

В. А. Шахбазян

Об инфракрасной асимптотике четырехвершинной функции в скалярной электродинамике

В работе [1] было исследовано асимптотическое поведение в инфракрасной области четырехвершинной функции Γ_4 , описывающей взаимодействие двух мезонов с нулевыми спинами. При этом было установлено, что для нахождения правильного асимптотического поведения указанной функции, необходимо предварительно определить инфракрасную асимптотику инвариантного заряда $hd_{1,1}^2$, дающего четырехбозонное взаимодействие. Было дано разумное определение второго инвариантного заряда в инфракрасной области, в результате чего удалось вывести дифференциальные уравнения Ли ренормализационной группы. Окончательные результаты были, однако, получены при частном выборе калибровки фотонной функции Грина $d_f^0 = 1$.

В настоящей заметке результаты статьи [1] обобщаются на случай произвольных d_f^0 .

1. Инфракрасная особенность четырехвершинной функции в теории возмущений

Для нахождения инфракрасной особенности четырехвершинной функции при произвольных d_f^0 к формулам (2а) и (2б) работы [1] следует добавить величину, которая получается при учете в выражении фотонной функции Грина члена

$$(d_f^0 - 1) \frac{k_n k_m}{k^2} - \frac{1}{k^2}$$

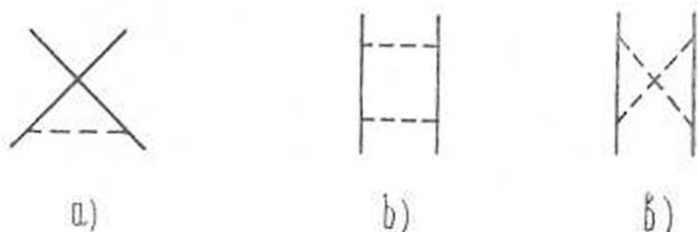
При этом добавочные члены для диаграммы 1а будут пропорциональны $(d_f^0 - 1)$. Из диаграмм 1б и 1в возникнут члены, пропорциональные $(d_f^0 - 1)$ и $(d_f^0 - 1)^2$. Прежде чем вычислить их, заметим следующее. Как показано в [2], для нахождения инфракрасных особенностей диаграмм 1а, 1б, 1в при $d_f^0 = 1$ приходится оценивать фейнмановские интегралы вида

$$\int \frac{d^4 k}{(2p_1 k - x^2)(2p_2 k - x^2)k^2} \quad (а)$$

где $x^2 = p^2 - m^2$, k^2 — квадрат 4-импульса внешних частиц, m — масса мезона, $x^2 \rightarrow 0$. При нахождении особенностей, пропорциональных $d_i^0 - 1$ и $(d_i^0 - 1)^2$, возникает необходимость оценок интегралов вида

$$\int \frac{(p_1 k)(p_2 k) d^4 k}{(2p_1 k - x^2)(2p_2 k - x^2)k^2}, \quad \int \frac{p_1 k(p_2 k) d^4 k}{(2p_1 k - x^2)(2p_2 k \pm x^2)k^2}, \quad (6)$$

вычисление которых при отличии от нуля x^2 довольно-таки затруднительно. Эту трудность, однако, можно обойти, если оценить особен-



Фиг. 1.

ность, введя массу фотона λ и положив $x^2 = 0$. Прямые вычисления показывают, что коэффициент при $\ln \frac{x^2}{m^2}$ в интеграле (a) в точности совпадает с таковым, получающимся при $\ln \frac{\lambda^2}{m^2}$ из интеграла

$\int \frac{d^4 k}{(2p_1 k)(2p_2 k)(k^2 - \lambda^2)}$. Поэтому и интегралы (б) можно оценить, положив $x^2 = 0$ и введя массу фотона λ .

Вычисление части диаграммы 1a, пропорциональной $(d_i^0 - 1)$, дает значение

$$\frac{e^2}{32\pi^2} (d_i^0 - 1) \ln \frac{x^2}{m^2}.$$

Части диаграмм 1б и 1в, пропорциональные $d_i^0 - 1$ и $(d_i^0 - 1)^2$, даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} & - \frac{ie^4}{4(2\pi)^4} \sum_{(p_1, p_2, p_3) \rightarrow (p', q, p-p), (p', q', p-q)}^{(q', p', q) \rightarrow (p', q', p-q)} [(d_i^0 - 1) \{J^{(1)}(p_1, p_2, p_3) + \\ & \quad + J^{(2)}(p_1, p_2, p_3)\} + (d_i^0 - 1)^2 J^{(3)}(p_1, p_2, p_3)] = \\ & - \frac{ie^4}{4(2\pi)^4} \sum_{(p_1, p_2, p_3) \rightarrow (p', q, p-p), (p-p, p-p-q)}^{(q', q, q) \rightarrow (p', q', p-q)} [(d_i^0 - 1) \{J^{(1)}(p_1, -p_2, p_3) + \\ & \quad + J^{(2)}(p_1, -p_2, p_3)\} + (d_i^0 - 1)^2 J^{(3)}(p_1, -p_2, p_3)], \end{aligned}$$

где

$$J^{(1)}(p_1, p_2, p_3) = \int \frac{d^4 k}{m^2 k^2} \frac{1}{[(p_1 - k)k]^2} \frac{1}{(p_1 - k)^2 k^2}.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(p_2 + k) k \right]^2 - (p_2 + k)^2 k^2 - \frac{1}{m^2} \left[|(p_1 - k) k| |(p_2 - k) k| |(p_1 - k) (p_2 + k)| \right. \\
& \quad \left. - |(p_2 + k) k|^2 (p_1 - k)^2 - |(p_1 - k) k|^2 (p_2 + k)^2 - \right. \\
& \quad \left. - (p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2 k^2 \right] \Bigg| \\
& \times \frac{1}{[m^2 - (p_1 - k)^2] [m^2 - (p_2 - k)^2] k^4 (p_3 - k)^2} \\
J^{(2)}(p_1, p_2, p_3) & = \int d^4 k \left\{ m^2 (p_3 - k)^2 - |(p_1 - k) (p_3 - k)|^2 - \right. \\
& \quad \left. - (p_1 - k)^2 (p_3 - k)^2 - |(p_2 - k) (p_3 - k)|^2 - (p_2 - k)^2 (p_3 - k)^2 - \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{m^2} \left[|(p_1 - k) (p_2 - k)| |(p_1 - k) (p_3 - k)| |(p_2 - k) (p_3 - k)| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (p_1 - k)^2 |(p_2 - k) (p_3 - k)|^2 - (p_2 - k)^2 |(p_1 - k) (p_3 - k)|^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2 (p_3 - k)^2 \right] \right\} \Bigg| \\
& \frac{1}{[m^2 - (p_1 - k)^2] [m^2 - (p_2 - k)^2] k^2 (p_3 - k)^2} \\
J^{(3)}(p_1, p_2, p_3) & = \int d^4 k \left\{ m^2 [k (p_3 - k)]^2 - |(p_1 - k) k| |(p_1 - k) (p_3 - k)| \right. \\
& \quad \left. - |k (p_3 - k)| - (p_1 - k)^2 |k (p_3 - k)|^2 + |(p_2 - k) k| \right. \\
& \quad \left. - |(p_2 + k) (p_3 - k)| |k (p_3 - k)| - (p_2 - k)^2 |k (p_3 - k)|^2 - \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{m^2} \left[|(p_1 - k) k| |(p_1 - k) (p_3 - k)| |(p_2 + k) k| |(p_2 - k) (p_3 - k)| - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (p_1 - k)^2 |(p_2 - k) k| |(p_2 - k) (p_3 - k)| |k (p_3 - k)| - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - |(p_1 - k) k| |(p_1 - k) (p_3 - k)| |k (p_3 - k)| (p_2 - k)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2 (p_3 - k) k \right] \right\} \Bigg| \\
& \frac{1}{[m^2 - (p_1 - k)^2] [m^2 - (p_2 - k)^2] k^2 k^2 (p_3 - k)^2}
\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения работы [2].

Вычисляя приведенные интегралы в инфракрасной области и используя формулы (2а) и (2б) работы [1], мы получим опять для Γ_4 выражение, даваемое формулой (1) работы [1], но с другими значениями $f_1(s_1, s_2, s_3)$ и $f_2(s_1, s_2, s_3)$

$$f_1(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ (1/8) (d_1^0 - 1) - \frac{s_1 - 1/2}{1 - s_1(s_1 - 1)} \ln \frac{1 - 1 - (s_1 - 1)/s_1}{1 - 1 - (s_1 - 1)/s_1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(s_2 - 1/2)}{1 + s_2(1 - s_2)} \ln \frac{1 - 1 + \sqrt{s_2(1 - s_2)}}{1 - 1 + \sqrt{s_2/(1 - s_2)}} + \\
& - \frac{(s_3 - 1/2)}{1 + s_3(1 - s_3)} \ln \frac{1 - 1 + \sqrt{s_3(1 - s_3)}}{1 - 1 + \sqrt{s_3/(1 - s_3)}} \Bigg\}, \quad (1.1) \\
f_2(s_1, s_2, s_3) = & \frac{1}{16\pi^2} \left\{ 1 + (d_1^2 - 1) + \left[2 \left(\frac{s_1 - s_2}{s_1} + \frac{s_1 - s_3}{s_2} \right) + d_1^2 \right] \times \right. \\
& - \frac{s_1 - 1/2}{4 + s_1(s_1 - 1)} \ln \frac{1 + 1 + (s_1 - 1)/s_1}{1 - 1 + (s_1 - 1)/s_1} \\
& - \frac{(s_2 - s_3 + d_1)}{s_1} \frac{s_2 - 1/2}{s_1 + s_2(1 - s_2)} \ln \frac{1 - 1 + \sqrt{s_2/(1 + |s_2|)}}{1 - 1 + \sqrt{s_2/(1 - s_2)}} \\
& \left. + \frac{(s_3 + s_1 - d_1)}{s_2} \frac{s_3 - 1/2}{s_1 + s_3(1 - s_3)} \ln \frac{1 - 1 + \sqrt{s_3/(1 - |s_3|)}}{1 - 1 + \sqrt{s_3/(1 - s_3)}} \right\} \\
(1.8) d_1^2(d_1^2 - 1) & \left[\frac{s_2}{s_1} \left(\frac{s_1}{s_2} + 1/2 \right) - \frac{s_2}{s_2} \left(\frac{s_1}{s_2} - 1/2 \right) - (1/4) + s_2 + 1/s_2 \right] \Bigg\}. \quad (1.2)
\end{aligned}$$

В формулах (1.1) и (1.2) использованы обозначения работы [1]. Они написаны для рассеяния частиц одного знака. Для рассеяния частиц противоположного знака следует произвести замену $s_1 \leftrightarrow s_3$, $s_2 \leftrightarrow s_2$.

2. Асимптотическое выражение Γ_1 при $p^2 \rightarrow m^2$

Так же, как и в [1], решая систему дифференциальных уравнений Ли для инвариантного заряда $\hbar d_{31}^2 \Gamma_1$ и Γ_1 , получаем

$$\begin{aligned}
h_1 \left(\frac{x-y}{1-y}, s_1, e^2, h_1 \right) = & \frac{1}{f_1(s_1)} \frac{1}{8\pi^2} (d_1^2 - 3) \times \\
& \left(\left| \frac{x-y}{1-y} \right|^{e^2 f_1(s_1)} \frac{e^2 d_1^2 - 3}{8\pi^2} - a \right) \left(h_1 \left[f_1(s_1) - \frac{d_1^2 - 3}{8\pi^2} \right] - e^2 f_2(s_1) \right), \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 \left(\frac{x-y}{1-y}, s_1, e^2, h_1 \right) = & \frac{1}{1-a} \left[\left| \frac{x-y}{1-y} \right|^{e^2 f_1(s_1)} - \right. \\
& \left. - a \left| \frac{x-y}{1-y} \right| \right] \frac{(3 - d_1^2) e^2}{8\pi^2}. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\text{где } a = e^2 f_2(s_i) \left[h_0 \left[f_1(s_i) - \frac{d-3}{8\pi^2} \right] + e^2 f_2(s_i) \right]^{-1}$$

Здесь $f_1(s_i)$ и $f_2(s_i)$ даются формулами (1.1) и (1.2).

Следует заметить, что второй инвариантный заряд зависит от d_i^0 [см. (2.1)]. В данном случае это обстоятельство не нарушает градиентной инвариантности теории, т. к. в инфракрасной области для поперечной функции Грина фотона $d = 1$, и первый инвариантный заряд равен просто константе e^2 .

Автор выражает глубокую благодарность Д. В. Ширкову за ценные дискуссии.

Физический институт
АН Армянской ССР

Получила 15 IV 1961

Վ. Ա. Շախբազյան

ՔԱՌԱԳԱԳԱԹ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԻՆՖՐԱԿԱՐՄԻՐ ԱՍԻՄՏՈՏԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ՝ ՍԿԱԼԱՐ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ առաջված է ընդհանուր արտահայտությունը քառա-
դաղաթ ֆունկցիայի ինֆրակարմիր ասիմպտոտիկայի համար, որը տեղի ունի
ֆոտոնի Գրինի ֆունկցիայի կամայական կալիբրովիայի դեպքում: Առաջված
բանաձևերը ներկայացնում են |1| աշխատության մեջ արտածված արտա-
հայտությունների ընդհանրացումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шахбазян В. А. Об инфракрасной катастрофе и скалярной квантовой электро-
динамике. «ЖЭТФ», **39**, 484, 1960.
2. Шахбазян В. А. О радиационных поправках низших порядков к скалярной кван-
товой электродинамике. «Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук», **14**, № 2, 1961.