ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 4, 1961 Физико-математические науки

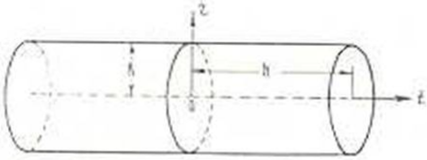
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян

К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала

Осесимметричной деформацией анизотропных тел занимались С. Г. Лехницкий [1—3], Эллиотт [4], Ху Хай-чан [5], В. Новацкий [6], Чакраворти [7] и другие исследователи. В их работах, в основном, рассматривались частные случаи нагружения. В тех же работах, где рассматривались случаи более общего нагружения, некоторые из граничных условий удовлетворяются в интегральной форме, т. е. решения даются в приближенном виде.

В настоящей работе дано точное решение задачи осесимметричной деформации круглого цилиндра радиусом R и высотой $2h$ из трансверсально-изотропного материала, когда внешняя нагрузка распределена симметрично относительно средней плоскости $z=0$ (фиг. 1). Задача сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что полученные системы регулярны и имеют ограниченные сверху свободные члены.



Фиг. 1.

При решении задачи мы пользуемся формулами Эллиотта-Чакраворти, но отметим следующий факт. В работах Лехницкого [1,2] получены формулы для напряжений при осесимметричной деформации тел вращения из трансверсально-изотропного материала, выраженные через одну „бигармоническую" функцию

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \varphi = 0$$

где

$$\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad i=1, 2, \tag{1}$$

а s_1^2, s_2^2 выражаются через коэффициенты анизотропии a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33}, a_{44}. Если вместо „бигармонической" функции $\varphi(r, z)$ ввести новые „гармонические" функции $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{II}$$

$$\nabla_i^2 \varphi_i(r, z) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{III}$$

то, пользуясь равенством $\nabla_1 \nabla_2 \varphi = \nabla_2 \nabla_1 \varphi$, легко убедиться, что уравнение (I) будет удовлетворено.

Подстановкой (II), в случае осесимметричной деформации, из формул Лехницкого получаются формулы Эллиотта [4], которые в дальнейшем использовал Чакраворти в своей работе [7]. Если допустить, что тело из трансверсально-изотропного материала находится в состоянии осесимметричной деформации и одновременно подвергается также кручению, то подстановкой (II) из формул Лехницкого [1,2] получатся все формулы Эллиотта [4].

За ось z цилиндрической системы координат примем ось трансверсально-изотропного цилиндра, имеющего плоскости изотропии, перпендикулярные к оси цилиндра. Начало координат поместим в центре цилиндра, а полярную ось r направим произвольно. Тогда уравнения обобщенного закона Гука примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11} e_{rr} + c_{12} e_{\theta\theta} + c_{13} e_{zz}, & \tau_{rz} &= c_{44} e_{rz}, \\ \sigma_\theta &= c_{21} e_{rr} + c_{11} e_{\theta\theta} + c_{13} e_{zz}, & \tau_{\theta z} &= c_{44} e_{\theta z}, \\ \sigma_z &= c_{13} e_{rr} + c_{13} e_{\theta\theta} + c_{33} e_{zz}, & \tau_{r\theta} &= c_{66} e_{r\theta}; \end{aligned}$$

$$c_{66} = 1/2\,(c_{11} - c_{12}).$$

При осесимметричной деформации формулы для напряжений и перемещений, выраженные через две „гармонические" функции $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$, имеют вид [4—7]

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \\ w &= k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{c_{11} - c_{12}}{r}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right) - c_{44}\left[(1 + k_1)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (1 + k_2)\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}\right], \\ \sigma_\theta &= \frac{c_{11} - c_{12}}{r}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right) + \left[(k_1 c_{13} - \nu_1^2 c_{12})\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (k_2 c_{13} - \nu_2^2 c_{12})\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}\right], \\ \sigma_z &= (k_1 c_{33} - \nu_1^2 c_{13})\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + (k_2 c_{33} - \nu_2^2 c_{13})\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, \\ \tau_{rz} &= c_{44}\left[(1 + k_1)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} + (1 + k_2)\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z}\right], \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ν_1^2 и ν_2^2 — корни уравнения

$$c_{11}c_{44}\nu^4 + [c_{13}(c_{13} + 2c_{44}) - c_{11}c_{33}]\nu^2 + c_{33}c_{44} = 0, \tag{3}$$

а значения k_1 и k_2, соответствующие значениям ν_1^2 и ν_2^2, определяются из условия

$$\frac{c_{44} + k_i(c_{13} + c_{44})}{c_{11}} = \frac{k_i c_{33}}{(c_{13} + c_{44}) + k_i c_{11}} = \nu_i^2. \tag{4}$$

Функции $\varphi_1(r, z)$ и $\varphi_2(r, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_1^2\varphi_1 + \nu_1^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = 0, \qquad \nabla_1^2\varphi_2 + \nu_2^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} = 0, \tag{5}$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Корни уравнения (3) ν_1^2 и ν_2^2 или действительные, или сопряженные комплексные числа. Оба случая встречаются на практике. Например, для магния они—действительные числа, а для цинка они—сопряженные комплексные числа [4]. Из уравнения (4) видно, что значения k_1 и k_2 также или действительные, или сопряженные комплексные числа. Из (5) следует, что функции φ_1 и φ_2 должны быть или обе действительными, или сопряженными комплексными функциями. При таких условиях выражения (1,2) для перемещений и напряжений всегда принимают действительные значения. Из решения уравнения (3) следует, что если ν_1^2 и ν_2^2 действительные, то они положительные. В дальнейшем, для определенности примем, что ν_1 и ν_2 положительны. Когда ν_1^2 и ν_2^2 комплексные числа, мы должны предположить, что действительные части ν_1 и ν_2 положительны, т. е.

$$\mathrm{Re}\,\nu_1 = \mathrm{Re}\,\nu_2 > 0.$$

Для изотропного тела, когда

$$c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = c_{13} = \lambda, \quad c_{44} = \mu,$$

получим

$$\nu_1 = \nu_2 = k_1 = k_2 = 1. \tag{6}$$

В остальных случаях эти корни, вообще говоря, не равны между собою.

Решая уравнения (5) методом разделения переменных, для функции $\varphi_i(r, z)$ получим следующую фундаментальную систему

$$\varphi_i(r, z) = \begin{cases} [AI_0(\nu_i\lambda r) + BK_0(\nu_i\lambda r)]\,[C\sin\lambda z - D\cos\lambda z], \\ \left[A_1\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu z}{\nu_i} + B_1\mathrm{ch}\,\frac{\mu z}{\nu_i}\right][C_1J_0(\mu r) + D_1Y_0(\mu r)], \end{cases} \quad (i = 1, 2) \tag{7}$$

где λ и μ произвольные действительные параметры.

Здесь I_i, K_i — функции Бесселя i-го порядка от мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода, а J_i и Y_i — функции Бесселя первого и второго рода с действительным аргументом.

Отметим, что функции

$$z, \quad \frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_i^2} \tag{7'}$$

также являются решениями уравнений (5).

Функции φ_i для сплошного цилиндра ищем в виде

$$\varphi_i(r, z) = a_i z + b_i\left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_i^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} I_0(\nu_i \lambda_k r)\cos\lambda_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k^{(i)}\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{\nu_i} + C_k^{(i)}\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{\nu_i}\right)J_0(\mu_k r), \quad (i = 1, 2), \tag{8}$$

где $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{h}$, а μ_k — корни уравнения $J_1(\mu_k R) = 0$.

Подставляя значения φ_i из (8) в (1) и (2), для напряжений и перемещений получим следующие выражения

$$u(r, z) = r(b_1 + b_2) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\nu_1 A_k^{(1)} I_1(\nu_1\lambda_k r) + \nu_2 A_k^{(2)} I_1(\nu_2\lambda_k r)\right]\lambda_k\cos\lambda_k z -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k^{(1)}\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{\nu_1} + C_k^{(1)}\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{\nu_1} + B_k^{(2)}\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{\nu_2} + C_k^{(2)}\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{\nu_2}\right)\mu_k J_1(\mu_k r), \tag{9}$$

$$w(r, z) = a_1 k_1 + a_2 k_2 - 2z\left(\frac{b_1 k_1}{\nu_1^2} + \frac{b_2 k_2}{\nu_2^2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k^{(1)} k_1 I_0(\nu_1\lambda_k r) +\right.$$

$$\left. + A_k^{(2)} k_2 I_0(\nu_2\lambda_k r)\right]\lambda_k\cos\lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k_1}{\nu_1}B_k^{(1)}\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{\nu_1} - \frac{k_1}{\nu_1}C_k^{(1)}\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{\nu_1} +\right.$$

$$\left. + \frac{k_2}{\nu_2}B_k^{(2)}\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{\nu_2} + \frac{k_2}{\nu_2}C_k^{(2)}\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{\nu_2}\right)\mu_k J_0(\mu_k r), \tag{10}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = -c_{44}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\nu_1(1 + k_1)A_k^{(1)} I_1(\nu_1\lambda_k r) + \nu_2(1 + k_2)A_k^{(2)} I_1(\nu_2\lambda_k r)\right] \times$$

$$\times \lambda_k^2\sin\lambda_k z - c_{44}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1 - k_1}{\nu_1}B_k^{(1)}\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1 + k_1}{\nu_1}C_k^{(1)}\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{\nu_1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1 + k_2}{\nu_2}B_k^{(2)}\operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{\nu_2} + \frac{1 - k_2}{\nu_2}C_k^{(2)}\operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{\nu_2}\right)\mu_k^2 J_1(\mu_k r), \tag{11}$$

$$\sigma_z(r, z) = -2c_{44}\left[(1 + k_1)b_1 + (1 + k_2)b_2\right] - \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k_1 c_{33} - \nu_1^2 c_{13})A_k^{(1)} I_0(\nu_1\lambda_k r) +\right.$$

$$+ (k_2 c_{33} - \nu_2^2 c_{13}) A_k^{(2)} I_0(\nu_2 \lambda_k r) \Big] \lambda_k^2 \cos \lambda_k z - c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(1+k_1) B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} +$$

$$+ (1+k_1) C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + (1+k_2) B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} +$$

$$+ (1+k_2) C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \Big] \mu_k^2 J_0(\mu_k r), \tag{12}$$

$$\sigma_r(r, z) = -(c_{11} - c_{12})(b_1 + b_2) + 2c_{44} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1^2} b_1 + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} b_2 \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^{(1)} \left[c_{44}(1+k_1) I_0(\nu_1 \lambda_k r) - \nu_1 (c_{11} - c_{12}) \frac{I_1(\nu_1 \lambda_k r)}{\lambda_k r} \right] + \right.$$

$$\left. + A_k^{(2)} \left[c_{44}(1+k_2) I_0(\nu_2 \lambda_k r) - \nu_2 (c_{11} - c_{12}) \frac{I_1(\nu_2 \lambda_k r)}{\lambda_k r} \right] \right\} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z +$$

$$+ \frac{c_{11} - c_{12}}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \times$$

$$\times \mu_k J_1(\mu_k r) - c_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k_1}{\nu_1^2} B_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \frac{1+k_1}{\nu_1^2} C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} B_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{\nu_2} + \frac{1+k_2}{\nu_2^2} C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2} \right) \mu_k^2 J_0(\mu_k r). \tag{13}$$

Рассмотрим напряженное состояние круглого цилиндра, когда внешняя нагрузка симметрична относительно плоскости $z = 0$ и представлена следующим образом

$$\tau_{rz}(R, z) = f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin \lambda_k z,$$

$$(0 \le z \le h)$$

$$\sigma_r(R, z) = f_2(z) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k' \cos \lambda_k z,$$

$$\tag{14}$$

$$\tau_{rz}(r, h) = f_3(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k J_1(\mu_k r),$$

$$(0 \le r \le R)$$

$$\sigma_z(r, h) = f_4(r) = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k' J_0(\mu_k r).$$

Здесь мы допускаем, что функции f_i кусочно-непрерывны и имеют ограниченные изменения в соответствующих интервалах. В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси z и относительно плоскости $z = 0$ имеем

$$\tau_{rz}(0, z) = u(0, z) = 0, \tag{15}$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = w(r, 0) = 0. \tag{16}$$

Легко видеть, что условия (15) удовлетворяются тождественно.

Удовлетворив условиям (14) и (16), для неизвестных коэффициентов получим следующие значения

$$A_k^{(1)} = \frac{1}{\nu_1(\nu_1^2 - \nu_2^2)(1+k_1)\lambda_k^2 I_1(\nu_1\lambda_k R)}\left[\frac{(-1)^{k+1} m X_k}{\lambda_k} + \frac{\nu_2^2 \gamma_k}{c_{44}}\right],$$

$$A_k^{(2)} = \frac{1}{\nu_2(\nu_2^2 - \nu_1^2)(1+k_2)\lambda_k^2 I_1(\nu_2\lambda_k R)}\left[\frac{(-1)^{k+1} m X_k}{\lambda_k} + \frac{\nu_1^2 \gamma_k}{c_{44}}\right], \tag{17}$$

$$C_k^{(1)} = \frac{\nu_1}{(1+k_1)(\nu_2^2 - \nu_1^2)\mu_k^2 \operatorname{sh}\frac{\mu_k h}{\nu_1}}\left[\frac{Y_k}{\mu_k J_0(\mu_k R)} + \frac{\delta_k \nu_1^2}{c_{44}}\right],$$

$$C_k^{(2)} = \frac{\nu_2}{(1+k_2)(\nu_1^2 - \nu_2^2)\mu_k^2 \operatorname{sh}\frac{\mu_k h}{\nu_2}}\left[\frac{Y_k}{\mu_k J_0(\mu_k R)} + \frac{\delta_k \nu_2^2}{c_{44}}\right], \tag{18}$$

$$B_k^{(1)} = B_k^{(2)} = a_1 k_1 + a_2 k_2 = 0, \tag{19}$$

где

$$m = \frac{R}{h}.$$

Коэффициенты b_1 и b_2 определяются из уравнений

$$(1+k_1) b_1 + (1+k_2) b_2 = -\frac{\delta_0}{2c_{44}} + \frac{1}{c_{44}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \gamma_k}{\lambda_k R},$$

$$b_1\left[2c_{44}\frac{1+k_1}{\nu_1^2} - c_{11} + c_{12}\right] + b_2\left[2c_{44}\frac{1+k_2}{\nu_2^2} - c_{11} + c_{12}\right] =$$

$$= \gamma_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_k J_0(\mu_k R)}{\mu_k h}, \tag{20}$$

а для неизвестных постоянных X_k и Y_k получим бесконечную систему линейных уравнений

$$X_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} Y_k + \alpha_p,$$

$$(p = 1, 2, \cdots), \tag{21}$$

$$Y_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} X_k + \beta_p,$$

где

$$a_{kp} = \frac{2\lambda_p^3}{h\omega_p} \frac{1}{(\mu_k^2 + \nu_1^2\lambda_p^2)(\mu_k^2 + \nu_2^2\lambda_p^2)},$$

$$b_{kp} = -\frac{2\mu_p^3}{R\psi_p} \frac{1}{(\mu_p^2 + \nu_1^2\lambda_k^2)(\mu_p^2 + \nu_2^2\lambda_k^2)}, \tag{22}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{\omega_p}\left\{\frac{\gamma_p\lambda_p(-1)^p}{c_{44}} - \frac{2\lambda_p}{hc_{44}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_k\mu_k^3 J_0(\mu_k R)}{(\mu_k^2 + \nu_1^2\lambda_p^2)(\mu_k^2 + \nu_2^2\lambda_p^2)} - \right.$$

$$- \frac{(-1)^p\gamma_p\lambda_p}{c_{44}(\nu_1^2 - \nu_2^2)}\left[\frac{I_0(\nu_1\lambda_p R)}{\nu_1 I_1(\nu_1\lambda_p R)}\nu_2^2 - \frac{I_0(\nu_2\lambda_p R)}{\nu_2 I_1(\nu_2\lambda_p R)}\nu_1^2 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}\lambda_p R}\left(\frac{\nu_1^2}{1 + k_2} - \frac{\nu_2^2}{1 + k_1}\right)\right]\right\}, \tag{23}$$

$$\beta_p = \frac{1}{\psi_p}\left\{\frac{\delta_p\mu_p J_0(\mu_p R)}{c_{44}} - \frac{2\mu_p\nu_1^2\nu_2^2}{Rc_{44}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda_k^3\gamma_k}{(\mu_p^2 + \nu_1^2\lambda_k^2)(\mu_p^2 + \nu_2^2\lambda_k^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_p\mu_p J_0(\mu_p R)}{c_{44}(\nu_2^2 - \nu_1^2)}\left(\nu_1^2 \operatorname{cth}\frac{\mu_p h}{\nu_1} - \nu_2^2 \operatorname{cth}\frac{\mu_p h}{\nu_2}\right)\right\}, \tag{24}$$

$$\omega_p = \frac{m}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\left[\frac{I_0(\nu_1\lambda_p R)}{\nu_1 I_1(\nu_1\lambda_p R)} - \frac{I_0(\nu_2\lambda_p R)}{\nu_2 I_1(\nu_2\lambda_p R)} + \frac{(k_1 - k_2)(c_{11} - c_{12})}{c_{44}(1 + k_1)(1 + k_2)\lambda_p R}\right],$$

$$\psi_p = \frac{1}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\left[\nu_1 \operatorname{cth}\frac{\mu_p h}{\nu_1} - \nu_2 \operatorname{cth}\frac{\mu_p h}{\nu_2}\right]. \tag{25}$$

Свободные члены системы (21) ограничены сверху. Покажем, что полученная система (21) регулярна. Пользуясь формулами [11, 12]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_p^2 + \nu_1^2\lambda_k^2)(\mu_p^2 + \nu_2^2\lambda_k^2)} = \frac{h}{2\mu_p^3(\nu_2^2 - \nu_1^2)} \times$$

$$\times\left(\nu_2 \operatorname{cth}\frac{\mu_p h}{\nu_2} - \nu_1 \operatorname{cth}\frac{\mu_p h}{\nu_1} + \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{\mu_p h}\right), \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_k^2 + \nu_1^2\lambda_p^2)(\mu_k^2 + \nu_2^2\lambda_p^2)} = \frac{R}{2\lambda_p^3(\nu_2^2 - \nu_1^2)} \times$$

$$\times\left[\frac{I_2(\lambda_p\nu_1 R)}{\nu_1 I_1(\nu_1\lambda_p R)} - \frac{I_2(\nu_2\lambda_p R)}{\nu_2 I_1(\nu_2\lambda_p R)}\right], \tag{27}$$

$$\frac{2}{t} I_1(t) = I_0(t) - I_2(t), \tag{28}$$

для сумм модулей коэффициентов при неизвестных получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kp}|=\frac{\dfrac{I_2(\nu_1\lambda_pR)}{\nu_1I_1(\nu_1\lambda_pR)}-\dfrac{I_2(\nu_2\lambda_pR)}{\nu_2I_1(\nu_2\lambda_pR)}}{\dfrac{I_0(\nu_1\lambda_pR)}{\nu_1I_1(\nu_1\lambda_pR)}-\dfrac{I_0(\nu_2\lambda_pR)}{\nu_2I_1(\nu_2\lambda_pR)}+\dfrac{(k_1-k_2)(c_{11}-c_{12})}{c_{11}(1+k_1)(1+k_2)\lambda_pR}}=$$

$$=\frac{\dfrac{I_2(\nu_2\lambda_pR)}{\nu_2I_1(\nu_2\lambda_pR)}-\dfrac{I_2(\nu_1\lambda_pR)}{\nu_1I_1(\nu_1\lambda_pR)}}{\dfrac{I_2(\nu_2\lambda_pR)}{\nu_2I_1(\nu_2\lambda_pR)}-\dfrac{I_2(\nu_1\lambda_pR)}{\nu_1I_1(\nu_1\lambda_pR)}+\dfrac{1}{\lambda_pR}\left[\dfrac{2(\nu_1^2-\nu_2^2)}{\nu_1^2\nu_2^2}-\dfrac{(k_1-k_2)(c_{11}-c_{12})}{c_{11}(1+k_1)(1+k_2)}\right]}, \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{kp}|=\frac{\nu_1\operatorname{cth}\dfrac{\mu_ph}{\nu_1}-\nu_2\operatorname{cth}\dfrac{\mu_ph}{\nu_2}-\dfrac{\nu_1^2-\nu_2^2}{\mu_ph}}{\nu_1\operatorname{cth}\dfrac{\mu_ph}{\nu_1}-\nu_2\operatorname{cth}\dfrac{\mu_ph}{\nu_2}}. \tag{30}$$

Если предположить, что

$$\nu_1=\alpha+i\beta,\quad \nu_2=\alpha-i\beta,$$

то из вышесказанного следует, что $\alpha>0$. Без нарушения общности можно принять $\beta>0$ (в противном случае мы бы поменяли местами индексы 1 и 2 при ν) и тогда

$$\frac{1}{i}(\nu_1^2-\nu_2^2)=4\alpha\beta>0. \tag{31}$$

Так как левые части формул (26) и (27) положительные, то в силу (31) имеем

$$\frac{1}{i}\left[\frac{I_2(\nu_2\lambda_pR)}{\nu_2I_1(\nu_2\lambda_pR)}-\frac{I_2(\nu_1\lambda_pR)}{\nu_1I_1(\nu_1\lambda_pR)}\right]>0,$$

$$\frac{1}{i}\left[\nu_1\operatorname{cth}\frac{\mu_ph}{\nu_1}-\nu_2\operatorname{cth}\frac{\mu_ph}{\nu_2}\right]>\frac{1}{i}\frac{\nu_1^2-\nu_2^2}{\mu_ph}=\frac{4\alpha\beta}{\mu_ph}>0. \tag{32}$$

Из (3) и (4) легко можно вывести

$$\chi=\frac{1}{i}\left[\frac{2(\nu_1^2-\nu_2^2)}{\nu_1^2\nu_2^2}-\frac{(k_1-k_2)(c_{11}-c_{12})}{c_{11}(1+k_1)(1+k_2)}\right]=\frac{4\alpha\beta c_{11}}{c_{33}}\left[1+\frac{c_{12}c_{33}-c_{13}^2}{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}\right].$$

Для всех материалов имеем $c_{12}<c_{11}$, откуда следует, что

$$\left|\frac{c_{12}c_{33}-c_{13}^2}{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}\right|<1, \tag{33}$$

а в силу (31) и (33) имеем

$$\chi>0. \tag{34}$$

Из (32) и (34) следует, что в выражениях (29) и (30) числители меньше знаменателей, откуда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kp}| < 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{kp}| < 1,$$

т. е. бесконечная система (21) регулярна и можно приближенными методами вычислить неизвестные коэффициенты X_k и Y_k.

Аналогичным образом доказывается регулярность системы (21), когда ν_1 и ν_2 действительны и различны.

В случае изотропного тела, когда $\nu_1 = \nu_2$, из системы (21) предельным переходом получаются бесконечные системы, регулярность которых доказана в работе [7].

Подставляя найденные значения коэффициентов из (17)—(20) в (7), для функций $\varphi_i(r, z)$ получим

$$\varphi_1(r, z) = a_1 z + b_1\left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_1^2}\right) - \frac{\nu_1}{(1+k_1)(\nu_1^2-\nu_2^2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\nu_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1} m X_k}{\lambda_k^3} + \frac{\nu_2^2 \gamma_k}{c_{44}\lambda_k^2} \right] \frac{I_0(\nu_1 \lambda_k r)}{I_1(\nu_1 \lambda_k R)} \cos \lambda_k z - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{Y_k}{\mu_k^3 J_0(\mu_k R)} + \frac{\delta_k \nu_1^2}{c_{44}\mu_k^2} \right] \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_1}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_1}} J_0(\mu_k r) \right\}, \tag{35}$$

$$\varphi_2(r, z) = a_2 z + b_2\left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_2^2}\right) + \frac{\nu_2}{(1+k_2)(\nu_2^2-\nu_1^2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\nu_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1} m X_k}{\lambda_k^3} + \frac{\nu_1^2 \gamma_k}{c_{44}\lambda_k^2} \right] \frac{I_0(\nu_2 \lambda_k r)}{I_1(\nu_2 \lambda_k r)} \cos \lambda_k z - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{Y_k}{\mu_k^3 J_0(\mu_k R)} + \frac{\delta_k \nu_2^2}{c_{44}\mu_k^2} \right] \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{\nu_2}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{\nu_2}} J_0(\mu_k r) \right\}. \tag{36}$$

Имея φ_1 и φ_2, легко можно получить формулы для напряжений и перемещений. Из этих формул предельным переходом, когда $\nu_1 \to \nu_2 \to 1$, можно получить формулы для изотропного тела, совпадающие с формулами, полученными ранее Б. Л. Абрамяном [7]. Этим же методом можно решить задачу, когда внешняя нагрузка распределена не симметрично относительно плоскости $z = 0$, и задачу для полого цилиндра.

Эти задачи приводятся к решению регулярных бесконечных систем линейных уравнений, свободные члены которых ограничены сверху. Изменяя граничные условия, можно решить такие задачи, точные решения которых получаются без применения бесконечных систем [8,9].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 II 1961

Ա. Հ. Բաբլոյան

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԿԼՈՐ ԳԼԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ տրված է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Ենթադրվում է, որ նյութն ունի սիմետրիայի հարթություններ, որոնք ուղղահայաց են գլանի առանցքին, իսկ արտաքին ուժերը գլանի միջին հատույթի ($z=0$) նկատմամբ բաշխված են սիմետրիկ ձևով։

Խնդիրը բերվում է գծային անվերջ հանրահաշվական սիստեմի լուծմանը, ցույց է տրված, որ այդ սիստեմը ռեգուլյար է, իսկ ազատ անդամները սահմանափակ են։

Ստացված են բանաձևեր լարումների և տեղափոխությունների համար, որոնք մասնավոր դեպքում համընկնում են հայտնի արդյունքների հետ [7]։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида. „ПММ“, **4**, вып. 3, 1940.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
3. *Лехницкий С. Г.* Изгиб трансверсально-изотропной толстой плиты. Тезисы докладов Всесоюзного совещения по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. Тбилиси, 1961, 41—43.
4. *Elliott H. A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal Aeolotopic crystals. „Proc. Camb. Phil. Soc.“ 44, 1948, 522—533.
5. *Ху Хай-чан.* О трехмерных задачах теории упругости для трансверсально-изотропного тела. „Acta sci. sinica“, **2**, № 2, 1953, 145—151.
6. *Новацкий В.* Функция напряжений в пространственных задачах упругого тела с трансверсальной изотропией. „Бюл. Польск. А. .“, отд. IV, **2**, № 1, 1954, 21—25.
7. *Chakravorty J. G.* On the distribution of stress in an infinite circular cylinder of transversely isotropic material caused by a band of uniform pressure on the boundary. „Bull. Cal. Math. Soc.“, vol. 48, № 4, 1956.
8. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. „ПММ“, **6**, вып. 2—3, 1942.
9. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
10. *Love.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4-th ed., New York, 1944.
11. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. „ДАН АрмССР“, **19**, № 1, 1954.
12. *Абрамян Б. Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. „ДАН АрмССР“, **26**, № 2, 1958.
13. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, **11**, № 4, 1958.
14. *Грей Э., Метьюз Г.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиноиздат, М., 1949.
15. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Госиноиздат, часть 1, М., 1949, 655.