ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 4, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян

Изгиб полого призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с выточками

Рассматривается изгиб полого призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса, имеющего изнутри, со стороны малой полуоси, симметрично расположенные выточки (фиг. 1).

Решение получено методом сведения задачи к бесконечным системам линейных уравнений [1—3]. Доказывается, что эти системы вполне регулярны. Выведены формулы для определения напряжений.

Изгиб стержня для ряда профилей с одной осью симметрии, когда изгибающая сила направлена параллельно к ней, рассматривался Моханом [5—7] и Косиро-Куроки [9]. Мохан рассмотрел профили в виде: 1) эллиптического полукольца, 2) сечения, ограниченного двумя гиперболами, эллипсом и прямой. Он рассмотрел также изгиб стержня из анизотропного материала, сечения которого ограничены двумя конфокальными эллипсами и двумя отрезками прямой. Куроки рассмотрел сечения, ограниченные: 1) двумя конфокальными эллипсами и гиперболой, 2) эллипсом и гиперболой, 3) двумя гиперболами и эллипсом. Изгиб балки из ортотропного материала с поперечным сечением, ограниченным эллипсом и его большой осью, когда изгибающая сила перпендикулярна к оси упругой симметрии, рассматривался в работе Чакраворти [8].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим изгиб полого призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса, имеющего изнутри, со стороны малой полуоси, симметрично расположенные выточки (фиг. 1). Боковая поверхность стержня свободна от нагрузки. Одно из торцовых сечений защемлено, а ко второму приложена распределенная нагрузка, статически эквивалентная одной силе, параллельной к оси симметрии.

Пусть внешняя изгибающая сила Q приложена на свободном конце стержня параллельно оси y и проходит через центр изгиба, т. е. изгиб не сопровождается кручением. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению [4]

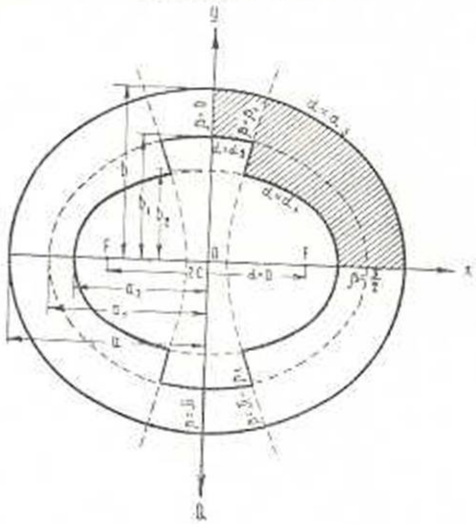
$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{Q\sigma x}{(1+\sigma)J} - \frac{Q}{2J} f'(x), \tag{1.1}$$

где J—момент инерции поперечного сечения относительно оси x, $f(x)$—произвольная функция, σ—коэффициент Пуассона.

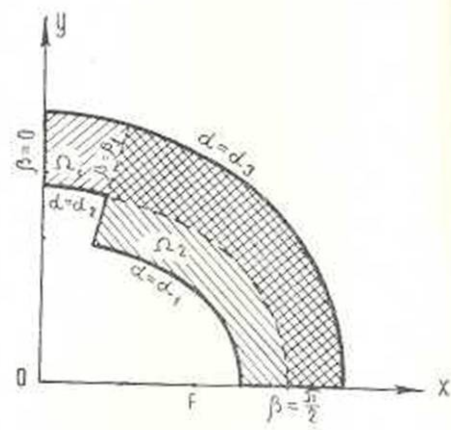
На контуре сечения функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{Q}{2J}\left[y^2 - f(x) \right]\frac{dx}{ds}. \tag{1.2}$$

В силу симметрии области сечения, функцию $F(x, y)$ определяем только в четвертой части области сечения. Чтобы решение, опреде-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ленное в этой части области, распространилось на всю область сечения, требуется, чтобы на осях симметрии области нормальная производная функции $F(x, y)$ равнялась нулю.

Положим

$$f(x) = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \tag{1.3}$$

где a и b—большая и малая полуоси наружного эллипса, и перейдем к эллиптическим координатам

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \\ y &= c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Тогда уравнение (1.1) и условие (1.2) примут вид

$$\nabla^2 F(\alpha, \beta) = \frac{A_1 Q c^3}{4J}(\operatorname{ch}\alpha \sin 3\beta + \operatorname{ch} 3\alpha \sin\beta), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{Qc^2 \operatorname{sh}^2\alpha_3}{2J}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\alpha \sin^2\beta}{\operatorname{ch}^2\alpha_3} + \frac{\operatorname{sh}^2\alpha \cos^2\beta}{\operatorname{sh}^2\alpha_3} - 1\right)\frac{d(\operatorname{ch}\alpha \sin\beta)}{ds}. \tag{1.6}$$

где

$$A_1 = A_2 + \mathrm{th}^2\alpha_3, \quad A_2 = \frac{\nu}{1+\nu}, \quad a = c\,\mathrm{ch}\alpha_3, \quad b = c\,\mathrm{sh}\alpha_3. \tag{1.7}$$

Напряжения $\tau_{\alpha z}$ и $\tau_{\beta z}$ выражаются через функцию напряжений $F(\alpha, \beta)$ соотношениями

$$\tau_{\alpha z} = g\left[-\frac{\partial F}{\partial \beta} + \frac{Qc^3\mathrm{sh}^2\alpha_3}{2J}\left(\frac{\mathrm{ch}^2\alpha\sin^2\beta}{\mathrm{ch}^2\alpha_3} + \frac{\mathrm{sh}^2\alpha\cos^2\beta}{\mathrm{sh}^2\alpha_3} - 1\right)\mathrm{ch}\alpha\cos\beta,\right.$$

$$\tau_{\beta z} = g\left[-\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{Qc^3\mathrm{sh}^2\alpha_3}{2J}\left(\frac{\mathrm{ch}^2\alpha\sin^2\beta}{\mathrm{ch}^2\alpha_3} + \frac{\mathrm{sh}^2\alpha\cos^2\beta}{\mathrm{sh}^2\alpha_3} - 1\right)\mathrm{sh}\alpha\sin\beta,\right. \tag{1.8}$$

где

$$g = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{ch}2\alpha - \cos 2\beta}}. \tag{1.9}$$

В эллиптических координатах функция $F(\alpha, \beta)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям

$$F(\alpha, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \beta}\right|_{\beta = \frac{\pi}{2}} = 0, \quad F(\alpha, \beta_1) = f_2(\alpha), \tag{1.10}$$

$$F(\alpha_1, \beta) = f_1(\beta), \quad F(\alpha_2, \beta) = f_3(\beta), \quad F(\alpha_3, \beta) = 0, \tag{1.11}$$

где

$$f_1(\beta) = \frac{Qc^3\mathrm{sh}^2\alpha_3\mathrm{ch}\alpha_1}{2J}\left[\frac{\sin\beta(\sin^2\beta - 3\mathrm{ch}^2\alpha_3)(\mathrm{sh}^2\alpha_3 - \mathrm{sh}^2\alpha_1)}{3\mathrm{sh}^2\alpha_3\mathrm{ch}^2\alpha_3} + c_1\right], \tag{1.12}$$

$$f_2(\alpha) = \frac{Qc^3\mathrm{sh}^2\alpha_3\sin\beta_1}{2J}\left[\frac{\mathrm{ch}\alpha(\mathrm{ch}^2\alpha - 3\mathrm{ch}^2\alpha_3)(\cos^2\beta_1 - \mathrm{sh}^2\alpha_3)}{3\mathrm{sh}^2\alpha_3\mathrm{ch}^2\alpha_3} + c_2\right], \tag{1.13}$$

$$f_3(\beta) = \frac{Qc^3\mathrm{ch}\alpha_2(\mathrm{sh}^2\alpha_3 - \mathrm{sh}^2\alpha_2)\sin\beta(\sin^2\beta - 3\mathrm{ch}^2\alpha_3)}{6J\mathrm{ch}^2\alpha_3}, \tag{1.14}$$

$$C_1 = \frac{\sin\beta_1}{3\mathrm{ch}\alpha_1\mathrm{sh}^2\alpha_3}\left[\mathrm{ch}\alpha_2(\mathrm{ch}2\alpha_2 + \cos 2\beta_1) - \mathrm{ch}\alpha_1(\mathrm{ch}2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)\right], \tag{1.15}$$

$$C_2 = \frac{\mathrm{ch}\alpha_2}{3\mathrm{sh}^2\alpha_3}(\mathrm{ch}2\alpha_2 + \cos 2\beta_1). \tag{1.16}$$

Выделенную область (фиг. 2) представляем в виде двух налегающих друг на друга областей Ω_1 и Ω_2.

Полагаем, что

$$F(\alpha, \beta) = \begin{cases} F_1(\alpha, \beta) & \text{в области } \Omega_1, \text{ где } \alpha > \alpha_2, \\ F_2(\alpha, \beta) & \text{в области } \Omega_2, \text{ где } \beta > \beta_1. \end{cases} \tag{1.17}$$

Функции F_1 и F_2 должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$F_1(\alpha, 0) = \frac{\partial F_1}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = 0, \tag{1.18}$$

$$F_1(\alpha_3, \beta) = 0, \quad F_1(\alpha_2, \beta) = \begin{cases} f_1(\beta) & \beta < \beta_1, \\ F_2(\alpha_2, \beta) & \beta > \beta_1, \end{cases} \tag{1.19}$$

$$F_2(\alpha_1, \beta) - f_1(\beta) = F_2(\alpha_3, \beta) = 0, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad F_2(\alpha, \beta_1) = \begin{cases} f_2(\alpha) & \alpha < \alpha_2, \\ F_1(\alpha, \beta_1) & \alpha > \alpha_2. \end{cases} \tag{1.21}$$

Следуя Г. А. Гринбергу [10], функции F_1 и F_2 ищем в виде ряда [1—3]

$$F_1(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\beta) \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_2) \quad (\alpha_2 < \alpha < \alpha_3), \tag{1.22}$$

$$F_2(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\alpha) \sin \mu_k (\beta - \beta_1) \qquad \left(\beta_1 < \beta < \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.23}$$

где

$$\gamma_k = \frac{k\pi}{\alpha_3 - \alpha_2}, \quad \mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{\pi - 2\beta_1}, \tag{1.24}$$

$$\psi_k(\beta) = \frac{2}{\alpha_3 - \alpha_2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} F_1(\alpha, \beta) \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_2)\, d\alpha, \tag{1.25}$$

$$\varphi_k(\alpha) = \frac{4}{\pi - 2\beta_1} \int_{\beta_1}^{\frac{\pi}{2}} F_2(\alpha, \beta) \sin \mu_k (\beta - \beta_1)\, d\beta. \tag{1.26}$$

§ 2. Определение функции напряжений

Умножив уравнение (1.5) для функции $F_1(\alpha, \beta)$ на $\frac{2}{\alpha_3 - \alpha_2} \times$ $\sin \gamma_k (\alpha - \alpha_2)$ и интегрируя полученное выражение по α в пределах от α_2 до α_3, для определения функции $\psi_k(\beta)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\psi_k''(\beta) - \psi_k(\beta)\gamma_k^2 = -\frac{2\gamma_k}{\alpha_3 - \alpha_2} F_1(\alpha_2, \beta) - \frac{A_1 Q c^3}{2J(\alpha_3 - \alpha_2)} \times$$

$$\times \frac{[\operatorname{ch}\alpha_2 + (-1)^{k-1} \operatorname{ch}\alpha_3]\gamma_k}{\gamma_k^2 + 1} \sin 3\beta +$$

$$+ \frac{A_1 Q c^3}{2J(\alpha_3 - \alpha_2)} \frac{[\operatorname{ch}3\alpha_2 + (-1)^{k-1} \operatorname{ch}3\alpha_3]\gamma_k}{\gamma_k^2 + 9} \sin\beta. \tag{2.1}$$

При этом использованы (1.25) и первое из условий (1.19).

Учитывая второе условие из (1.19) и интегрируя уравнение (2.1), для функции $\psi_k(\zeta)$ получим значения

$$\psi_k(\zeta) = \begin{cases} \psi_k^{(1)}(\zeta) & \zeta \leqslant \zeta_1, \\ \psi_k^{(2)}(\zeta) & \zeta \geqslant \zeta_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$\psi_k^{(1)}(\zeta) = A_k^{(1)}\,\mathrm{sh}\,\gamma_k\zeta + B_k^{(1)}\,\mathrm{ch}\,\gamma_k\zeta + \frac{Qc^3\,\mathrm{ch}\,\alpha_2\,(\mathrm{ch}\,2\alpha_3 - \mathrm{ch}\,2\alpha_2)}{24J(\alpha_3 - \alpha_2)\,\mathrm{ch}^2\alpha_3} \times$$

$$\times \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 9}\sin 3\zeta + 3(1 + 2\,\mathrm{ch}\,2\alpha_3)\sin\zeta\,\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 1}\right] -$$

$$- \frac{A_1 Qc^3}{2J(\alpha_3 - \alpha_2)}\,\frac{[\mathrm{ch}\,\alpha_2 + (-1)^{k+1}\,\mathrm{ch}\,\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)}\sin 3\zeta -$$

$$- \frac{A_1 Qc^3}{2J(\alpha_3 - \alpha_2)}\,\frac{[\mathrm{ch}\,3\alpha_2 + (-1)^{k+1}\,\mathrm{ch}\,3\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)}\sin\zeta, \tag{2.3}$$

$$\psi_k^{(2)}(\zeta) = A_k^{(2)}\,\mathrm{sh}\,\gamma_k\zeta + B_k^{(2)}\,\mathrm{ch}\,\gamma_k\zeta + \frac{2\gamma_k}{\alpha_3 - \alpha_2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(\alpha_2)\sin\mu_p(\zeta - \zeta_1)}{\mu_p^2 - \gamma_k^2} -$$

$$- \frac{A_1 Qc^3}{2J(\alpha_3 - \alpha_2)}\,\frac{[\mathrm{ch}\,\alpha_2 + (-1)^{k+1}\,\mathrm{ch}\,\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)}\sin 3\zeta -$$

$$- \frac{A_1 Qc^3}{2J(\alpha_3 - \alpha_2)}\,\frac{[\mathrm{ch}\,3\alpha_2 + (-1)^{k+1}\,\mathrm{ch}\,3\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)}\sin\zeta. \tag{2.4}$$

Согласно (1.18), (1.25) и (2.2) функции $\psi_k^{(1)}(\zeta)$ и $\psi_k^{(2)}(\zeta)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$\psi_k^{(1)}(0) = \psi_k^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \psi_k^{(1)}(\zeta_1) = \psi_k^{(2)}(\zeta_1), \tag{2.5}$$

$$\psi_k^{(1)\prime}(\zeta_1) = \psi_k^{(2)\prime}(\zeta_1). \tag{2.6}$$

Удовлетворив условиям (2.5), найдем

$$B_k^{(1)} = 0, \quad A_k^{(2)} = -A_k^{(1)}\,\frac{\mathrm{sh}\,\gamma_k\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\gamma_k\zeta_1}{\mathrm{ch}\,\gamma_k\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_1\right)} +$$

$$+ \frac{Qc^3\,\mathrm{ch}\,\alpha_2\,(\mathrm{ch}\,2\alpha_3 - \mathrm{ch}\,2\alpha_2)\,\mathrm{sh}\,\gamma_k\frac{\pi}{2}}{24J(\alpha_3 - \alpha_2)\,\mathrm{ch}^2\alpha_3\,\mathrm{ch}\,\gamma_k\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_1\right)} \times$$

$$\times \left[\sin 3\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+9} + 3\,(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+1} \right]. \tag{2.7}$$

$$B_k^{(2)} = A_k^{(1)} \frac{\operatorname{ch}\gamma_k \frac{\pi}{2} \operatorname{sh}\gamma_k\beta_1}{\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)} - \frac{Qc^3 \operatorname{ch}\alpha_2\,(\operatorname{ch}2\alpha_3-\operatorname{ch}2\alpha_2)\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}}{24J\,(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3 \operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)} \times$$

$$\times \left[\sin 3\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+9} + 3\,(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+1} \right].$$

Подставив эти значения в (2.3) и (2.4), будем иметь

$$\varphi_k^{(1)}(\beta) = A_k^{(1)} \operatorname{sh}\gamma_k\beta - \frac{Qc^3\operatorname{ch}\alpha_2\,(\operatorname{ch}2\alpha_3-\operatorname{ch}2\alpha_2)}{24J\,(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \times$$

$$\times \left[\sin 3\beta \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+9} + 3\,(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+1} \right] -$$

$$- \frac{A_1Qc^3}{2J\,(\alpha_3-\alpha_2)} \frac{[\operatorname{ch}\alpha_2+(-1)^{k+1}\operatorname{ch}\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)} \sin 3\beta -$$

$$- \frac{A_1Qc^3}{2J\,(\alpha_3-\alpha_2)} \frac{[\operatorname{ch}3\alpha_2+(-1)^{k+1}\operatorname{ch}3\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)} \sin\beta, \tag{2.8}$$

$$\varphi_k^{(2)}(\beta) = A_k^{(1)} \frac{\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1 \operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)} + \frac{2\gamma_k}{\alpha_3-\alpha_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(\alpha_2)\sin\mu_p(\beta-\beta_1)}{\mu_p^2+\gamma_k^2} -$$

$$- \frac{Qc^3\operatorname{ch}\alpha_2\,(\operatorname{ch}2\alpha_3-\operatorname{ch}2\alpha_2)\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{24J\,(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)} \times$$

$$\times \left[\sin 3\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+9} + 3\,(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+1} \right] -$$

$$- \frac{A_1Qc^3}{2J\,(\alpha_3-\alpha_2)} \frac{[\operatorname{ch}\alpha_2+(-1)^{k+1}\operatorname{ch}\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)} \sin 3\beta -$$

$$- \frac{A_1Qc^3}{2J\,(\alpha_3-\alpha_2)} \frac{[\operatorname{ch}3\alpha_2+(-1)^{k+1}\operatorname{ch}3\alpha_3]\,\gamma_k}{(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)} \sin\beta. \tag{2.9}$$

Удовлетворив теперь условию (2.6), получим следующую бесконечную систему линейных уравнений относительно двух неизвестных коэффициентов

$$A_k^{(1)} = \frac{2\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}{(\alpha_3 - \alpha_2)\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p \varphi_p(\alpha_2)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2} + \frac{Qc^3 \operatorname{ch}\alpha_2 (\operatorname{ch}2\alpha_3 - \operatorname{ch}2\alpha_2)}{24J(\alpha_3 - \alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}} \left| \sin 3\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 9} + 3(1 + 2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 1} \right| +$$

$$+ \frac{Qc^3 \operatorname{ch}\alpha_2 (\operatorname{ch}2\alpha_3 - \operatorname{ch}2\alpha_2)}{24J(\alpha_3 - \alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \frac{\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}} \times$$

$$\times \left| \cos 3\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 9} + 3(1 + 2\operatorname{ch}2\alpha_3)\cos\beta_1 \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 1} \right|. \tag{2.10}$$

Аналогичным образом для определения функции $\varphi_k(\alpha)$ получаем уравнение

$$\varphi_k''(\alpha) - \mu_k^2 \varphi_k(\alpha) = -\frac{2\mu_k}{\frac{\pi}{2} - \beta_1} F_2(\alpha, \beta_1) + \frac{A_1 Qc^3 \sin 3\beta_1}{J(\pi - 2\beta_1)} \frac{\mu_k}{\mu_k^2 - 9} \operatorname{ch}\alpha +$$

$$+ \frac{A_1 Qc^3 \sin\beta_1}{J(\pi - 2\beta_1)} \frac{\mu_k}{\mu_k^2 - 1} \operatorname{ch}3\alpha. \tag{2.11}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_k(\alpha) = \begin{cases} \varphi_k^{(1)}(\alpha) & \alpha \leq \alpha_2, \\ \varphi_k^{(2)}(\alpha) & \alpha \geq \alpha_2, \end{cases} \tag{2.12}$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(\alpha) = C_k^{(1)} \operatorname{sh}\mu_k\alpha + D_k^{(1)} \operatorname{ch}\mu_k\alpha + \frac{Qc^3 \sin\beta_1 (\operatorname{ch}2\alpha_3 + \cos 2\beta_1)}{12J(\pi - 2\beta_1)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \times$$

$$\times \left| \operatorname{ch}3\alpha \frac{\mu_k}{\mu_k^2 - 9} - 3(1 + 2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{ch}\alpha \frac{\mu_k}{\mu_k^2 - 1} \right| +$$

$$+ C_2 \frac{2Qc^3 \operatorname{sh}^2\alpha_3 \sin\beta_1}{J(\pi - 2\beta_1)\mu_k} - \frac{A_1 Qc^3 \sin 3\beta_1 \operatorname{ch}\alpha}{J(\pi - 2\beta_1)} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2 - 1)(\mu_k^2 - 9)} -$$

$$- \frac{A_1 Qc^3 \sin\beta_1 \operatorname{ch}3\alpha}{J(\pi - 2\beta_1)} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2 - 1)(\mu_k^2 - 9)}. \tag{2.13}$$

$$\varphi_k^{(2)}(\alpha) = C_k^{(2)} \operatorname{sh}\mu_k\alpha + D_k^{(2)} \operatorname{ch}\mu_k\alpha + \frac{4\mu_k}{\pi - 2\beta_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\psi_p(\beta_1)\sin\gamma_p(\alpha - \alpha_2)}{\gamma_p^2 - \mu_k^2} - \cdots$$

$$
-\frac{A_1 Qc^3 \sin 3\beta_1 \operatorname{ch}\alpha}{J(\pi-2\beta_1)} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)} - \frac{A_1 Qc^3 \sin\beta_1 \operatorname{ch}3\alpha}{J(\pi-2\beta_1)} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}. \tag{2.14}
$$

Функции $\varphi_k^{(1)}$ и $\varphi_k^{(2)}$ должны удовлетворять условиям

$$
\varphi_k^{(1)}(\alpha_1) = -\frac{Qc^3 \operatorname{ch}\alpha_1 (\operatorname{ch}2\alpha_3 - \operatorname{ch}2\alpha_1)}{12J(\pi-2\beta_1)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \times
$$

$$
\times \left[\sin 3\beta_1 \frac{\mu_k}{\mu_k^2-9} - 3(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta_1 \frac{\mu_k}{\mu_k^2-1}\right] + C_1 \frac{2Qc^3 \operatorname{ch}\alpha_1 \operatorname{sh}^2\alpha_3}{J(\pi-2\beta_1)\mu_k}, \tag{2.15}
$$

$$
\varphi_k^{(2)}(\alpha_3) = 0, \quad \varphi_k^{(1)}(\alpha_2) = \varphi_k^{(2)}(\alpha_2), \tag{2.16}
$$

$$
\varphi_k^{(1)\prime}(\alpha_2) = \varphi_k^{(2)\prime}(\alpha_2). \tag{2.17}
$$

Удовлетворив условиям (2.15), (2.16) и исключив из выражений (2.13) и (2.14) коэффициенты $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$, будем иметь

$$
\varphi_k^{(1)}(\alpha) = -D_k^{(1)} \frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1} + \frac{Qc^3 \sin\beta_1 (\operatorname{ch}2\alpha_3 + \cos 2\beta_1)}{12J(\pi-2\beta_1)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \times
$$

$$
\times \left[\operatorname{ch}3\alpha \frac{\mu_k}{\mu_k^2-9} - 3(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{ch}\alpha \frac{\mu_k}{\mu_k^2-1}\right] - C_2 \frac{2Qc^3 \sin\beta_1 \operatorname{sh}^2\alpha_3}{J(\pi-2\beta_1)\mu_k} -
$$

$$
-\frac{2A_1 Qc^3 \sin\beta_1 \operatorname{ch}\alpha (\operatorname{ch}2\alpha + \cos 2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)} +
$$

$$
+\frac{6Qc^3 \sin\beta_1 \operatorname{ch}\alpha_1 (\operatorname{ch}2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)} \frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1} \frac{1}{\mu_k(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)} +
$$

$$
+\frac{2A_2 Qc^3 \sin\beta_1 \operatorname{ch}\alpha_1 (\operatorname{ch}2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)} \frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}. \tag{2.18}
$$

Наконец, удовлетворив условию (2.17), получим вторую бесконечную систему

$$
D_k^{(1)} = -\frac{4\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1 \operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{(\pi-2\beta_1)\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p \psi_p(\beta_1)}{\gamma_p^2+\mu_k^2} +
$$

$$
+ C_2 \frac{2Qc^3 \sin\beta_1 \operatorname{sh}^2\alpha_3}{J(\pi-2\beta_1)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1 \operatorname{ch}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)} +
$$

$$
+\frac{Qc^3 \sin\beta_1 (\operatorname{ch}2\alpha_3 + \cos 2\beta_1)}{4J(\pi-2\beta_1)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1 \operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)} \times
$$

$$
\times \left[\operatorname{sh}3\alpha_2 \frac{1}{\mu_k^2-9} - (1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{sh}\alpha_2 \frac{1}{\mu_k^2-1}\right] + \frac{Qc^3 \sin\beta_1 (\operatorname{ch}2\alpha_3 + \cos 2\beta_1)}{12J(\pi-2\beta_1)\operatorname{ch}^2\alpha_3} \times
$$

$$
\times \frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1 \operatorname{ch}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)} \left[\operatorname{ch}3\alpha_2 \frac{\mu_k}{\mu_k^2-9} - 3(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{ch}\alpha_2 \frac{\mu_k}{\mu_k^2-9}\right] +
$$

$$
+\frac{6Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_1(\operatorname{ch}2\alpha_1-\cos2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)}\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_3}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\frac{1}{\mu_k(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}+
$$

$$
+\frac{2A_2Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_1(\operatorname{ch}2\alpha_1+\cos2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)}\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_3}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\frac{\mu_k}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}-
$$

$$
-\frac{2A_1Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_3-\cos2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)}\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1\operatorname{ch}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\frac{\mu_k}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}.
\tag{2.19}
$$

Введя новые неизвестные

$$
A_k^{(1)}\gamma_k\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1=m\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)Y_k,
\tag{2.20}
$$

$$
-D_k^{(1)}\mu_k\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1}=(\alpha_3-\alpha_2)X_k,
\tag{2.21}
$$

где m — пока произвольное число, подлежащее определению в дальнейшем, бесконечные системы (2.10) и (2.19) приведем к виду

$$
\left.
\begin{aligned}
X_k&=\sum_{p=1}^{\infty}a_{kp}Y_p+P_k,\\
Y_k&=\sum_{p=1}^{\infty}b_{kp}X_p+Q_k,
\end{aligned}
\right|\quad(k=1,2,\dots),
\tag{2.22}
$$

где введены обозначения

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{kp}&=\frac{2m\mu_k\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)(\gamma_p^2+\mu_k^2)},\\
b_{kp}&=\frac{4\gamma_k\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{m(\pi-2\beta_1)\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}(\mu_p^2+\gamma_k^2)},
\end{aligned}
\right|
\tag{2.23}
$$

$$
P_k=-\frac{Qc^3\sin\beta_1(\operatorname{ch}2\alpha_3-\cos2\beta_1)}{4J(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3}\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\times
$$

$$
\times\left[\operatorname{sh}3\alpha_2\frac{\mu_k}{\mu_k^2-9}-(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{sh}\alpha_2\frac{\mu_k}{\mu_k^2-1}\right]-
$$

$$
-\frac{Qc^3\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_3-\operatorname{ch}2\alpha_2)}{4J(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3}\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\times
$$

$$
\times\left[\sin3\beta_1\operatorname{cth}3(\alpha_3-\alpha_2)\frac{\mu_k}{\mu_k^2-9}+(1-2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta_1\operatorname{cth}(\alpha_3-\alpha_2)\frac{\mu_k}{\mu_k^2-1}\right]-
$$

$$-\frac{6Qc^3\sin\beta_1}{J(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{1}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}\left[\operatorname{ch}\alpha_1(\operatorname{ch}2\alpha_1+\cos2\beta_1)\times\right.$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_3\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}-\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)\times$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{ch}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\right]+\frac{2A_2Qc^3\sin\beta_1}{J(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{\mu_k^2}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}\times$$

$$\times\left[\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{ch}\alpha_1(\operatorname{ch}2\alpha_1+\cos2\beta_1)\frac{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_3\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\mu_k\alpha_1\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\right]-$$

$$-\frac{2A_1Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_3+\cos2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\frac{\mu_k^2}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}-$$

$$-\frac{A_1Qc^3\sin\beta_1}{4J(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}{\operatorname{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_1)}\left\{\frac{\mu_k}{\mu_k^2-1}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{ch}\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_3+\cos2\beta_1)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}-\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)\operatorname{cth}(\alpha_3-\alpha_2)\right]+\frac{3\mu_k}{\mu_k^2-9}\times$$

$$\left.\times\left[\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)\operatorname{cth}3(\alpha_3-\alpha_2)-\frac{\operatorname{ch}\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_3+\cos2\beta_1)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}\right]\right\}, \quad (2.24)$$

$$Q_k=\frac{Qc^3\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_3-\operatorname{ch}2\alpha_2)}{4mJ(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}}\times$$

$$\times\left[\cos3\beta_1\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+9}+(1-2\operatorname{ch}2\alpha_3)\cos\beta_1\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+1}\right]+$$

$$+\frac{Qc^3\sin\beta_1(\operatorname{ch}2\alpha_3+\cos2\beta_1)}{4mJ(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)\operatorname{ch}^2\alpha_3}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1\operatorname{sh}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}}\times$$

$$\times\left[\operatorname{ch}3\alpha_2\operatorname{ctg}3\beta_1\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+9}-(1-2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{ch}\alpha_2\operatorname{ctg}\beta_1\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+1}\right]+$$

$$+\frac{6Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)}{mJ(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1\operatorname{sh}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)}+$$

$$+\frac{2A_2Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)}{mJ(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1\operatorname{sh}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}}\frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2-1)(\gamma_k^2+9)}-$$

$$-\frac{A_1Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)}{4mJ(\pi-2\beta_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}}\times$$

$$\times\left|3\operatorname{ctg}3\beta_1\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2+9}-\operatorname{ctg}\beta_1\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2-1}\right|+\frac{Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_1(\operatorname{ch}2\alpha_1-\cos2\beta_1)}{mJ(\pi-2\beta_1)^2(\alpha_3-\alpha_2)}\times$$

$$\times\frac{8\gamma_k\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1\operatorname{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{\pi}{2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{3+A_2\mu_p^2}{(\mu_p^2-1)(\mu_p^2-9)(\mu_p^2-\gamma_k^2)}\frac{\operatorname{sh}\mu_p\alpha_2}{\operatorname{sh}\mu_p\alpha_1}.\quad(2.25)$$

Подставив значения (2.20) и (2.21) в (2.8), (2.9) и (2.18) и пользуясь соотношениями (1.17), (1.22) и (1.23), для функции напряжений $F(\alpha,\beta)$ получим следующие выражения

$$F(\alpha,\beta)=\frac{A_1Qc^3\sin\beta\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2-\cos2\beta)}{16J}\left|\frac{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-\frac{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|$$

$$+\frac{A_1Qc^3\sin\beta\operatorname{ch}\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_3-\cos2\beta)}{16J}\left|\frac{\operatorname{sh}3(\alpha-\alpha_2)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-\frac{\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|-$$

$$-\frac{Qc^3\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_3-\operatorname{ch}2\alpha_2)}{48J\operatorname{ch}^2\alpha_3}\left|\sin3\beta\frac{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}+\right.$$

$$\left.+3(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\sin\beta\frac{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|+$$

$$+m\frac{\pi-2\beta_1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k\operatorname{sh}\gamma_k\beta}{\gamma_k\operatorname{sh}\gamma_k\beta_1}\sin\gamma_k(\alpha-\alpha_2);\quad(\alpha_2<\alpha<\alpha_3,\ 0<\beta<\beta_1),\quad(2.26)$$

$$F(\alpha,\beta)=C_2\frac{Qc^3\sin\beta_1\operatorname{sh}^2\alpha_3}{2J}\frac{\alpha_3-\alpha}{\alpha_3-\alpha_2}+\frac{A_1Qc^3\sin\beta\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}2\alpha_2-\cos2\beta)}{16J}\times$$

$$\times\left|\frac{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-\frac{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|+\frac{A_1Qc^3\sin\beta\operatorname{ch}\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_3-\cos2\beta)}{16J}\times$$

$$\times\left|\frac{\operatorname{sh}3(\alpha-\alpha_2)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-\frac{\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|+\frac{Qc^3\sin\beta_1(\operatorname{ch}2\alpha_3-\cos2\beta_1)}{48J\operatorname{ch}^2\alpha_3}\times$$

$$\times\left|\operatorname{ch}3\alpha_2\frac{\sin3\beta\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha)}{\sin3\beta_1\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-3(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{ch}\alpha_2\frac{\sin\beta\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha)}{\sin\beta_1\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|-$$

$$-\frac{Qc^3\sin\beta_1\operatorname{ch}\alpha_2\operatorname{th}^2\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_2+\cos2\beta_1)}{2J}\times$$

$$\times\left[\frac{\sin 3\beta\,\mathrm{sh}\,3(\alpha_3-\alpha)}{\sin 3\beta_1\,\mathrm{sh}\,3(\alpha_3-\alpha_2)}-\frac{\sin\beta\,\mathrm{sh}(\alpha_3-\alpha)}{\sin\beta_1\,\mathrm{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right]$$

$$-\frac{3Qc^4\sin\beta_1\,\mathrm{ch}\alpha_2(\mathrm{ch}2\alpha_2+\cos 2\beta_1)}{J(\alpha_3-\alpha_2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\gamma_k(\alpha-\alpha_2)}{\gamma_k(\gamma_k^2+1)(\gamma_k^2+9)}\times$$

$$\times\frac{\mathrm{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\mathrm{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}-\frac{6Qc^4\sin\beta_1\,\mathrm{ch}\alpha_1(\mathrm{ch}2\alpha_1-\cos 2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k(\beta-\beta_1)}{\mu_k(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}\,\frac{\mathrm{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha)\,\mathrm{sh}\mu_k\alpha_2}{\mathrm{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)\,\mathrm{sh}\mu_k\alpha_1}-\frac{2A_2Qc^4\sin\beta_1}{J(\pi-2\beta_1)}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\,\mathrm{sh}\mu_k(\beta-\beta_1)}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}\,\frac{\mathrm{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha)}{\mathrm{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}\left[\mathrm{ch}\alpha_1(\mathrm{ch}2\alpha_1-\cos 2\beta_1)\frac{\mathrm{sh}\mu_k\alpha_2}{\mathrm{sh}\mu_k\alpha_1}-\right.$$

$$\left.-\mathrm{ch}\alpha_2(\mathrm{ch}2\alpha_2-\cos 2\beta_1)\right]+\frac{m}{2}(\pi-2\beta_1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k\,\mathrm{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\gamma_k\,\mathrm{ch}\gamma_k\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}\times$$

$$\times\sin\gamma_k(\alpha-\alpha_2)+(\alpha_3-\alpha_2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k\,\mathrm{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha)}{\mu_k\,\mathrm{sh}\mu_k(\alpha_3-\alpha_2)}\sin\mu_k(\beta-\beta_1)$$

$$\left(\alpha_2\leqslant\alpha\leqslant\alpha_3,\quad\beta_1\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right);\qquad(2.27)$$

$$F(\alpha,\beta)=C_4-\frac{Qc^4\mathrm{sh}^2\alpha_3\sin\beta_1}{2J}-\frac{A_1Qc^4\sin\beta_1\,\mathrm{ch}\alpha(\mathrm{ch}2\alpha-\cos 2\beta_1)}{16J}\times$$

$$\times\left[\frac{\sin 3\beta}{\sin 3\beta_1}-\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1}\right]-\frac{Qc^4\sin\beta_1(\mathrm{ch}2\alpha_3-\cos 2\beta_1)}{48J\,\mathrm{ch}^2\alpha_3}\times$$

$$\times\left[\mathrm{ch}3\alpha\frac{\sin 3\beta}{\sin 3\beta_1}-3(1-2\mathrm{ch}2\alpha_3)\,\mathrm{ch}\alpha\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1}\right]-$$

$$-\frac{6Qc^4\sin\beta_1\,\mathrm{ch}\alpha_1(\mathrm{ch}2\alpha_1-\cos 2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k(\beta-\beta_1)}{\mu_k(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}\,\frac{\mathrm{sh}\mu_k\alpha}{\mathrm{sh}\mu_k\alpha_1}+$$

$$+\frac{2A_2Qc^4\sin\beta_1\,\mathrm{ch}\alpha_1(\mathrm{ch}2\alpha_1-\cos 2\beta_1)}{J(\pi-2\beta_1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\sin\mu_k(\beta-\beta_1)}{(\mu_k^2-1)(\mu_k^2-9)}\,\frac{\mathrm{sh}\mu_k\alpha}{\mathrm{sh}\mu_k\alpha_1}+$$

$$+(\alpha_3-\alpha_2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k\,\mathrm{sh}\mu_k(\alpha-\alpha_1)}{\mu_k\,\mathrm{sh}\mu_k(\alpha_2-\alpha_1)}\sin\mu_k(\beta-\beta_1)\quad\left(\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2,\ \beta_1\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

$$(2.28)$$

В данном случае для J имеем

$$J = \frac{c^4\pi}{32}\left[\operatorname{ch}4\alpha_3 - \operatorname{sh}4\alpha_1 - 2(\operatorname{sh}2\alpha_3 - \operatorname{sh}2\alpha_1)\right] + \frac{c^4\sin 4\beta_1}{32}\left[2(\alpha_2 - \alpha_1) - \right.$$

$$\left. - (\operatorname{sh}2\alpha_2 - \operatorname{sh}2\alpha_1)\right] + \frac{c^4\sin^2 2\beta_1}{32}\left[4(\alpha_2 - \alpha_1) - (\operatorname{sh}4\alpha_2 - \operatorname{sh}4\alpha_1)\right] +$$

$$+ \frac{c^4\beta_1}{16}\left[2(\operatorname{sh}2\alpha_2 - \operatorname{sh}2\alpha_1) - (\operatorname{sh}4\alpha_2 - \operatorname{sh}4\alpha_1)\right]. \tag{2.29}$$

§ 3. Исследование бесконечных систем (2.22)

Используя выражения (2.23), находим

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{m}{2}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| < \frac{1}{m}. \tag{3.1}$$

При этом использованы значения сумм

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi}\right), \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}\operatorname{th} a\pi \end{aligned}\right| \tag{3.2}$$

и неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sh}(z_2 - z_1)\operatorname{sh}(z_3 - z_2)}{\operatorname{sh}(z_3 - z_1)} < \frac{1}{2}, \quad z_3 > z_2 > z_1, \\ &\frac{\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch}(z_2 - z_1)}{\operatorname{ch} z_2} < 1, \quad z_2 > z_1. \end{aligned}\right| \tag{3.3}$$

Постоянное число m определяем из равенства

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{m}, \quad m = \sqrt{2}. \tag{3.4}$$

Тогда для суммы коэффициентов систем (2.22) будем иметь следующие оценки

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| < \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3.5}$$

Из (2.24) и (2.25) видно, что свободные члены систем (2.22) ограничены сверху и при $k \to \infty$ стремятся к нулю.

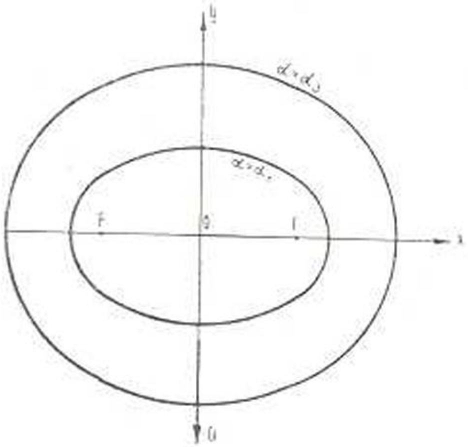
Таким образом, системы (2.22) оказались вполне регулярными и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены. Это обстоятельство дает возможность определить все неизвестные X_k и Y_k с желаемой точностью [11].

§ 4. Частные случаи

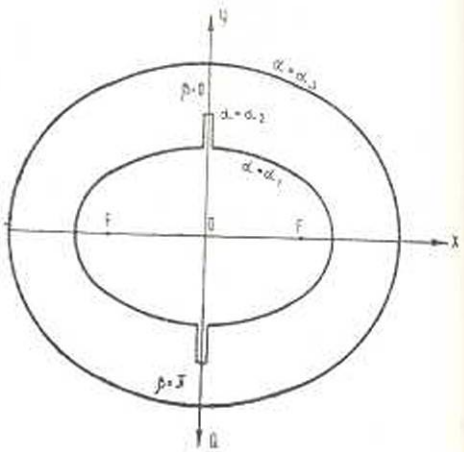
Переходя к пределу в (2.26) — (2.28) при $\alpha_1 = \alpha_2$, получим выражение функции напряжений при изгибе в конечном виде для стержня с поперечным сечением в виде эллиптического кольца (фиг. 3)

$$F(\alpha, \beta) = \frac{A_1 Qc^3 \sin\beta \operatorname{ch}\alpha_1 (\operatorname{ch}2\alpha_1 - \cos 2\beta)}{16J} \left[\frac{\operatorname{sh}3(\alpha_3 - \alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3 - \alpha_1)} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_3 - \alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3 - \alpha_1)} \right] +$$

$$+ \frac{A_1 Qc^3 \sin\beta \operatorname{ch}\alpha_3 (\operatorname{ch}2\alpha_3 + \cos 2\beta)}{16J} \left[\frac{\operatorname{sh}3(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3 - \alpha_1)} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh}(\alpha_3 - \alpha_1)} \right] -$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

$$- \frac{Qc^3 \operatorname{ch}\alpha_1 (\operatorname{ch}2\alpha_3 - \operatorname{ch}2\alpha_1)^2}{48J \operatorname{ch}^2\alpha_3} \left[\sin 3\beta \frac{\operatorname{sh}3(\alpha_3 - \alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3 - \alpha_1)} - \right.$$

$$\left. - 3(1 + 2\operatorname{ch}2\alpha_3) \sin\beta \frac{\operatorname{sh}(\alpha_3 - \alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3 - \alpha_1)} \right] \quad \left(\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2} \right). \tag{4.1}$$

При этом использованы значения

$$X_k = Y_k = 0, \tag{4.2}$$

получаемые из систем (2.22) соответствующим предельным переходом.

Для этого случая

$$J = \frac{c^4 \pi}{22} \left[\operatorname{sh}4\alpha_3 - \operatorname{sh}4\alpha_1 - 2(\operatorname{sh}2\alpha_3 - \operatorname{sh}2\alpha_1) \right]. \tag{4.3}$$

Переходя к пределу в (2.26)—(2.28) при $\beta_1 = 0$, в конечном виде получим выражение функции напряжений при изгибе для стержня с поперечным сечением в виде эллиптического кольца с внутренними разрезами (фиг. 4).

$$F(\alpha, \beta) = \frac{A_1 Qc^3 \sin\beta \operatorname{ch}\alpha_2 (\operatorname{ch}2\alpha_2 - \cos 2\beta)}{16J} \left[\frac{\operatorname{sh}3(\alpha_3 - \alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3 - \alpha_2)} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_3 - \alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3 - \alpha_2)} \right] +$$

$$+\frac{A_1Qc^3\sin\beta\operatorname{ch}\alpha_3(\operatorname{ch}2\alpha_3+\cos2\beta)}{16J}\left|\frac{\operatorname{sh}3(\alpha-\alpha_2)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-\frac{\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|+$$

$$+\frac{Qc^3}{72J}\left|\operatorname{ch}3\alpha_2\sin3\beta\,\frac{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-9(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{ch}\alpha_2\sin\beta\,\frac{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|-$$

$$-\frac{Qc^3\operatorname{ch}^2\alpha_2\operatorname{th}^2\alpha_3}{3J}\left|\frac{\sin3\beta\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}3(\alpha_3-\alpha_2)}-\frac{\sin\beta\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_3-\alpha_2)}\right|$$

$$\left(\alpha_2<\alpha<\alpha_3,\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right), \tag{4.4}$$

$$F(\alpha,\beta)=\frac{Qc^3}{72J}\left[\operatorname{ch}3\alpha\sin3\beta-9(1+2\operatorname{ch}2\alpha_3)\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\right]-$$

$$-\frac{A_1Qc^3\operatorname{ch}^3\alpha}{24J}\left[\sin3\beta-3\sin\beta\right]\qquad\left(\alpha_1<\alpha<\alpha_2,\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right). \tag{4.5}$$

При этом использованы значения

$$X_k=Y_k=0, \tag{4.6}$$

получаемые из систем (2.22) соответствующим предельным переходом.

Для этого случая

$$J=\frac{c^4\pi}{32}\left[\operatorname{sh}4\alpha_3-\operatorname{sh}4\alpha_1-2(\operatorname{sh}2\alpha_3-\operatorname{sh}2\alpha_1)\right]. \tag{4.7}$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 III 1961

Վ. Ս. Տոնոյան

ՓՈՐՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄՆԱՄԵՋ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է փոքր կիսաառանցքի նկատմամբ ներքից սիմետրիկ դասավորված փորվածքներով մնամեջ էլիպտական լայնական կտրվածքով պրիզմատիկ ձողի ծռման խնդիրը: Խնդրի լուծման ընթացքում հաշվի առնելով լայնական կտրվածքի տիրույթի սիմետրիկությունը, այդ տիրույթից անջատված է կորագիծ անկյուն: Այդ անկյունը իր հերթին ներկայացված է երկու իրար վրա դրված տիրույթների տեսքով:

Լարման ֆունկցիան կառուցված է այդ տիրույթներից յուրաքանչյուրում առանձին-առանձին: Որպեսզի այդ ֆունկցիաները հանդիսանան մեկը մյուսի անընդհատ շարունակությունը, իրար վրա դրված տիրույթների ընդհանուր մասի եզրագծի վրա այդ ֆունկցիաները հավասարեցված են [11]: Խնդրի լուծումը հանգել է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծման: Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմները լիովին ռեգուլյար են: Արտածված են լարումները որոշելու համար բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде криволинейного уголка. „ДАН АрмССР“, **31**, № 5, 1961.
2. *Абрамян Б. Л., Тоноян В. С.* Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с выточками. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, **13**, № 5, 1960.
3. *Тоноян В. С.* Кручение полого призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с выточкой. „Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение“, № 1, 1961.
4. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. ОГИЗ, Гостехиздат М.—Л., 1947.
5. *Mohan R.* Some simple problems of flexure. —Part I. „Zeit. angew. Math. und Mech.“, 1956, 36, № 11—12, 427—432.
6. *Mohan R.* Some flexure problems. Part II. „Proc. Rajasthan Acad. Sci.“ 1956, 6, July 6—16.
7. *Mohan R.* Flexure of a beam of non-isotropic material having a section bounded by two confocal ellipses and a straight edge. „Proc. Rajasthan Acad. Sci.“ 5, May. 1955, 15—22.
8. *Chakravorti A.* Centre of flexure of a beam of orthotropic material having a section bounded by an ellipse and its major axis. „Zeit. angew. Math. und Mech.“, 39, No. 7—8, 1959, 309—313.
9. *Koshiro Kuroki.* Sheering stresses of elliptic pipe and bar with notches. „Proc. of the 2-nd Japan National Congress for App. Mech.“ 1952, 73—77.
10. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
11. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950, 662.