ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 4, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

П. К. Суетин

Прямые и обратные теоремы о порядке наилучшего приближения замкнутых кривых лемнискатами*

В теории приближений хорошо известна теорема Гильберта о том, что всякую замкнутую кривую, являющуюся границей односвязной области, можно аппроксимировать сколь угодно точно с помощью лемнискаты достаточно высокой степени. Если считать эту теорему аналогом теоремы Вейерштрасса о приближении, то естественно поставить вопрос о скорости приближения данной кривой лемнискатами возрастающего порядка. Доказательство теоремы Гильберта построено на сходимости некоторых интегральных сумм к своему пределу, что геометрически означает расположение фокусов приближающих лемнискат на приближаемой кривой. Это ограничение, конечно, должно быть опущено при рассмотрении вопроса о наилучшем приближении кривой лемнискатами.

Пусть на плоскости z задана замкнутая спрямляемая жорданова кривая Γ. Обозначим ее внешность через D. Пусть далее функция $w=\Phi(z)$ отображает область D на область $|w|>1$ при условиях $\Phi(\infty)=\infty$ и $\Phi'(\infty)>0$, а через $z=\Psi(w)$ обозначим обратную функцию. Будем говорить, что контур Γ имеет гладкость порядка p, если он имеет непрерывно вращающуюся касательную и функция $\Psi(w)$ непрерывно дифференцируема p раз в замкнутой области $|w|\geq 1$, а ее производная $(p+1)$-го порядка представима интегралом Коши по своим угловым граничным значениям.

Рассмотрим теперь произвольный многочлен $P_n(z)$ степени n с положительным старшим коэффициентом. Обозначим через $D(P_n)$ область, в которой выполняется неравенство $|P_n(z)|>1$. Ясно, что эта область содержит точку $z=\infty$ и ограничена лемнискатой $|P_n(z)|=1$, которую мы обозначим через $L(P_n)$. Далее, функция $w=\sqrt[n]{P_n(z)}$, где взято главное значение корня, отображает конформно область $D(P_n)$ на область $|w|>1$ при тех же условиях нормировки, что и функция $w=\Phi(z)$. Обозначим обратную функцию через $z=\Psi(w, P_n)$ и рассмотрим величину

* Доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

$$\rho(\Gamma, P_n) = \max_{|w|=1} |\Psi(w) - \Psi(w, P_n)|.$$

Эту величину целесообразно считать расстоянием между контуром Γ и лемнискатой $L(P_n)$. Если варьировать многочлен $P_n(z)$, то величина $\rho(\Gamma, P_n)$ будет изменяться, и естественно поставить вопрос о точной нижней границе этой величины относительно всех многочленов степени n. Введем обозначение

$$E_n(\Gamma) = \inf_{P_n} \rho(\Gamma, P_n).$$

Эту величину назовем наилучшим приближением кривой Γ лемнискатами порядка n. Нетрудно доказать существование лемнискаты наилучшего приближения, т. е. существование такого многочлена $T_n(z)$, что $E_n(\Gamma) = \rho(\Gamma, T_n)$.

Теорема 1. *Если контур Γ имеет гладкость порядка p, то имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_n(\Gamma) = 0.$$

Доказательство. Для оценок сверху величины $E_n(\Gamma)$ воспользуемся многочленами Фабера, для которых имеет место представление

$$\Phi_n(z) = \Phi^n(z) + \varepsilon_n(z), \tag{1}$$

где для второго слагаемого при условиях теоремы 1 для $z \in D$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^{p-1} \varepsilon_n(z) = 0, \tag{2}$$

которое легко получается с помощью рассуждений, изложенных в заметке [1].

Из (1) для главного значения корня получаем

$$\sqrt[n]{\Phi_n(z)} = \Phi(z) + \alpha_n(z), \tag{3}$$

где $\alpha_n(z) = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ в силу (2). Далее имеем

$$E_n(\Gamma) \le \max_{|w|=1} |\Psi(w) - \Psi(w, \Phi_n)| = \max_{z\in L(\Phi_n)} \left|\Psi\left[\sqrt[n]{\Phi_n(z)}\right] - z\right| \le$$

$$\le \max_{z\in D} |\Psi[\Phi(z) + \alpha_n(z)] - \Psi[\Phi(z)]| \le M \max_{z\in D} |\alpha_n(z)| = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

и теорема 1 доказана, если лемниската $L(\Phi_n)$ расположена вся в области $\overline{D}$. В противном случае рассматриваем лемнискату $|\Phi_n(z)| = \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n^p}\right)^n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Если для гладкой кривой* Γ *при всех* n *имеет место неравенство*

$$E_n(\Gamma) \leq \frac{C_1}{n^{p+\varepsilon}}, \tag{4}$$

где p *есть целое число, а* $\varepsilon > 0$, *то функция* $\Psi(w)$ *непрерывно дифференцируема* $(p-1)$ *раз в замкнутой области* $|w| \geq 1$.

Доказательство. Не нарушая общности можем считать, что последовательность лемнискат $L(\Gamma_n)$, для которых имеет место неравенство (4), расположена в области D, так как в противном случае это достигается делением многочлена $\Gamma_n(z)$ на величину $\left[1+0\left(\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}\right)\right]^n$. Используя представление многочлена $\Gamma_n(z)$ в виде (3), из условия теоремы 2 имеем

$$\rho(\Gamma, \Gamma_n) = \max_{z \in L(\Gamma_n)} \left| \Psi\left[\sqrt[n]{\Gamma_n(z)}\right] - z \right| =$$

$$= \max_{z \in L(\Gamma_n)} \left| \Psi\left[\Phi(z)(1 + \varepsilon_n(z))\right] - \Psi\left[\Phi(z)\right] \right| \leq \frac{C_2}{n^{p+\varepsilon}},$$

откуда, в силу того, что производная $\Psi'(w)$ непрерывна и отлична от нуля в замкнутой области, следует неравенство

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{C_3}{n^{p+\varepsilon}}, \quad z \in \overline{D(\Gamma_n)}.$$

Из этого нерзвенства получаем, что в формуле

$$\Gamma_n(z) = \Phi^n(z)\left[1 + \lambda_n(z)\right], \quad z \in D$$

остаточный член допускает оценку $\lambda_n(z) = O\left(\frac{1}{n^{p-1+\varepsilon}}\right)$, откуда, как это показано в нашей заметке [1], следует оценка $\lambda_n(z) = O\left(\frac{\ln n}{n^{p-1+\varepsilon}}\right)$ и требуемые дифференциальные свойства функции $\Psi(w)$ в замкнутой области.

Теорема 3. *Для того, чтобы кривая* Γ *была правильной аналитической кривой, необходимо и достаточно, чтобы при* $0 < q < 1$ *и для всех* n *выполнялось неравенство*

$$E_n(\Gamma) \leq C_4 q^n.$$

Доказательство теоремы 3 отличается от вышеизложенных рассуждений лишь тем, что вместо соотношения (2) будем иметь оценку $\lambda_n(z) = O(q^n)$, которая эквивалентна аналитичности контура Γ.

Аналогичные результаты имеют место, если расстояние между кривыми определять обычным образом, а также в случае наличия у лемнискаты весовой функции. Вышеприведенные результаты являются геометрическим приложением свойств многочленов наилучшего асимптотического приближения, рассмотренных в нашей заметке [1].

Уральский педагогический институт
им. А. С. Пушкина

Поступила 16 I 1961

Պ. Կ. Սուետին

ՈՒՂԻՂ ԵՎ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՓԱԿ ԿՈՐԵՐԻ՝ ԼԵՄՆԻՍԿԱՏՆԵՐՈՎ ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք $z = \Psi(w)$ *ֆունկցիան* $|w| > 1$ *տիրույթը կոնֆորմ կերպով արտապատկերում է* Γ *կոնտուրի արտաքին մասի վրա, երբ* $\Psi(\infty) = \infty$ *և* $\Psi'(\infty) > 0$, *իսկ* $z = \Psi(w, P_n)$ *ֆունկցիան, նորմիրովկայի նույն պայմանների դեպքում,* $|w| > 1$ *տիրույթն արտապատկերում է* $|P_n(z)| = 1$ *հավասարմամբ որոշվող* $z(P_n)$ *լեմնիսկատի արտաքին մասի վրա, որտեղ* $P_n(z)$*-ը դրական ավագ գործակցով կամայական բազմանդամ է։* Γ *կոնտուրի՝* n *կարգի լեմնիսկատներով լավագույն մոտարկում անվանենք*

$$E_n(\Gamma) = \inf_{P_n} \max_{|w|=1} |\Psi(w) - \Psi(w, P_n)|$$

մեծությունը։

Թեորեմ 1։ Եթե Γ *կոնտուրը այնպիսի հարթ կոր է, որ* $\Psi^{(p+1)}(w)$ *ածանցյալը ներկայացվում է Կոշի ինտեգրալով իր անկյունային սահմանային արժեքների, ապա տեղի ունի*

$$\lim_{n \to \infty} n^p E_n(\Gamma) = 0$$

հավասարությունը։

Թեորեմ 2։ Եթե Γ *հարթ կորի համար բոլոր* n*-երի դեպքում տեղի ունի*

$$E_n(\Gamma) \leq \frac{C_1}{n^{p+\alpha}}$$

անհավասարությունը, որտեղ $p \geq 0$*-ն ամբողջ թիվ է, իսկ* $\alpha > 0$, *ապա* $\Psi(w)$ *ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է* $(p-1)$ *անգամ* $|w| \geq 1$ *փակ տիրույթում։*

Թեորեմ 3։ Որպեսզի Γ *կորը լինի կանոնավոր անալիտիկ կոր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $0 < q < 1$*-ի դեպքում և բոլոր* n*-երի համար տեղի ունենա*

$$E_n(\Gamma) \leq C_1 q^n$$

անհավասարությունը։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Суетин П. К.* Некоторые асимптотические свойства многочленов. „ДАН СССР“, **129**, № 1, 1959.