

Л. В. Креснякова

О радиусах звездности и выпуклости для функций с ограниченным средним модулем*

1. Рассмотрим класс H_1 функций $f(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих при $0 < r = |z| < 1$ условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta = 1. \quad (1)$$

Класс H_1 детально изучен Г. М. Голузиним [1].

В настоящей статье даются оценки радиусов звездности и выпуклости для этого класса. Для получения этих оценок приведем частичное уточнение оценок $|f'(z)|$ и $|f''(z)|$, принадлежащих Г. М. Голузину.

Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in H_1$, то имеют место неравенства [1], стр. 72)

$$|c_n| \leq \begin{cases} 1, & \text{при } |c_m| \leq \frac{1}{2}, \\ 2 / |c_m (1 - c_m)|, & \text{при } |c_m| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

для $n > 2m$.

Применяя неравенства (2) к функции

$$g(z) = f\left(\frac{z+z^2}{1+z^2}\right) \frac{1-|z|^2}{1-|z|^2}, \quad (|z| < 1), \quad (3)$$

принадлежащей вместе с функцией $f(z)$ классу H_1 , при $m=0$, $n=1$ получаем неравенства

$$|f(z)| (1-r^2) < 1, \quad (4)$$

$$|f'(z)| (1-r^2)^2 - 2z f(z) (1-r^2) < 1$$

при $|f(z)| (1-r^2) < \frac{1}{2}, \quad (5)$

* Доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

$$|f'(z)|(1-r^2)^2 - 2z\bar{f}(z)(1-r^2) \leq 2|f(z)|(1-r^2)|1-|f(z)|(1-r^2)|$$

при $|f(z)|(1-r^2) > \frac{1}{2}$. (6)

Применяя неравенства (2) к функции (3) при $m=0$, $n=2$, получаем неравенства

$$|f''(z)|(1-r^2)^3 - 6z\bar{f}'(z)(1-r^2)^2 + 6z^2\bar{f}(z)(1-r^2) \leq 2$$

при $|f(z)|(1-r^2) < \frac{1}{2}$. (7)

$$|f''(z)|(1-r^2)^3 - 6z\bar{f}'(z)(1-r^2)^2 + 6z^2\bar{f}(z)(1-r^2) \leq$$

$$\leq 4|f(z)|(1-r^2) - |f(z)|^2(1-r^2)^2$$

при $|f(z)|(1-r^2) > \frac{1}{2}$. (8)

Из (5) и (7) при $|f(z)| \leq \frac{1}{2(1-r^2)}$ находим

$$|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r^2)^2}, \quad |f''(z)| \leq \frac{2+6r+3r^2}{(1-r^2)^3}. \quad (9)$$

2. Функцию $W = f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n$ ($m > 1$, $c_m \neq 0$), регулярную в $|z| < 1$, называют звездобразной в $|z| < \rho_s$ ($\rho_s < 1$) относительно точки $W=0$, если $\arg f(z)$ изменяется монотонно, когда точка z описывает всякую окружность $|z|=r < \rho_s$, т. е., если положить $z = re^{i\theta}$, то

$$\frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial \theta} > 0 \quad (10)$$

Радиус звездобразности некоторого класса функций есть максимальный радиус круга, в котором все функции, принадлежащие этому классу, звездобразны.

Известно, что неравенство (10) равносильно неравенству

$$R\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0. \quad (11)$$

Теорема 1. Если $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n \in H_1$ ($m > 1$, $c_m \neq 0$), то она звездобразна в круге $|z| \leq r_s = \min\left(\frac{m}{m+2}, \rho_m\right)$, где ρ_m есть, содержащийся между нулем и единицей, корень уравнения

$$m|c_m|(1-r^2) = m\left|1 - \frac{c_m}{c_m} z\right| \sqrt{2-r^2} + \frac{r}{1-r}. \quad (12)$$

Доказательство. Положим $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^m}$. Легко видеть, что $\varphi(z) \in H_1$. Условие (11) является следствием неравенства

$$m \left| \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \geq 0. \quad (13)$$

Имеем

$$|\varphi(z)| \leq |c_m| + \sum_{k=1}^{\infty} |c_{m+k}| |z|^k.$$

Используя неравенство Шварца и оценку Г. М. Голузина

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k+1} \leq 1, \quad ([1], \text{ стр. 58}),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_{m+k}| r^k}{k+1} \leq \left[(1 - |c_m|^2) \frac{2r^2 - r^4}{(1 - r^2)^2} \right]^{1/2},$$

откуда

$$|\varphi(z)| \leq |c_m| + \sqrt{1 - |c_m|^2} \cdot r \sqrt{\frac{2 - r^2}{1 - r^2}}.$$

Используя для $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2(1-r^2)}$ первое из неравенств (9), на-

ходим

$$\left| \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{r}{|c_m|(1-r^2) - r \sqrt{1 - |c_m|^2} \sqrt{2 - r^2} \sqrt{1 - r^2}}.$$

Подставив в (13), получим

$$m|c_m|(1-r^2) \geq mr \sqrt{1 - |c_m|^2} \sqrt{2 - r^2} \sqrt{1 - r^2} + \frac{r}{1-r}.$$

Левая часть этого неравенства убывает при $0 < r < 1$, правая возрастает, поэтому уравнение (12) в $[0, 1]$ имеет один корень. Обозначим его через ρ_m .

Следовательно, неравенство (11) выполняется для

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2(1-r^2)} \quad \text{при } |z| \leq \rho_m.$$

Пусть теперь $|\varphi(z)| \geq \frac{1}{2(1-r^2)}$. Тогда, применяя (6) к $\varphi(z)$,

будем иметь

$$\left| \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| < \frac{2r}{1-r}. \quad (14)$$

Подставив в (13), получим

$$m - \frac{2r}{1-r} \geq 0.$$

Следовательно, неравенство (11) выполняется для

$$|z(z)| > \frac{1}{2(1-r^2)} \quad \text{при} \quad |z| < \frac{m}{m+2}.$$

Отсюда следует, что радиус звездообразности не менее, чем $\min\left(r_m, \frac{m}{m+2}\right)$. Теорема доказана.

3. Функцию $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n$ ($c_m \neq 0$, $m \geq 1$), регулярную в $|z| < 1$ называют выпуклой в z_0 ($|z_0| < 1$), если касательная к образу всякой окружности $|z| = r < r_0$, при обходе ее в определенном направлении, вращается в одну сторону, т. е. если положить $z = re^{i\theta}$, то

$$1 + \frac{\operatorname{arg} f'(re^{i\theta})}{\theta} > 0. \quad (15)$$

Радиус выпуклости некоторого класса функций есть максимальный радиус круга, в котором все функции, принадлежащие этому классу, выпуклы.

Известно, что неравенство (15) равносильно следующему

$$1 + R\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0.$$

Теорема 2. Если $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n$, H_1 ($c_m \neq 0$, $m \geq 1$), то она выпукла в круге $|z| = r_0 = \min_{n \geq m} \{r_m^{(1)}, r_m^{(2)}\}$, где $r_m^{(1)}$ есть, содержащийся между 0 и 1, корень уравнения

$$m^2 |c_m| = m \left\{ \frac{1 - |c_m|^2}{1 - r^2} \right\} \times \\ \times \left\{ 2(m+1)^2 - (5m^2 + 4m - 4)r^2 + 4m^2 r^4 - m^2 r^6 \right\} + \\ + \frac{r^2 (2 + 6r + 3r^2)}{(1 - r^2)^3} + m \frac{r(1+r)}{1 - r^2} \}, \quad (16)$$

а $r_m^{(2)}$ есть, содержащийся между 0 и 1, корень уравнения

$$m^2 = \frac{2r + 6r^2 + 10r^3 - 4r^4}{(1 - r^2)^2} - 4m \frac{r(1+r)}{1 - r^2}. \quad (17)$$

Доказательство. Полагая $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^m}$, находим, как и выше, что условие (15) является следствием неравенства

$$m - \left| \frac{(m+1)z\varphi'(z) + z^2\varphi''(z)}{m\varphi(z) + z\varphi'(z)} \right| > 0. \quad (18)$$

Оценим сверху

$$\left| \frac{(m+1)z\varphi'(z) + z^2\varphi''(z)}{m\varphi'(z) + z\varphi''(z)} \right|.$$

Пусть $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2(1-r^2)}$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } |z\varphi' + m\varphi| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} (k+m) c_{m+k} z^{k+m} \right| = m|c_m| - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} (k+m) |c_{m+k}| r^k = m|c_m| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_{m+k}|(k+m)}{1-k+1} \sqrt{k+1} r^k \geq \\ &\geq m|c_m| - \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_{m+k}|}{k+1} \sum_{k=1}^{\infty} (k+m)^2 (k+1) r^{2k} \right|^{\frac{1}{2}} > \\ &> m|c_m| - \sqrt{1-|c_m|^2} \frac{r}{(1-r^2)^2} \times \\ &\times \sqrt{2(m+1)^2 - (5m^2 + 4m - 4)r^2 + 4m^2r^4 - 4m^2r^6}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств (9) получаем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{z^2\varphi'' + (m+1)z\varphi'}{z\varphi' + m\varphi} \right| \leq \\ &\leq \frac{r^2(2+6r+3r^2) - (m+1)r(1+r)(1-r^2)}{A}, \end{aligned}$$

где $A = m|c_m|(1-r^2)^3 -$

$$- \sqrt{1-|c_m|^2} r(1-r^2) \sqrt{2(m+1)^2 - (5m^2 + 4m - 4)r^2 + 4m^2r^4 - 4m^2r^6}.$$

Подставив в (18), получим

$$\begin{aligned} m^2|c_m| &\geq m \sqrt{1-|c_m|^2} \frac{r}{(1-r^2)^2} \times \\ &\times \sqrt{2(m+1)^2 - (5m^2 + 4m - 4)r^2 + 4m^2r^4 - 4m^2r^6} - \\ &- \frac{r^2(2+6r+3r^2)}{(1-r^2)^3} - m \frac{r(1+r)}{(1-r^2)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Левая часть неравенства (19) постоянна, а правая возрастает от 0 до ∞ в промежутке от 0 до 1, поэтому уравнение (16) в $[0,1]$ имеет один корень. Обозначим его через $r_m^{(1)}$.

Следовательно, неравенство (18) выполняется для

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2(1-r^2)} \quad \text{при } |z| \leq r_m^{(1)}.$$

Пусть теперь $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2(1-r^2)}$.

Имеем

$$\left| \frac{z^2 \varphi'' + (m+1)z\varphi'}{z\varphi' + m\varphi} \right| \leq \frac{\left| \frac{z^2 \varphi''}{\varphi} \right| + (m+1) \left| \frac{z\varphi'}{\varphi} \right|}{m - \left| \frac{z\varphi'}{\varphi} \right|}.$$

Из (6) и (8) находим

$$\begin{aligned} |\varphi''(z)(1-r^2)^3 - 6Z^2\varphi(z)(1-r^2)| &\leq (12r+4) \times \\ &\times |1 - \overline{z(z)}|(1-r^2) - |\overline{z(z)}|^2(1-r^2)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^2 \varphi''}{\varphi(z)} \right| &\leq \frac{6r^4 + 12r^3 - 4r^2}{(1-r^2)^2}, \\ \left| \frac{z^2 \varphi'' + (m+1)z\varphi'}{z\varphi' + m\varphi} \right| &\leq \frac{\frac{6r^4 + 12r^3 - 4r^2}{(1-r^2)^2} + \frac{2(m+1)r}{1-r}}{m - \frac{2r}{1-r}}. \end{aligned}$$

Подставив в (18), получим

$$m^2 \leq \frac{2r + 6r^2 + 10r^3 - 4r^4}{1-r^2)^2} + 4m \frac{r(1-r)}{1-r^2}.$$

Левая часть возрастает от 0 до ∞ , поэтому уравнение (17) в $[0,1]$ имеет один корень. Обозначим его через $r_m^{(2)}$.

Следовательно, неравенство (18) выполняется для

$$|z| \leq \frac{1}{2(1-r^2)} \quad \text{при} \quad |z| \leq r_m^{(2)}.$$

Отсюда следует, что радиус выпуклости не менее чем $\min(r_m^{(1)}, r_m^{(2)})$. Теорема доказана.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Получена 2-1-1961

Լ. Վ. Կրեսնյակովա

ԱՍՏՂԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՈՒՌՈՒՑԻԿՈՒԹՅԱՆ ՇԱՌԱՎԻՂՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ՝ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՄԻՋԻՆ ՄՈԴՈՒԼՈՎ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՍԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկում է $f(z)$ ֆունկցիաների $\{H_1$ դասը, որոնք սեղսլորտ են եղակի շրջանում եւ $0 < r < |z| < 1$ դեպքում բաժանարարում են

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}z)| d\theta \leq 1$$

սղսլաներն:

Տրված են տատաղանություն և սուսուցիկություն շատախիղների գնահատաններ H_1 դասի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Голузин Г. М. Оценки для аналитических функций с ограниченным средним модулем. «Труды математ. ин-та им. В. А. Стеклова», 18, 1946.