ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 4, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. А. Задоян

О задаче ползучести облученного стержня

Применяя соотношение между напряжением и деформацией ползучести, предложенное Ю. Н. Работновым [1], рассматривается задача изгиба облученной балки в условиях неустановившейся ползучести. Задача сводится к учету неоднородности материала, возникшей от облучения.

1°. Под влиянием облучения многие материалы значительно меняют свои механические характеристики. Имеется большое количество экспериментальных работ, посвященных исследованию упруго-пластических свойств облученных тел. Подробный обзор и литература по этим вопросам даны в статье В. С. Ленского [2]. Сравнительно мало изучен характер влияния облучения на ползучесть материалов. Кроме того, существующие результаты, как отмечено в [2], в некоторых случаях противоречивы. Однако, предполагая наличие экспериментальных характеристик ползучести, ниже рассмотрена задача чистого изгиба облученной металлической балки прямоугольного поперечного сечения.

Если на верхний ($x = h$) и нижний ($x = -h$) края этой балки падает нейтронный стационарный поток с одинаковой средней энергией и интенсивностью, то, по известным формулам, интенсивности в точке x от верхнего и нижнего облучений соответственно будут

$$I_1(x) = I_0 e^{-\mu(h-x)}, \quad I_2(x) = I_0 e^{-\mu(h+x)},$$

где $I_0 \left[\frac{нейтрон}{см^2\, сек}\right]$ — интенсивность облучения на поверхностях $x = \pm h$, μ — макроскопическое сечение материала. Суммарный поток нейтронов (доза облучения) от двухстороннего действия источников будет равен

$$\theta(x) = 2\theta_0 e^{-\mu h}\, \mathrm{ch}\, \mu x, \tag{1}$$

где $\theta_0 = I_0 \tau_0$, а τ_0 — время излучения.

2°. Положим, что рассматриваемая балка после облучения подвергается чистому изгибу при высокой температуре. Отличными от нуля будем считать компоненты деформации $\varepsilon_y = \varepsilon(x, t)$ и напряжения $\sigma_y = \sigma(x, t)$.

Предполагаем, что вследствие облучения меняются свойства ползучести материала. Зависимость между деформацией и напряжением [1] примем в виде

$$\varphi(\vartheta)\,\varepsilon^m(x, t) = \sigma(x, t) - \int_0^t \frac{\omega(\vartheta)}{f(t-\tau)}\,\sigma(x, \tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Вводимые функции $\varphi(\vartheta)$ и $\omega(\vartheta)$ учитывают влияние облучения на ползучесть материала и определяются из эксперимента.

Введя обозначения

$$\varphi(\vartheta) = \Phi(x), \quad \omega(\vartheta) = \Omega(x)$$

и гипотезу плоских сечений

$$\varepsilon(x, t) = \frac{x}{\rho(t)}, \tag{3}$$

где $\rho(t)$ — неизвестная кривизна оси балки, соотношение (2) перепишется в виде

$$\frac{\Phi(x)\,x^m}{\rho^m(t)} = \sigma(x, t) - \int_0^t \frac{\Omega(x)}{f(t-\tau)}\,\sigma(x, \tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Если до некоторого значения дозы облучения функции φ и ω можно аппроксимировать линейными функциями, то

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= A + 2\alpha\vartheta_0 e^{-\mu h}\,\mathrm{ch}\,\mu x, \\ \Omega(x) &= B + 2\beta\vartheta_0 e^{-\mu h}\,\mathrm{ch}\,\mu x. \end{aligned} \tag{5}$$

Положительные постоянные $A = \varphi(0)$, $B = \omega(0)$ представляют значения Φ и Ω для соответствующего необлученного стержня. Параметры α и β учитывают влияние облучения. Они определяются из эксперимента над облученными образцами.

Исходя из условия равновесия

$$2\int_0^h \sigma(x, t)\,x\,dx = H = \mathrm{const}, \tag{6}$$

где H — внешний изгибающий момент, и соотношения (4), для начального напряженного состояния получим

$$\sigma(x, 0) = \frac{H}{2J}\,\Phi(x)\,x^m, \tag{7}$$

где

$$J = \int_0^h \Phi(x)\,x^{m+1}\,dx. \tag{8}$$

Умножив обе части равенства (4) на $\frac{2x}{\Omega(x)}$ и проинтегрировав по x от нуля до h, получим

$$\frac{1}{\rho^m(t)} = \frac{H}{2J_0}\int_0^t \frac{d\tau}{f(t-\tau)} - \frac{1}{J_0}\int_0^h \frac{\sigma(\xi,\ t)\,\xi}{\Omega(\xi)}\,d\xi, \tag{9}$$

где

$$J_0 = \int_0^h \frac{\Phi(x)\,x^{m+1}}{\Omega(x)}\,dx. \tag{10}$$

Подставив (9) в (4) и использовав тождество

$$\frac{H}{2J}\Phi(x)\,x^m = \int_0^h \frac{\Phi(x)\,x^m\xi}{J}\,\sigma(\xi,\ t)\,d\xi \tag{11}$$

приходим к интегральному уравнению

$$\sigma(x,\ t) - \int_0^t N(x,\ t-\tau)\,\sigma(x,\ \tau)\,d\tau =$$

$$= F(x,\ t) - \int_0^h M(\xi,\ x)\,\sigma(\xi,\ t)\,d\xi, \tag{12}$$

где введены обозначения

$$F(x,\ t) = \frac{H}{2J}\Phi(x)\,x^m\left[1-\gamma\int_0^t \frac{d\tau}{f(t-\tau)}\right], \tag{13}$$

$$M(\xi,\ x) = \frac{\Phi(x)\,x^m\xi}{J}\left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)}-1\right], \tag{14}$$

$$N(x,\ t-\tau) = \frac{\Omega(x)}{f(t-\tau)}, \qquad \gamma = \frac{J}{J_0}. \tag{15}$$

Таким образом, задача определения напряжения в облученной балке приводится к интегральному уравнению (12), характеризующемуся ядрами Фредгольма $M(\xi,\ x)$ и Вольтерра $N(x,\ t-\tau)$.

3. Вводя операторы

$$MQ = \int_0^h M(\xi,\ x)\,Q(\xi,\ t)\,d\xi,$$

$$NQ = \int_0^t N(x,\ t-\tau)\,Q(x,\ \tau)\,d\tau, \tag{16}$$

уравнения (12) перепишем в виде

$$z = F + (M - N)\, z. \tag{17}$$

Для решения полученного уравнения воспользуемся методом последовательных приближений

$$z_0 = F,$$

. . . .

$$z_n = F + (M - N)\, z_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Отсюда

$$z_n = F + \sum_{k=1}^{n} (M - N)^k F. \tag{19}$$

Поскольку z_n представляет частичную сумму бесконечного ряда

$$F + \sum_{k=1}^{\infty} (M - N)^k F, \tag{20}$$

то для того, чтобы показать сходимость процесса последовательных приближений, достаточно доказать равномерную сходимость ряда (20).

Для значений аргументов $0 \leq x \leq h$, $0 \leq t \leq t_0 < \infty$ введя обозначения

$$F_0 = \max |F(x, t)| = \frac{H\Phi_0 h^m}{2J} \left| 1 - \gamma \int_0^{t_0} \frac{d\tau}{f(t_0 - \tau)} \right|,$$

$$D = \max \left\{ \int_0^h |M(\xi, x)|\, d\xi + \int_0^t |N(x, t - \tau)|\, d\tau \right\} =$$

$$= \frac{\Phi_0 h^{m+1}}{J} \int_0^h \left| \frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right| d\xi + \Omega_0 \int_0^{t_0} \frac{d\tau}{f(t_0 - \tau)}, \tag{21}$$

$$\Phi_0 = \max \Phi(x), \quad \Omega_0 = \max \Omega(x),$$

из (20) легко получить

$$|(M - N)\, F| < F_0 D,$$
$$|(M - N)^2 F| < F_0 D^2.$$

Предположим, что для $n-1$-го члена имеет место неравенство

$$|(M - N)^{n-1} F| < F_0 D^{n-1},$$

тогда для n-го члена будем иметь

$$|(M - N)^n F| < F_0 D^n.$$

Итак, ряд (20) мажорируется числовым рядом

$$F_0 (1 + D + D^2 + \ldots) = \frac{F_0}{1 - D}.$$

Следовательно, при условии $D<1$, что равносильно условиям

$$\int_0^h \left| \frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right| d\xi < \frac{J}{\Phi_0 h^{m+1}}$$

и

$$\int_0^{t_0} \frac{d\tau}{f(t_0-\tau)} < \frac{1}{\Omega_0} \left| 1 - \frac{\Phi_0 h^{m+1}}{J} \int_0^h \left| \frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right| d\xi \right|, \tag{22}$$

ряд (20) сходится абсолютно и равномерно.

Таким образом, при $n \to \infty$, $\sigma_n \to \sigma$, решением нашего уравнения будет

$$\sigma(x, t) = F(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (M-N)^k F. \tag{23}$$

Полученное решение единственное. Действительно, предполагая обратное и обозначив разность двух различных решений через $V(x, t)$, из (12) можем написать

$$V(x, t) + \int_0^t N(x, t-\tau) V(x, \tau) d\tau = \int_0^h M(\xi, x) V(\xi, t) d\xi. \tag{24}$$

Обозначив $V_0 = \max |V(x, t)|$ при $0 \leqslant x \leqslant h$ и $0 \leqslant t \leqslant t_0 < \infty$, заметим, что

$$V_0 (1-D) \leqslant 0.$$

Поскольку $1-D>0$, то $V_0 = 0$ и окончательно получим

$$V(x, t) = 0. \tag{25}$$

4°. Из (23) можно получить приближенную, но простую формулу для напряжения

$$\sigma(x, t) \approx \sigma_1(x, t) = F(x, t) + \int_0^h M(\xi, x) F(\xi, t) d\xi -$$

$$- \int_0^t N(x, t-\tau) F(x, \tau) d\tau. \tag{26}$$

Легко проверить, что

$$MF = \int_0^h M(\xi, x) F(\xi, t) d\xi = 0. \tag{27}$$

Тогда
$$\sigma_1(x, t) = \frac{Hx^m}{2J} \Phi(x) \left\{ 1 - [\Omega(x) - \gamma] \int_0^t \frac{d\tau}{f(t-\tau)} - \right.$$

$$\left. - \gamma \Omega(x) \int_0^t \frac{d\tau}{f(t-\tau)} \int_0^\tau \frac{dz}{f(\tau - z)} \right\}. \tag{28}$$

Полагая

$$f(t-\tau)=(t-\tau)^{\nu},\ 0<\nu<1,$$

получим

$$\sigma_1(x,\ t)=\frac{Hx^m}{2J}\,\Phi(x)\left\{1-\frac{\Omega(x)-\gamma}{1-\nu}\,t^{1-\nu}-\frac{\gamma\Omega(x)}{1-\nu}\,K(t)\right\}, \tag{29}$$

где

$$K(t)=\int\limits_0^t\frac{\tau^{1-\nu}}{(t-\tau)^{\nu}}\,d\tau. \tag{30}$$

Таким образом, при учете воздействия облучения (неоднородность материала), ползучесть оказывает влияние не только на деформацию, как в случае однородного стержня [1], но и на величину напряжения.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступила 15 III 1961

Մ. Ա. Զադոյան

ՃԱՌԱԳԱՅԹՎԱԾ ԶՈՂԻ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրվում է ճառագայթման ենթարկված մետաղյա ձողի սողքը մաքուր ծռման դեպքում:

Օգտագործելով Յ. Ն. Ռաբոտնովի կողմից առաջարկված սողքի տեսությունը և մտցնելով $\varphi(\vartheta)$ *և* $\omega(\vartheta)$ *ֆունկցիաները, որոնց միջոցով հաշվի է առնվում ճառագայթման ազդեցությունը, լարումների որոշման խնդիրը բերվում է*

$$\sigma(x,\ t)+\int\limits_0^t N(x,\ t-\tau)\,\sigma(x,\ \tau)\,d\tau=$$

$$=F(x,\ t)+\int\limits_0^h M(\xi,\ x)\,\sigma(\xi,\ t)\,d\xi \tag{*}$$

ինտեգրալ հավասարման, որտեղ $N(x,\ t-\tau)$ *և* $M(\xi,\ x)$ *համապատասխանաբար Վոլտերրայի և Ֆրեդհոլմի կորիզներ են, իսկ* $F(x,\ t)$ *ազատ անդամն է: Ստացված հավասարման լուծումը տրված է*

$$\sigma(x,\ t)=F(x,\ t)+\sum_{k=1}^{\infty}(M-N)^k F$$

տեսքով, որտեղ M*-ը և* N*-ը նշված կորիզների ինտեգրալ օպերատորներն են:*

Արտածված է ստացված շարքի հավասարաչափ և բացարձակ զուգամիտության պայմանը: Ապացուցված է (*) ինտեգրալ հավասարման լուծման միակությունը:

Ստացված են հաշվային մոտավոր բանաձևեր՝ լարման համար:

Հատկանշական է, որ ճառագայթման ազդեցությունը (նյութի անհամասեռությունը) ձողի վրա հաշվի առնելիս, ժամանակի ընթացքում փոխվում են ոչ միայն դեֆորմացիաները, ինչպես այդ տեղի ունի համասեռ ձողում, այլև լարումները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. „Вестник МГУ“, № 10, 1948.
2. *Ленский В. С.* Влияние радиоактивных облучений на механические свойства твердых тел. „Инженерный сборник“, 28, 1960.