ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 4, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян

Кручение тела вращения в условиях установившейся ползучести

В настоящей работе дается точное решение некоторых задач по кручению осесимметричной нагрузкой тел вращения, находящихся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между скоростью деформации и напряжением. Рассмотрен случай, когда вал переменного диаметра имеет форму круглого сплошного усеченного конуса или полого усеченного конуса и скручивается в первом случае сосредоточенными моментами, приложенными на торцах вала, а во втором случае — нагрузкой, распределенной на его боковой поверхности по степенному закону.

Рассмотрено также и кручение полой полусферы нагрузкой, приложенной на ее свободной поверхности.

Отметим, что полученное здесь решение легко переносится на соответствующие задачи теории пластичности при степенном упрочнении материала.

Решение этих задач, когда материал является упругим, дано в работах А. Феппля [1], А. Ш. Локшина [2], К. В. Солянника-Красса [3] и Б. Л. Абрамяна [4, 5].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим задачу о кручении тела вращения, находящегося в условиях установившейся ползучести.

Пусть тело находится под действием осесимметричной нагрузки. Поместим начало цилиндрической системы координат $r\varphi z$ в некоторой точке тела, направив ось z по направлению его оси.

Положим, как и при кручении упругих тел вращения, что компоненты напряжения и скорости деформаций, за исключением $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, $\gamma_{r\varphi}$ и $\gamma_{\varphi z}$, равны нулю, т. е.

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0,$$
$$\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0. \tag{1.1}$$

Согласно теории течения при установившейся ползучести [6], компоненты напряжения выражаются через компоненты скорости деформации следующими соотношениями

$$\tau_{r z} = f^*(\Gamma)\gamma_{r z},$$
$$\tau_{\varphi z} = f^*(\Gamma)\gamma_{\varphi z}, \tag{1.2}$$

где Γ — интенсивность скорости деформации.

Если интенсивность касательных напряжений обозначить через T, то для T и Γ будем иметь

$$T^2 = \tau_{r z}^2 + \tau_{\varphi z}^2,$$
$$\Gamma^2 = \gamma_{r z}^2 + \gamma_{\varphi z}^2. \tag{1.3}$$

При этом интенсивность скорости деформации является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений, которую условимся записать в форме

$$\Gamma = f(T)\,T, \quad T = f^*(\Gamma)\,\Gamma. \tag{1.4}$$

Здесь $f(T)$ или $f^*(\Gamma)$ некоторая функция, характерная для данного материала, определяемая из опытов на простую ползучесть.

В данном случае уравнение неразрывности деформации в цилиндрических координатах примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\gamma_{\varphi z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\gamma_{r \varphi}\right) = 0 \tag{1.5}$$

и будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, положить

$$\gamma_{\varphi z} = r\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \gamma_{r\varphi} = r\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{1.6}$$

где функция перемещения ψ зависит от r и z.

Выпишем уравнение равновесия для рассматриваемого случая

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2\tau_{\varphi z}) = 0. \tag{1.7}$$

Подставив выражение $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{\varphi z}$ из соотношения (1.2) в (1.7) и воспользовавшись (1.6), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3 f^*(\Gamma)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[r^3 f^*(\Gamma)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] = 0, \tag{1.8}$$

которому должна удовлетворять функция перемещения.

Пусть между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью скорости сдвига существует степенная зависимость вида

$$T = K\Gamma^{\mu}, \tag{1.9}$$

где K — константа ползучести, а μ — показатель ползучести, определяемый из опытов при испытании на простую ползучесть.

Экспериментальные данные показывают, что степенная зависимость вида (1.9) достаточно хорошо описывает опытные кривые для металлических сплавов в период их установившейся ползучести.

Тогда, согласно (1.2), (1.4), (1.6) и (1.9), уравнения, связывающие компоненты касательных напряжений и функции перемещения, примут вид

$$\tau_{r\varphi} = Kr^{\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1-\mu}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$\tau_{z\varphi} = Kr^{\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1-\mu}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial z}. \qquad (1.10)$$

Внеся (1.10) в (1.7), найдем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{2+\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1-\mu}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{r^{2+\varkappa}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1-\mu}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\} = 0. \qquad (1.11)$$

Пусть на границе осевого сечения задана нормальная производная функции перемещения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{1}{Kr^{\varkappa}}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1-\mu}{2}} S_{\nu}(r, z), \qquad (1.12)$$

где $S_{\nu} = \tau_{r\varphi} l + \tau_{z\varphi} m$ — проекция полного касательного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения, а l и m — направляющие косинусы внешней нормали к контуру, определяемые формулами

$$l = \cos(r, \nu) = \frac{dr}{d\nu} = \frac{dz}{ds},$$

$$m = \cos(z, \nu) = \frac{dz}{d\nu} = -\frac{dr}{ds}. \qquad (1.13)$$

Если обозначить через $M(s)$ крутящий момент внешних сил, распределенных на поверхности тела вращения между фиксированным поперечным сечением ($s = 0$) и поперечным сечением, определяемым расстоянием s по длине образующей тела, то будем иметь

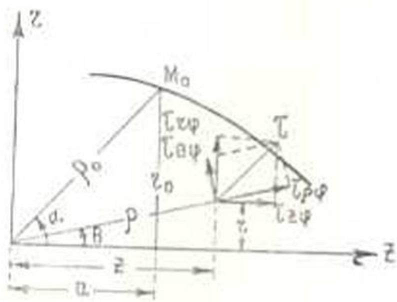
$$M(s) = 2\pi\int_0^s r^2(s)\, S_{\nu}\,[r(s),\ z(s)]\, ds. \qquad (1.14)$$

Переходя к сферическим координатам $r\theta\varphi$ (а в плоскости roz к полярным координатам ρ, θ или t, ζ)

$$r = \rho \sin\theta = \rho_0 e^t \sqrt{1-\zeta^2}, \qquad \zeta = \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}},$$

$$z = \rho\cos\theta = \rho_0 e^t \zeta, \qquad t = \ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\rho_0}, \tag{1.15}$$

где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор точки в осевом сечении тела вращения (фиг. 1), θ — угол наклона радиуса-вектора $\vec{\rho}$ к оси z, ρ_0 — расстояние от начала координат какой-нибудь произвольным образом выбранной точки M_0 на контуре осевого сечения тела. (1.11) представим в виде



Фиг. 1.

$$(1-\zeta^2)^{\frac{1+\mu}{2}} \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{2t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) \times H(\mu,\zeta)\right] - \zeta\sqrt{1-\zeta^2}\, e^{2t} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{\frac{3+\mu}{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \zeta\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) H(\mu,\zeta)\right] +$$

$$+ (1-\zeta^2)^{\frac{3+\mu}{2}} \zeta \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{2t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) H(\mu,\zeta)\right]$$

$$+ (1-\zeta^2)\, e^{2t}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{\frac{3+\mu}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) H(\mu,\zeta)\right] = 0. \tag{1.16}$$

Здесь

$$H(\mu,\zeta) = \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + (1-\zeta^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)^2\right]^{-\frac{1-\mu}{2}}. \tag{1.17}$$

В новых координатах компоненты напряжений $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{t\varphi}$ и $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\zeta\varphi}$ выразятся через функцию перемещения $\psi(t, \zeta)$ следующими формулами

$$\tau_{t\varphi} = K(1-\zeta^2)^{\frac{2+\mu}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial t} H(\mu,\zeta),$$

$$\tau_{\zeta\varphi} = -K(1-\zeta^2)^{\frac{1+\mu}{2}}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} H(\mu,\zeta). \tag{1.18}$$

§ 2. Решение основного уравнения (1.16)

Решение уравнения (1.16) будем искать в виде

$$\varphi(\zeta, t) = e^{mt}\varphi(\zeta), \tag{2.1}$$

где m — неизвестное постоянное число, а $\varphi(\zeta)$ — некоторая функция аргумента ζ, подлежащая определению в дальнейшем.

Внеся (2.1) в (1.16), получим

$$(2+\mu m)(1-\zeta^2)^{[illegible]} H_1(m, \mu, \zeta)\left[(1-\zeta^2)N_1(m, \zeta)\right.$$

$$\left.+\zeta N_2(m, \zeta)\right] - \zeta\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{[illegible]} N_1(m, \zeta) H_1(m, \mu, \zeta)\right]$$

$$+\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{[illegible]} N_2(m, \zeta) H_1(m, \mu, \zeta)\right] = 0, \tag{2.2}$$

где

$$N_1(m, \zeta) = m\varphi(\zeta) - \zeta\varphi'(\zeta),$$

$$N_2(m, \zeta) = m\zeta\varphi(\zeta) + (1-\zeta^2)\varphi'(\zeta), \tag{2.3}$$

$$H_1(m, \mu, \zeta) = \left[m^2\varphi^2(\zeta) + (1-\zeta^2)\varphi'^2(\zeta)\right]^{[illegible]}.$$

Таким образом, решение нелинейного дифференциального уравнения с частными производными свелось к решению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (2.2) с переменными коэффициентами.

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда можно получить точное решение уравнения (2.2).

1°. Пусть $m = 0$. Тогда уравнение (2.2) примет следующий вид

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{[illegible]}\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^{\mu}\right] = 0. \tag{2.4}$$

Решение этого уравнения есть

$$\varphi(\zeta) = C_1^{[illegible]}\int\limits_0^{\zeta}(1-\zeta^2)^{[illegible]}\,d\zeta + C_2, \tag{2.5}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Следовательно, в этом случае решением уравнения (1.16) будет

$$\varphi = C_1^{[illegible]}\int\limits_0^{\zeta}(1-\zeta^2)^{[illegible]}\,d\zeta + C_2. \tag{2.6}$$

2°. Пусть $m = 1$. Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$(2+\rho)(1-\zeta^2)^{\frac{1-\rho}{2}} H_1(1,\rho,\zeta)\left[(1-\zeta^2)N_1(1,\zeta)+\zeta N_2(1,\zeta)\right] -$$

$$-\zeta\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{\frac{1+\rho}{2}} N_1(1,\zeta)H_1(1,\rho,\zeta)\right] +$$

$$+(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{\frac{1+\rho}{2}} N_2(1,\zeta)H_1(1,\rho,\zeta)\right]=0. \tag{2.7}$$

Если положить $\varphi(\zeta)=\zeta$, то будем иметь

$$N_1(1,\zeta)=0,\quad N_2(1,\zeta)=1,\quad H_1(1,\rho,\zeta)=1 \tag{2.8}$$

и уравнение (2.7) будет тождественно удовлетворено.

Тогда решение уравнения (1.16) можно будет представить в виде

$$\psi(\zeta,t)=D_1\zeta e^{t}+D_2, \tag{2.9}$$

где D_1 и D_2 — постоянные интегрирования.

3. Положим теперь, что $m=-\frac{2}{\rho}$. Тогда будем иметь

$$\zeta\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{\frac{1+\rho}{2}} N_1\left(-\frac{2}{\rho},\zeta\right)H_1\left(-\frac{2}{\rho},\rho,\zeta\right)\right]-$$

$$-(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)^{\frac{1+\rho}{2}} N_2\left(-\frac{2}{\rho},\zeta\right)H_1\left(-\frac{2}{\rho},\rho,\zeta\right)\right]=0. \tag{2.10}$$

Нетрудно заметить, что решением этого уравнения является

$$\varphi(\zeta)=(1-\zeta^2)^{-\frac{1}{\rho}}. \tag{2.11}$$

Следовательно, в этом случае, согласно (2.1) и (2.11), функцию перемещения можно будет представить в виде

$$\psi(\zeta,t)=B_1 e^{-\frac{2}{\rho}t}(1-\zeta^2)^{-\frac{1}{\rho}}+B_2, \tag{2.12}$$

где B_1 и B_2 — постоянные интегрирования.

Очевидно, что во всех случаях постоянные интегрирования определяются из соответствующих контурных условий рассматриваемой задачи.

§ 3. Кручение конического вала

Рассмотрим круглый вал переменного сечения, имеющий форму усеченного конуса (фиг. 2). Пусть этот вал скручивается сосредоточенными моментами M_1 и M_2, приложенными на торцах, и нагрузкой, приложенной на боковой поверхности.

Пользуясь соотношением (1.14), будем иметь

$$M_1 = -2\pi\int_0^{r_0} r^2\tau_{\varphi z}(r, a)\,dr,$$

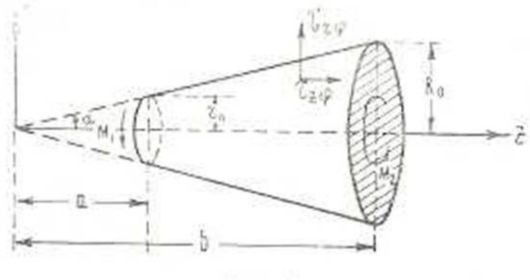
$$M_2 = 2\pi\int_0^{R_0} r^2\tau_{\varphi z}(r, b)\,dr. \qquad (3.1)$$

На боковой поверхности заданы напряжения

$$\tau_{z\varphi}(t, \zeta_1) = S_1[r(t, \zeta_1), z(t, \zeta_1)] = f_1(t), \qquad (3.2)$$

где

$$\zeta_1 = \cos\alpha.$$

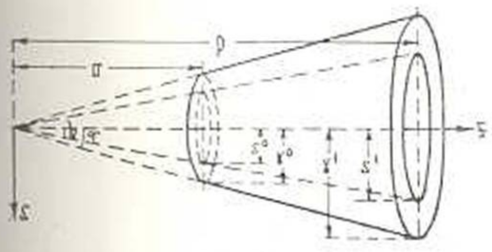


Фиг. 2.

Рассмотрим следующие случаи.

1°. Кручение полого усеченного конуса (фиг. 3), когда на боковой поверхности его приложена нагрузка, распределенная по степенному закону, а основания свободны от нагрузки, т. е.

$$M_1 = M_2 = 0, \qquad (3.3)$$



Фиг. 3.

$$\tau_{z\varphi}(t, \zeta_1) = g_1 e^{-2t},$$
$$\tau_{z\varphi}(t, \zeta_2) = g_2 e^{-2t}, \qquad (3.4)$$

где

$$\zeta_1 = \cos\alpha, \quad \zeta_2 = \cos\beta.$$

В этом случае возьмем решение уравнения (1.16) в форме (2.12)

$$\psi = B_1^{\frac{1}{\mu}} e^{-\frac{2t}{\mu}} (1-\zeta^2)^{-\frac{1}{\mu}}. \qquad (3.5)$$

Вычислив напряжения τ_{rz} и $\tau_{z\varphi}$ по формулам (1.10) и (1.18), получим

$$\tau_{rz} = 0,$$

$$\tau_{z\varphi} = B_1 K e^{-2t}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\mu}\frac{\zeta}{1-\zeta^2}. \qquad (3.6)$$

Из (3.1) и (3.6) следует, что условие (3.3) удовлетворяется. Удовлетворив условиям (3.4), находим

$$B_1 = -\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\mu}\frac{g_1}{K}\frac{1-\zeta_1^2}{\zeta_1} = -\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\mu}\frac{g_2}{K}\frac{1-\zeta_2^2}{\zeta_2}. \qquad (3.7)$$

причем равенство

$$g_1 \frac{1-\zeta_1^2}{\zeta_1} = g_2 \frac{1-\zeta_2^2}{\zeta_2} \tag{3.8}$$

представляет собой уравнение равновесия.

Таким образом, для определения функции перемещения ψ и компонентов касательных напряжений $\tau_{t\varphi}$ и $\tau_{\zeta\varphi}$ окончательно получим

$$\psi = \frac{\rho}{2}\left(-\frac{g_1}{K}\frac{1-\zeta_1^2}{\zeta_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} e^{-\frac{2}{\rho}t}(1-\zeta^2)^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &\tau_{t\varphi} = 0, \\ &\tau_{\zeta\varphi} = g_1\frac{1-\zeta_1^2}{\zeta_1} e^{-2t}\frac{\zeta}{1-\zeta^2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

2. Рассмотрим теперь другой случай, когда сплошной усеченный конус скручивается моментами M_1 и M_2, приложенными на его торцах $z = a$ и $z = b$ (фиг. 2), а боковая поверхность конуса свободна от нагрузки, т. е. имеем

$$\begin{aligned} &M_1 = -2\pi\int_0^{r_1} r^2\tau_{\varphi z}(r, a)\,dr, \\ &M_2 = 2\pi\int_0^{r_2} r^2\tau_{\varphi z}(r, b)\,dr, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\tau_{\zeta\varphi}(t, \zeta_1) - f_2(t) = 0. \tag{3.12}$$

Возьмем решение уравнения (1.16) в виде

$$\psi = -\frac{\rho}{3}A_1^{\frac{1}{\rho}} e^{-\frac{3}{\rho}t}. \tag{3.13}$$

Тогда для напряжений $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$, согласно (1.10) и (1.18), получим

$$\begin{aligned} &\tau_{r\varphi} = 0, \\ &\tau_{z\varphi} = A_1K\rho_0^3\frac{zr^{\rho}}{(r^2+z^2)^{\frac{1+\rho}{2}}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Удовлетворяя условиям (3.11), находим

$$\begin{aligned} &M_1 = -2\pi aKA_1\rho_0^3\int_0^{r_1}\frac{r^{2+\rho}}{(a^2+r^2)^{\frac{1+\rho}{2}}}\,dr, \\ &M_2 = 2\pi bKA_1\rho_0^3\int_0^{r_2}\frac{r^{2+\rho}}{(b^2+r^2)^{\frac{1+\rho}{2}}}\,dr. \end{aligned} \tag{3.15}$$

После некоторых преобразований выражениям (3.15) можно придать следующий вид

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -2\pi K A_1 \rho_0^3 I,\\
M_2 &= 2\pi K A_1 \rho_0^3 I,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

где

$$
I = \int_0^{\theta} \sin^{3+\mu}\theta\, d\theta. \tag{3.17}
$$

Из (3.16) следует, что

$$
A_1 = -\frac{M_1}{2\pi K \rho_0^3 I} = \frac{M_2}{2\pi K \rho_0^3 I}. \tag{3.18}
$$

Здесь

$$
M_1 + M_2 = 0 \tag{3.19}
$$

будет уравнением равновесия.

Тогда для определения функции перемещения ψ и компонентов касательных напряжений $\tau_{t\varphi}$ и $\tau_{\zeta\varphi}$ окончательно получим следующие формулы

$$
\psi = -\frac{\mu}{3}\left(\frac{M_2}{2\pi K \rho_0^3 I}\right)^{\frac{1}{\mu}} e^{-3t}, \tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{t\varphi} &= 0,\\
\tau_{\zeta\varphi} &= \frac{M_2}{2\pi}\,\frac{z r^{\mu}}{(r^2+z^2)^{\frac{4+\mu}{2}}}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

§ 4. Кручение полой полусферы

1. Рассмотрим тело вращения в виде полой полусферы с конической полостью (фиг. 4), которая скручивается распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, приложенной на его поверхности $\zeta = 0$ и $\zeta = \zeta_1$

$$
\begin{aligned}
\tau_{\zeta\varphi}(t, 0) &= a_1 = \text{const},\\
\tau_{\zeta\varphi}(t, \zeta_1) &= b_1 = \text{const},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

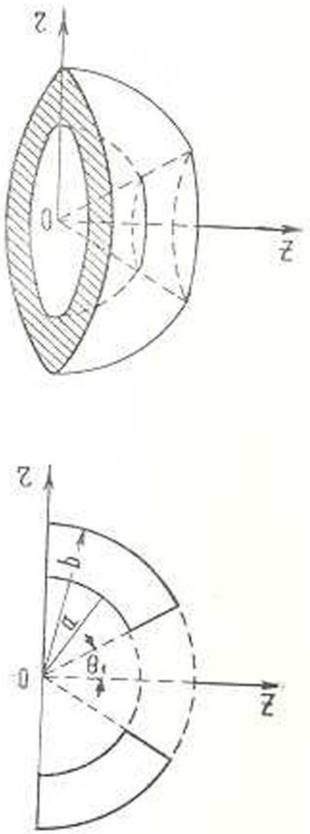
а сферические поверхности $t = 0$ и $t = t_1$ свободны от нагрузки

$$
\begin{aligned}
\tau_{t\varphi}(0, \zeta) &= 0,\\
\tau_{t\varphi}(t_1, \zeta) &= 0,
\end{aligned}
\qquad (0 \le \zeta \le \zeta_1),
\tag{4.2}
$$

где

$$
t_1 = \ln\frac{b}{a}, \qquad \zeta_1 = \cos\theta_1, \qquad 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}.
$$

Решение уравнения (1.16) берем в виде



Фиг. 4.

$$\psi = C^{\frac{1}{\nu}} \int_0^{\zeta} (1-\zeta^2)^{-\frac{1-\nu}{\nu}} d\zeta, \tag{4.3}$$

где C — постоянная интегрирования.

Вычисляя напряжения $\tau_{\zeta t}$ и $\tau_{t\zeta}$, будем иметь

$$\tau_{\zeta\zeta} = -\frac{CK}{1-\zeta^2}, \tag{4.4}$$

$$\tau_{t\zeta} = 0.$$

Удовлетворив условиям (4.1) и (4.2), получим

$$C = -\frac{a_1}{K} = -\frac{b_1(1-\zeta_1^2)}{K}. \tag{4.5}$$

Здесь

$$a_1 = b_1(1-\zeta_1^2) \tag{4.6}$$

будет уравнением равновесия.

Тогда для определения функции перемещения и компонентов касательных напряжений получим формулы

$$\psi = \left(-\frac{a_1}{K}\right)^{\frac{1}{\nu}} \int_0^{\zeta} (1-\zeta^2)^{-\frac{1-\nu}{\nu}} d\zeta, \tag{4.7}$$

$$\tau_{\zeta\zeta} = -\frac{a_1}{1-\zeta^2},$$

$$\tau_{t\zeta} = 0. \tag{4.8}$$

2. Рассмотрим тот случай, когда нагрузка, приложенная на сферической поверхности полой полусферы (фиг. 5), определяется степенным законом следующего вида

$$\begin{aligned} \tau_{t\zeta}(0, \zeta) &= a_0(1-\zeta^2)^{\frac{\nu}{2}}, \\ \tau_{t\zeta}(t_1, \zeta) &= b_0(1-\zeta^2)^{\frac{\nu}{2}}, \end{aligned} \quad (0 < \zeta < 1), \tag{4.9}$$

а на плоской части поверхности полусферы нагрузка отсутствует

$$\tau_{\zeta\zeta}(t, 0) = 0, \quad (0 < t < t_1). \tag{4.10}$$

Решение уравнения (1.16) берем в виде

$$\psi = -\frac{n}{3} C^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{3}{n}\gamma}, \tag{4.11}$$

где C — постоянная интегрирования.

Тогда выражения компонентов касательных напряжений $\tau_{\rho\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$ будут

$$\tau_{\rho z} = 0,$$
$$\tau_{\rho z} = K(1-\xi^2)^{-\frac{3}{2}} C e^{-3\gamma}. \tag{4.12}$$

Удовлетворив условиям (4.10), получим

$$C = \frac{a_0}{K} = \frac{b_0}{Ke^{3\gamma_1}}. \tag{4.13}$$

Здесь

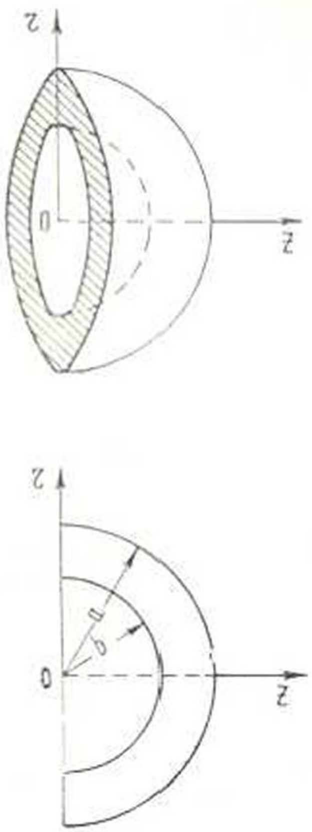
$$a_0 = be^{3\gamma_1} \tag{4.14}$$

будет уравнением равновесия.

Для определения функции перемещения и компонентов касательных напряжений получим формулы

$$\psi = -\frac{n}{3}\frac{a_0}{K} e^{-\frac{3}{n}\gamma}, \tag{4.15}$$

$$\tau_{\rho z} = 0,$$
$$\tau_{\rho z} = a_0(1-\xi^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-3\gamma}. \tag{4.16}$$



Фиг. 5.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 3 II 1961

Ն. Խ. Հարությունյան, Մ. Մ. Մանուկյան

ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ տրվում է առանցքասիմետրիկ բեռի տակ գտնվող պտտման մարմնի ոլորման մի քանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումը, երբ արագության դեֆորմացիայի և լարումների միջև գոյություն ունի աստիճանային կապ: Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ փոփոխական տրամագիծ ունեցող լիսեռն ունի հոծ հատված կոնի կամ սնամեջ հատված կոնի տեսք և առա-

ջին դեպքում ոլորվում է լիսեռի հիմքերի վրա կիրառված մոմենտներով, իսկ երկրորդ դեպքում՝ մի բեռով, որը կիրառված է նրա կողմնային մակերևույթի վրա աստիճանային օրենքով:

Քննարկվում է նաև սնամեջ կիսագնդի ոլորումը, երբ բեռը կիրառված է նրա ազատ մակերևույթի վրա:

Այս խնդիրների լուծման ժամանակ օգտագործվում է տեղափոխումների ֆունկցիան:

Խնդրի լուծումը բերվում է սֆերիկ կոորդինատների նկատմամբ մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը: (2.1) տեղադրման միջոցով այս հավասարման լուծումը բերվում է փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի ոչ գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը:

Քննարկվում է չորս դեպք, երբ հնարավոր է ստանալ այս հավասարման ճշգրիտ լուծումը: Այստեղ տրվում է պտտման մարմնի ոլորման վերաբերյալ վերը նշված չորս խնդիրների լուծումը: Յուրաքանչյուր խնդրի դեպքում որոշվում են տեղափոխումների ֆունկցիայի և լարումների կոմպոնենտների արտահայտությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феппль А.* (Föppl A.) Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. „Sitzungsberichte Bayerische Akademie der Wissenschaften“. München, Bd. 35, 1905, 249—262. Berichtigung 504.
2. *Зокшик А. Ш.* О кручении тела вращения. „Известия Екатеринославского горного института“, 9, № 1, 1923, 100—104.
3. *Солнцк-Красса К. В.* Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
4. *Абрамян Б. Л.* Кручение конических стержней и цилиндрических стержней с конической частью. „ДАН АрмССР“, 30, № 1, 1960, 31—38.
5. *Абрамян Б. Л.* О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. „ПММ“, № 6, 1960.
6. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.