

А. Г. Багдоев

Осесимметричная автомодельная задача для ударного давления

Рассматривается задача о проникании вглубь среды, занимающей нижнее полупространство, ударной волны, которая движется по поверхности полупространства по симметричному закону.

Обозначим через O точку возникновения давления на поверхности, выберем ось Ox в плоскости поверхности, ось Oy направим вглубь полупространства. Рассмотрим осесимметричную автомодельную задачу для случая сжимаемой жидкости.

Уравнение полнотроны имеет вид [1]

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right]. \quad (1)$$

Здесь P — давление жидкости, ρ — плотность, B , ρ_0 и n — константы.

На границе жидкости задано граничное условие

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} \bar{P}_1 P_a \left(\frac{x}{t} \right), & x \leq Vt, \\ 0, & x > Vt, \end{cases} \quad (2)$$

где V — скорость движения фронта давления на границе жидкости, $\bar{P}_1$ — постоянное давление на фронте, $P_a \left(\frac{x}{t} \right)$ — распределение давления за фронтом (точка A , фиг. 1), $P_a(V) = 1$. Пусть $V = c$, где c — скорость звука в жидкости.

Введем автомодельные координаты $\xi = \frac{x}{t}$, $\eta = \frac{y}{t}$.

Уравнение Эйлера и уравнение неразрывности движения для скоростей V_x , V_y и давления P имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial \xi} (V_x - \xi) + \frac{\partial V_x}{\partial \eta} (V_x - \xi) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial V_y}{\partial \xi} (V_x - \xi) + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} (V_y - \eta) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} (V_x - \xi) + \frac{\partial P}{\partial \eta} (V_y - \eta) + \rho c^2 \left(\frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} - \frac{V_x}{\xi} \right) = 0,$$

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho}.$$

Выведем уравнение характеристик для системы (3).

Вдоль характеристики $\eta(\xi)$ имеем

$$\frac{\partial V_x}{\partial \xi} = \frac{dV_x}{d\xi} - \frac{\partial V_x}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi}$$

и такое же соотношение для параметров V_y и P .

Подставив эти соотношения в (3) и записав условие однозначности решения системы, получим уравнения характеристик

$$V_y - \eta - \frac{d\eta}{d\xi} (V_x - \xi) = -c \sqrt{1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} = -\frac{c}{\cos \alpha}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dP}{d\xi} + \frac{d\rho}{d\xi} \rho c^2 &= -\frac{c \cos \alpha}{v \sin \alpha} - c \sin \alpha \rho c^2 \frac{d\alpha}{d\xi} \\ &= \rho v \rho c^2 \frac{-\sin \alpha}{v \sin \alpha} \frac{1}{\xi} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $v = 1/\sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, α — угол наклона характеристики к оси Ox (линии $A'B'$, фиг. 1).

В дальнейшем предполагается, что скорость движения жидкости направлена по нормали к характеристике, что выполняется для волн, догоняющих ударный фронт (AB , фиг. 1).

Если положить $V_x = v \sin \alpha$, $V_y = v \cos \alpha$, то уравнение характеристик первого семейства (4) запишется в виде

$$\frac{\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}} = c + v. \quad (6)$$

Из (1), для небольших $\frac{P}{Bn}$, имеем

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P}{Bn}\right), \quad c = a_0 \left(1 + \frac{P}{Bn} \frac{n-1}{2}\right), \quad (7)$$

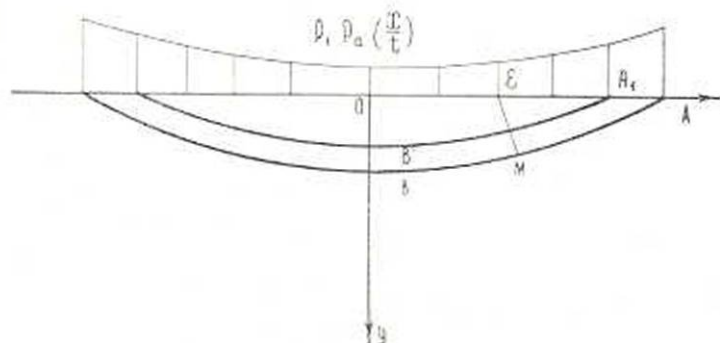
где ρ_0 , a_0 — начальные параметры жидкости.

Из условия на ударном фронте, с точностью до малых $\frac{P}{Bn}$ второго порядка, имеем

$$v = \frac{1}{a_{0,0}} \left(P - \frac{n-1}{4} \frac{P^2}{Bn} \right)$$

$$\text{или } dv \sim \frac{dP}{\rho c}$$

Предположение о малости $\frac{P}{Bn}$ выполняется при давлениях порядка 1000 атмосфер. Например, для воды $B = 3045 \text{ кг/см}^2$, $n = 7$ и при $\tilde{P}_1 = 1000 \text{ кг/см}^2$ имеем $\frac{P_1}{Bn} \sim 0,05$.



Фиг. 1.

Система (5)–(6) в общем виде просто не может быть проинтегрирована. Для давлений до 20000 атмосфер можно было бы проинтегрировать ее численно и найти решение задачи, пренебрегая влиянием ударной волны. Однако для небольших $\frac{P}{Bn}$ можно ограничиться двумя членами разложения, учитывающими, помимо линейного члена, малое второго порядка $\frac{P}{Bn}$.

Пусть $P = P_1 + \frac{1}{Bn} P_2$, $\eta = \eta_1 + \frac{1}{Bn} \eta_2$, где $\frac{P_1}{Bn}$ — малое первого порядка. Подставив значения η и P в (5) и в (6) и приравняв слагаемые с первой и второй степенями $\frac{P_1}{Bn}$, получим

$$2 \frac{dP_1}{dz} + \frac{\cos z_1}{a_0 \sin z_1} a_0 P_1 \frac{dz_1}{dz} - \frac{\sin z_1}{z} \frac{1}{z - a_0 \sin z_1} a_0 P_1 = 0, \quad (8)$$

$$2 \frac{dP_2}{dz} + \cos^3 z_1 \frac{d^2 \eta_2}{dz^2} \frac{a_0}{z} + \frac{1}{z} \frac{\cos^3 z_1}{z} \frac{d^2 \eta_2}{dz^2} a_0 P_1 - \sin z_1 a_0 P_1 \frac{3n-1}{4} - \frac{n-1}{2} a_0 \sin z_1 P_1^2 + a_0 \cos^3 z_1 \frac{d^2 \eta_2}{dz^2} P_1 - a_0 \sin z_1 P_1^2 - \frac{1}{(z - a_0 \sin z_1)^2} \sin z_1 = 0, \quad (9)$$

$$z_2 + (-z_1 + a_0 \sin \alpha_1) \frac{dz_2}{dz_1} = P_1 \frac{2}{\cos \alpha_1} \quad (10)$$

где $\alpha_1 = \text{const}$, причём $\sin \alpha_1 = \frac{a_0}{V}$.

P_1 соответствует линейной задаче, причём из (8) получаем вдоль $A'B'$ (фиг. 1) решение в виде

$$P_1 = \bar{P}_1 P_a(z_1) \sqrt{\frac{z_1 - a_0 \sin \alpha_1}{z_1}} \sqrt{\frac{z_1}{z_1 - a_0 \sin \alpha_1}},$$

где z_1' соответствует граничной точке A' (фиг. 1).

Очевидно, в силу малости $\frac{P}{Bn}$ из (7) на фронт будут влиять характеристики, отстоящие на расстоянии $\sim \frac{P}{Bn}$. Поэтому $z_1' = V - \frac{1}{Bn} z_1$, где z_1 — конечная величина. В силу этого имеем с точностью до малых второго порядка $\frac{P}{Bn}$

$$P_1 = \bar{P}_1 \sqrt{\frac{z_1 - a_0 \sin \alpha_1}{z_1}} \sqrt{\frac{1}{V - a_0 \sin \alpha_1}} \times \\ \times \bar{P}_1 \sqrt{\frac{z_1 - a_0 \sin \alpha_1}{z_1}} \sqrt{\frac{V}{V - a_0 \sin \alpha_1}} \frac{2P_a(V) - \frac{1}{V} + \frac{1}{V - a_0 \sin \alpha_1}}{2} z_1. \quad (11)$$

Первое слагаемое (11) дает решение линейной задачи в точке M (фиг. 1). Очевидно, в (10) достаточно ограничиться линейной частью P_1 из (11).

Интегрируя (10) при граничном условии $z_2 = 0$ при $z_1 = z_1'$ имеем

$$z_2 = \bar{P}_1 P_a(z_1) \sqrt{\frac{z_1 - a_0 \sin \alpha_1}{z_1}} \sqrt{\frac{z_1'}{z_1' - a_0 \sin \alpha_1}} \frac{1}{a_0 \sin \alpha_1} \times \\ \times \ln \frac{\sqrt{z_1' - a_0 \sin \alpha_1} \sqrt{z_1 - a_0 \sin \alpha_1}}{\sqrt{z_1' - a_0 \sin \alpha_1} \sqrt{z_1 - a_0 \sin \alpha_1}}, \quad (12)$$

причем в (12) можно считать $z_1' = V$.

В линейном приближении решение (4) имеет вид

$$z_1 = \frac{V - z_1}{\sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}}. \quad (13)$$

Очевидно $\frac{z_2}{Bn}$ представляет нелинейный добавок. Оценим величину

этого добавка. Пусть $\frac{a_0}{V} = \frac{1}{4} - \sin \alpha_1$, $z_1' = 4 + a_0 \sin \alpha_1$,

$\sqrt{\xi} = 3 \sqrt{a_0 \sin \alpha_1}$. Тогда из (12) имеем $\eta_2 \frac{1}{Bn} = 200 \text{ м/сек.}$ в то же время линейное η равно 750 м/сек. , то есть добавок составляет более 20% от общей η координаты характеристики или ударного фронта.

Для определения давления на фронте ударной волны необходимо решить уравнение (6), где вместо P стоит линейный член P_1 . Очевидно, решение уравнения (6) при граничном условии $\xi = \xi_2$, $\eta = 0$ имеет вид

$$\eta = \frac{\xi' - \xi}{\sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}} - \frac{1}{Bn} \eta_2 \quad (14)$$

где η_2 найдется из (12) разложением по степеням $\xi_2 = V - \xi_2$.

Разлагая (14) по степеням ξ , приближенно получим, что

$$\eta = \frac{V - \xi}{\sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}} - a \xi - b(\xi), \quad (15)$$

причем

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \left(\frac{V - \xi}{\left(\frac{V^2}{a_0^2} - 1 \right)^{3/2}} \frac{V^2}{a_0^2} \frac{n-1}{2} \frac{1}{Bn} P_n(V) \right) \left(\frac{V}{V - a_0 \sin \alpha_1} \right) \frac{\xi - a_0 \sin \alpha_1}{\xi} \\ &+ \frac{a_0}{Bn} \frac{n-1}{2} \frac{1}{\cos \alpha_1} \left(\xi - a_0 \sin \alpha_1 P_n(V) \right) \left(\frac{V}{V - a_0 \sin \alpha_1} + \frac{1}{a_0 \sin \alpha_1} \right) \\ &\times \ln \left(\frac{1 + \frac{V}{V - a_0 \sin \alpha_1}}{1 - \frac{V}{V - a_0 \sin \alpha_1}} \right) \frac{\xi - a_0 \sin \alpha_1}{a_0 \sin \alpha_1}, \\ b(\xi) &= - \frac{1}{\sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}} + \frac{V - \xi}{\left(\frac{V^2}{a_0^2} - 1 \right)^{3/2}} \frac{V}{a_0^2} \end{aligned}$$

Вдоль ударного фронта имеет место формула [2]

$$D = \frac{\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2}} = \frac{c + \eta^2 + a_0 \eta}{2} \quad (16)$$

где D — скорость ударной волны.

Характеристики (15) $\eta(\xi, \xi')$ нагоняют ударный фронт и взаимодействуют с ударным фронтом. Вдоль ударного фронта η является функцией только ξ , и в силу (15) ξ' также есть функция ξ . Из (15) и (16) получим уравнение для ξ в функции ξ вдоль AB (фиг. 1).

Решение этого уравнения при граничном условии $\xi = 0$, при $\xi = V$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \xi_1 \frac{\xi - V \sin^2 x_1}{b(\xi)(\xi - V \sin^2 x_1)} = \\ & - \int_V^{\xi} \left[(\xi - V \sin^2 x_1) \frac{a_0 \frac{n-1}{4Bn} P_a(V)}{b(\xi)(\xi - V \sin^2 x_1)} \right] \frac{\xi - a_0 \sin x_1}{\xi} \frac{V}{V - a_0 \sin x_1} + \\ & - \frac{a_0 \xi (\xi + V \sin^2 x_1 \cos x_1)}{b(\xi)(\xi - V \sin^2 x_1)} \Big| d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь вдоль ударной волны имеем с точностью до малых второго порядка

$$P = P_1 + \frac{1}{Bn} P_2$$

или

$$\begin{aligned} P = \bar{P}_1 \left[\frac{\xi - a_0 \sin x_1}{\xi} \right] \frac{V}{V - a_0 \sin x_1} + \\ + \bar{P}_1 \left[\frac{\xi - a_0 \sin x_1}{\xi} \right] \frac{V}{V - a_0 \sin x_1} \frac{2P_a(V)}{V} \frac{1}{2} \frac{1}{V - a_0 \sin x_1} \xi + \\ + \frac{P_2}{Bn}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\bar{\xi}_1$ дается (17), а P_2 определяется из (9), записанного в виде

$$\begin{aligned} P_2 = \int_V^{\xi} A_1(\xi), \quad \frac{dP_2}{d\xi} = A_2(\xi), \quad 2A_2(\xi) = \frac{a_0^2(n-1)}{4} \frac{dP_1}{d\xi} \frac{P_1 \cos^2 x_1}{\cos x_1 (\xi - a_0 \sin x_1)} + \\ + \frac{\cos^2 x_1}{\xi} \frac{a_0 \frac{n-1}{2} P_1^2}{(\xi - a_0 \sin x_1)} - \frac{1}{\xi} \sin x_1 a_0 P_1^2 \frac{3n-1}{4} \frac{1}{\xi - a_0 \sin x_1} - \\ - \frac{1}{\xi} \frac{a_0 \frac{n-1}{2}}{(\xi - a_0 \sin x_1)^2} \frac{\sin x_1 - a_0}{(\xi - a_0 \sin x_1)^2} P_1^2 - \frac{\cos^2 x_1}{\xi} \frac{1}{(\xi - a_0 \sin x_1)^2} a_0 P_1^2 \\ + \frac{1}{\xi} \sin x_1 \cos^2 x_1 a_0 P_2 P_1 \frac{1}{(\xi - a_0 \sin x_1)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, для определения P_2 получаются простые иррациональные интегралы.

Итак мы получили решение в точке ударной волны M (фиг. 1). Полученное решение является достаточно точным для давлений до 1000 кг/см^2 .

Ա. Գ. Բազդուեզ

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԱՎՏՈՄՈԴԵԼԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ
ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՑՆՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա Ա Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ արտածվում են սեղմելի հեղուկի տառնադասիմետրիկ անստամոգելային շարժման խառականքիստիկ առնչությունները և որոշվում են փոքր պարամետրի նկատմամբ ճիշտությամբ առաջին երկու անդամները: Հարվածային ճակատի կապակցությունների միջոցով այդ մոտավորություններին համապատասխան որոշվում է լուծումը հարվածային ճակատի վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Станюкович К. П. Неустойчивые движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1954.
2. Курант Г. и Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, М., 1950.