.3) функцию $F(z)$ можно продолжить из соответствующей компоненты множества G_σ в область D_σ, которую можно получить, если выбросить из D область, заметаемую кругом радиуса σ, когда центр круга описывает границу области D, и из полученного множества выделить область, содержащую соответствующую компоненту G_σ. Это утверждение является обобщением известной теоремы Крамера для рядов Дирихле (см. [2]). Легко видеть, что теорема остается справедливой при замене окружности радиуса σ сопряженной диаграммой функции $\varphi(z)$.

§. 2. **Оценка роста целой функции на последовательности нулей ее производной.**

Если функция $\varphi(z)$ такова, что

$$\varphi'(\lambda_n)=\varphi''(\lambda_n)=\cdots=\varphi^{(m_n)}(\lambda_n)=0\quad(n=1,2,\ldots),$$

то (1.4) принимает вид

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(\lambda_n) z^{m_n} e^{-\lambda_n z}. \tag{2.1}$$

Ряд (2.1) сходится во всяком случае, если $z \in G_\sigma$. Предположим теперь, что $\ln n = o(\lambda_n)$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \rho$. Взяв произвольное действительное число k, подберем такую последовательность $\{a_n\}$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = k$. Тогда (см. [1]) ряд (1.2) будет сходиться абсолютно в области G, определяемой неравенством $|z| < e^{\rho(x-k)}$ и расходиться вне этой области. Ряд (2.1) будет сходиться абсолютно в области $G^{(\alpha)}$, определяемой неравенством $|z| < e^{\rho(x-k-\alpha)}$, где

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\varphi(\lambda_n)|}{\lambda_n}$$

и расходиться вне $G^{(\alpha)}$. Так как нас будет интересовать оценка величины α сверху, то предположим, что $\alpha \geqslant 0$ и, следовательно, $G^{(\alpha)} \subset G$. В силу доказанного $G_\sigma \subset G^{(\alpha)}$, поэтому всякая точка z_0, принадлежащая границе области $G^{(\alpha)}$, должна находиться на расстоянии, не большем чем σ от границы области G (иначе точка z_0 была бы внутренней точкой для G_σ и в некоторой окрестности точки z_0 ряд (2.1) сходился бы абсолютно). Возьмем на границе области $G^{(\alpha)}$ действительную точку $x_0 > 0$ (это всегда возможно, если k подобрано так, что $G^{(\alpha)}$ распадается на две связные компоненты), тогда $x_0 = e^{\rho(x_0-k-\alpha)}$.

Расстояние точки x_0 от границы области G равно

$$\min_x \sqrt{(x-x_0)^2 + e^{2\rho(x-k)} - x^2}.$$

С помощью простых выкладок легко убедиться, что этот минимум достигается при $x = k + \frac{1}{2\rho}\ln\frac{x_0}{\rho}$ и равен

$$\sqrt{x_0\left\{\frac{1}{\rho}\left[1+\ln(x_0\rho)\right] - x_0 + 2\alpha\right\}}.$$

Решив неравенство $\sqrt{x_0\left\{\frac{1}{\rho}\left[1+\ln(x_0\rho)\right] - x_0 + 2\alpha\right\}} \leqslant \sigma$ относительно α, получим

$$\alpha \leqslant \frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma^2}{x_0} + x_0 - \frac{1}{\rho}\left[1+\ln(x_0\rho)\right]\right\} = Q(x_0). \tag{2.2}$$

Элементарные вычисления показывают, что наименьшее значение функции $Q(x_0)$ достигается при

$$x_0 = x_0^* = \frac{1}{2\rho}\left(1+\sqrt{1+4\rho^2\sigma^2}\right). \tag{2.3}$$

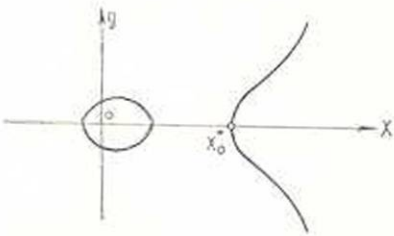
Так как $q = k + \alpha = x_0 - \frac{\ln x_0}{\rho}$, то равенство (2.3) показывает, что оценка (2.2) является наилучшей, если выбрать

$$q = q^* = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\rho^2\sigma^2}}{2\rho} - \frac{1}{\rho} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4\rho^2\sigma^2}}{2\rho}.$$

Нетрудно также проверить (см. [1]), что при $q = q^*$ граница $|z| = e^{\rho(x - q^*)}$ множества $G^{(\alpha)}$ всегда имеет вид, указанный на фиг. 1, а x_0^*—всегда больший положительный корень уравнения $x_0 = e^{\rho(x_0 - q^*)}$.

Подставив (2.3) в правую часть (2.2), после упрощений получим

$$\alpha \leqslant \frac{1}{2\rho} [\sqrt{1 + 4\rho^2\sigma^2} - \ln(1 + \sqrt{1 + 4\rho^2\sigma^2}) + \ln 2 - 1]. \qquad (2.4)$$



Фиг. 1.

Легко показать, что правая часть (2.4) при увеличении ρ от 0 до ∞ возрастает монотонно от 0 до σ и при любом, отличном от нуля, конечном ρ правая часть (2.4) строго меньше чем σ и, следовательно, оценка (2.4) не является тривиальной.

При выводе оценки (2.4) предполагалось существование предела $\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{m_n}$. Если этот предел не существует, но

$$\bar{\rho} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n}{m_n} < \infty,$$

то определим следующим образом последовательность $\{m_n'\}$:

если $\frac{\lambda_n}{m_n} < \bar{\rho}$, то есть $m_n > \frac{\lambda_n}{\bar{\rho}}$, то положим $m_n' = \left[\frac{\lambda_n}{\bar{\rho}} + 1\right]$;

если же $\frac{\lambda_n}{m_n} \geqslant \bar{\rho}$, то выберем $m_n' = m_n$.

При таком определении последовательности $\{m_n'\}$ всегда $m_n' \leqslant m_n$ и, кроме того,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{m_n'} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n}{m_n} = \bar{\rho}.$$

Так как в точках λ_n производная функции $\varphi(z)$ имеет нули порядков не ниже m_n', то оценка (2.4) остается справедливой в рассматриваемом случае при замене ρ на $\bar{\rho}$.

Неравенство (2.4) дает оценку сверху для роста $\varphi(z)$ на последовательности $\{\lambda_n\}$. Однако, для некоторых классов функций оценка (2.4) справедлива и при замене α на $\overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} \frac{\ln|\varphi(x)|}{x}$.

Это имеет, например, место, если

$$\varphi(z) = \int_{l}^{z} e^{az}\,\Psi(z)\,dz,$$

где $a > 0$, $\Psi(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\Psi(x) > 0$ при $x > 0$ и $\Psi(\lambda_n) = \Psi'(\lambda_n) = \cdots = \Psi^{(m_n-1)}(\lambda_n) = 0$.

Московский институт
химического машиностроения

Поступила 30 V 1961

Գ. Լ. Լունց

ԹԵՅԼՈՐ-ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՃՈՒՄԸ ԳՆԱՀԱՏԵԼԻՍ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Թեյլոր-Դիրիխլեի

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} \tag{1}$$

շարքի համար ապացուցվում է Կրամերի թեորեմի տիպի մի թեորեմ, որը $f(z)$ *-ի եզակիությունների դասավորությունը և (1) շարքի զուգամիտության տիրույթը կապում է*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big[z^{m_n} \varphi(\lambda_n) - \binom{m_n}{1} z^{m_n-1} \varphi'(\lambda_n) + \cdots +$$

$$+ (-1)^{m_n} \varphi^{(m_n)}(\lambda_n) \Big] e^{-\lambda_n z} \tag{2}$$

ֆունկցիայի եզակիությունների դասավորության և (2) շարքի զուգամիտության տիրույթի հետ, որտեղ $\varphi(z)$*-ը առաջին կարգի ամբողջ ֆունկցիա է։*

Այս թեորեմը թույլ է տալիս ապացուցելու հետևյալ պնդումը։

Եթե $\varphi(z)$ *էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիայի ածանցյալը* $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n > 0,\ \lambda_n \uparrow \infty)$ *հաջորդականության կետերում ունի* m_n *կարգի զերոներ, ընդ որում*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{m_n} = \rho < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = \infty,$$

ապա

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\varphi(\lambda_n)|}{\lambda_n} < \Psi(\rho, \sigma),$$

որտեղ σ*-ն* $\varphi(z)$ *ֆունկցիայի տիպն է և*

$$\Psi(\bar{\rho}, \sigma) = \frac{1}{2\bar{\rho}} \left[\sqrt{1 + 4\rho^2\sigma^2} - \ln(1 + \sqrt{1 + 4\rho^2\sigma^2}) + \ln 2 - 1\right].$$

Այս գնահատականը տրիվիալ չէ, քանի որ $0 < \bar{\rho} < \infty$*-ի դեպքում* $\Psi(\bar{\rho}, \sigma)$ *-ն միշտ խստորեն փոքր է, քան* σ*-ն։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лунц Г. Л.* О рядах типа Тейлора-Дирихле. Известия АН АрмССР, **14**, 2, 1961, стр. 7—16.
2. *Bernstein V.* Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.