ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 4, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

О теории пар конгруэнций

§ 1. Введение

Теория пар конгруэнций была разработана достаточно глубоко в работах С. П. Финикова, Б. А. Розенфельда и других авторов [1]. Эта теория получает новое содержание в пятимерном проективном пространстве P_5, где каждой паре конгруэнций соответствует некоторое двухпараметрическое семейство прямых. Б. А. Розенфельд доказал [2], что это семейство будет фокальным только для пар T Финикова. Продолжая идеи Б. А. Розенфельда, А. М. Березман нашел ряд новых свойств преобразований Калапсо [1].

В настоящей работе мы, так же как и Розенфельд, будем рассматривать плюкерово отображение пары конгруэнций в P_5. Но в отличие от метода Розенфельда будем изучать эти пары с помощью касательных плоскостей их плюкерова отображения в P_5, не связывая с каждой парой семейства прямых. Этот подход позволяет нам рассматривать не тольку пару T конгруэнций Финикова. С помощью такого простого представления, глубоко изучаются пары θ и A_0 конгруэнций [4], [5], [6].

Во втором параграфе излагаются новые характеристические свойства почти всех классов пар T конгруэнций.

В третьем параграфе дается новое определение пары A_0 конгруэнций и с этой парой связывается ряд геометрических образов и предложений. Устанавливается связь этой пары с классом комплексов, расслаивающихся в однопараметрическое семейство W конгруэнций с линейчатыми поверхностями.

В § 4 дается новое определение пары θ конгруэнций. Доказывается, что каждая пара противоположных вспомагательных конгруэнций пары θ является парой A_0. Доказывается также ряд новых теорем для пары θ.

Новое определение пары A_0 позволяет распространить понятие этой пары на две конгруэнции, соответственные лучи которых пересекаются. Последний параграф посвящен этому классу пары A_0.

В настоящей работе используется метод подвижного репера и внешних форм Картана [8].

§ 2. Пара T конгруэнций Финикова

Дифференциальные проективные перемещения тетраэдра A_i определяются дифференциальными уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \tag{2.1}$$

где ω_i^k — линейные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства $D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]$ [8].

Пара T конгруэнций характеризуется следующим свойством. Фокусы лучей одной конгруэнции лежат в фокальных плоскостях соответственных лучей другой конгруэнции [1].

Каждое ребро тетраэдра отображается в точку p_i гиперквадрики пятимерного проективного пространства

$$p_1 = (A_1 A_2), \quad p_2 = (A_3 A_4), \quad p_3 = (A_2 A_3), \quad p_4 = (A_1 A_4),$$
$$p_5 = (A_1 A_3), \quad p_6 = (A_4 A_2). \tag{2.2}$$

Пусть ребра $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ описывают пару T конгруэнций Финикова. Тогда, как известно [1], эта пара характеризуется дифференциальными уравнениями

$$\begin{gathered}
\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \\
\omega_3^4 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, \qquad \omega_4^3 = -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4, \\
\omega_1^2 = \beta\omega_1^3 - \gamma\omega_2^4, \qquad \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3 - \beta'\omega_2^4, \\
\omega_3^1 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \qquad \omega_4^2 = b'\omega_1^3 - a'\omega_2^4, \\
a\gamma - (b - b')\beta - a'\alpha = 0, \\
a\alpha' - (b - b')\beta' - a'\gamma' = 0.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

В [2] доказано, что два ребра описывают пару T в P_3 тогда и только тогда, когда их образы (p_1) и (p_2) в P_5 описывают 2-поверхности, касательные 2-плоскости которых пересекаются по прямой линии. Эта прямая, названная нами диагональной, определяется точками p_3 и p_4. Касательные плоскости отображений вспомогательной пары $T(A_1 A_3, A_2 A_4)$ так же пересекаются по этой прямой.

Каждая линия l на поверхности (p_1) является отображением некоторой линейчатой поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$. Касательная прямая к произвольной линии $\omega_2^4 - \lambda\omega_1^3$ поверхности (p_1) пересекается с прямой $(p_3 p_4)$ в точке

$$p_3 - \lambda p_4. \tag{2.4}$$

Касательная прямая к соответствующей линии поверхности (p_2) пересекается с той же прямой в точке

$$(b' + \lambda a') p_3 - (a + \lambda b) p_4. \tag{2.5}$$

Таким образом, на диагональной прямой пары T устанавливается проективное соответствие между двумя рядами точек. Каждой линейчатой поверхности пары T соответствуют две точки (2.4) и (2.5). *Неподвижные точки этого соответствия соответствуют главным линейчатым поверхностям пары T [1]. Если все точки этого соответствия неподвижны, то развертывающиеся поверхности пары T соответствуют накрест. Проективное соответствие на диагональной прямой является инволюцией тогда и только тогда, когда пара T расслаивается. Сопряженность линейчатых поверхностей в смысле Сания [7] сохраняется при общем преобразовании T только для двух линейчатых поверхностей $a'b\lambda^2 + ab' = 0$. Для сопряженной пары ($b - b' = 0$) сопряженность в смысле Сания сохраняется для любых линейчатых поверхностей конгруэнций.*

Главные линейчатые поверхности сопряжены в смысле Сания в обеих конгруэнциях пары тогда и только тогда, когда пара образует конфигурацию Бианки [1].

Новое определение пары T посредством касательных плоскостей в P_5 позволяет распространить это понятие на пару конгруэнций, соответственные лучи которых пересекаются.

Теорема. *Две конгруэнции, соответствующие лучи которых пересекаются, составляют пару T тогда и только тогда, когда эти конгруэнции имеют общую фокальную поверхность.*

Доказательство. Пусть эти конгруэнции описываются лучами p_1 и p_5. Тогда наше требование приводит к уравнению $\omega_1^5 = 0$, что и доказывает теорему.

Требование, чтобы такое преобразование T сохранило сопряженность линейчатых поверхностей конгруэнций, приводит к равенству

$$\beta(c_1^2 - \alpha) = 0.$$

Отсюда следует, что *вообще только линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям общей фокальной поверхности, сохраняют сопряженность в смысле Сания. Все линейчатые поверхности сохраняют свою сопряженность тогда и только тогда, когда конгруэнции (p_1) и (p_5) образуют преобразование Лапласа* ($\beta = 0$) *[9]*.

Сформулированные в этом параграфе теоремы имеют свои аналоги для пар T комплексов, с которыми мы познакомимся в другой работе.

§ 3. Пара A_0 конгруэнций

1. Пара A_0 конгруэнций была подробно исследована автором в работе [6]. Там она получила следующее определение.

Две конгруэнции образуют пару A_0, если каждая из них расслаивается на однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей так, что линейчатые поверхности, проходящие через соответствующие лучи конгруэнций, являются фокальными для некоторой W конгруэнции.

Здесь пара A_0 конгруэнций получает новое определение, эквивалентное прежнему. Как известно, каждая конгруэнция трехмерного пространства изображается, в перенесении Плюкера, двумерной поверхностью, принадлежащей гиперквадрике.

Две конгруэнции составляют пару A_0 тогда и только тогда, когда касательные плоскости их изображений в соответствующих точках пересекаются в одной точке.

Действительно, пусть поверхности (p_1) и (p_2) являются плюкеровыми отображениями конгруэнций пары и конгруэнция (p_1) отнесена к тетраэдру первого порядка, т. е. выполняются первые два уравнения первой строки и все шесть уравнений второй, третьей и четвертой строк системы (2.3). Касательные 2-плоскости поверхностей (p_1) и (p_2) в силу уравнений (2.2) и (2.3) напишутся в виде

$$(p_1p_3p_4),\ \left[p_2 (dp_2)_{\omega_1^1=0} (dp_2)_{\omega_2^4=0}\right]. \tag{3.1}$$

Эти две плоскости имеют одну общую точку тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left[\omega_3^2\omega_4^1\right] = 0, \tag{3.2}$$

которое одновременно является условием того, что конгруэнции (p_1) и (p_2) образуют пару A_0 [6].

Две плоскости (3.1) в силу (3.2) пересекаются в точке

$$\left[\omega_3^1\omega_3^2\right]p_1 + \left[\omega_3^2\omega_4^2\right]p_3 = p. \tag{3.3}$$

Прямая pp_1 на поверхности (p_1) касается линии, определяемой уравнением

$$\left[\omega_4^2\omega_3^2\right]\omega_2^1 = \left[\omega_3^1\omega_3^2\right]\omega_1^2, \tag{3.4}$$

которое является дифференциальным уравнением семейства линейчатых поверхностей, принадлежащих первой конгруэнции (p_1).

Прямая pp_2 на поверхности (p_2) касается линии, определяемой уравнением

$$\omega_3^2 = 0, \tag{3.5}$$

которое является дифференциальным уравнением семейства линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруэнции (p_2). Как известно [6], линейчатая поверхность (3.5), проходящая через луч p_1, и линейчатая поверхность (3.4), проходящая через соответствующий луч p_2, являются фокальными поверхностями конгруэнции W. При этом прямолинейные образующие фокальных поверхностей этой W конгруэнции соответствуют друг другу.

2. Так как каждая конгруэнция A_0 расслаивается в однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей (через каждый луч конгруэнции проходит только одна такая линейчатая поверхность), то

с каждой парой A_0 конгруэнций связывается однопараметрическое семейство конгруэнций W. Это семейство дает частный случай комплекса прямых, подробно разработанный Н. И. Кованцовым [10].

Таким образом, пара A_0 конгруэнций тесно связана с классом комплексов, каждый из которых расслаивается в однопараметрическое семейство конгруэнций W с линейчатыми фокальными поверхностями.

3. В этом пункте рассмотрим случай, когда семейство расслаивающихся поверхностей конгруэнции (p_1) совпадает с одним семейством ее развертывающихся поверхностей. Известно [7], что плюкерово отображение развертывающихся поверхностей трехмерного пространства в пятимерном пространстве огибает образующие прямые гиперквадрики Q_4^2. Согласно нашему требованию, прямая pp_1 является образующей гиперквадрики Q_4^2, следовательно, точка (3.3) принадлежит гиперквадрике. Но прямая pp_2 касается гиперквадрики в точке p_2, и так как прямая с гиперквадрикой может иметь только две общие точки, то наличие трех точек (две совпавшие точки в p_2 и точка p) означает, что прямая pp_2 принадлежит гиперквадрике и, следовательно, она в точке p_2 касается плюкерова отображения развертывающейся поверхности, т. е. поверхности, расслаивающие конгруэнцию (p_2), также развертываются. Таким образом, *если одна конгруэнция пары A_0 расслаивается развертывающимися поверхностями, то другая конгруэнция ведет себя так же.* Семейство конгруэнций W, для которых эти развертывающиеся поверхности (принадлежащие разным конгруэнциям пары A_0) являются фокальными, дает частный случай комплекса прямых, рассмотренный Н. Н. Кованцовым в его докторской диссертации [10].

§ 4. Пара θ конгруэнций

1. Пара θ конгруэнций определяется следующим образом [1], [4]. Две диагонали косого четырехугольника образуют пару θ, если их фокусы совпадают с вершинами четырехугольника и каждая сторона четырехугольника пересекает последующую сторону в фокусе последней.

Если ребра p_1 и p_2 описывают пару θ, то, согласно (2.1), будем иметь основную систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\omega_3^1 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, \qquad \omega_4^3 = -\gamma'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4,\\
&\omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, \qquad \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4,\\
&\omega_3^2 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \qquad \omega_4^1 = b'\omega_1^3 + c\omega_2^4,\\
&\qquad a\beta' - b\gamma' - b'\beta + c\alpha = 0,\\
&\qquad a\alpha' + b\beta' - b'\gamma + c\beta = 0.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

В плюкеровом отображении паре Λ конгруэнций соответствуют две поверхности (p_1) и (p_2). Каждая из этих поверхностей имеет свою касательную 2-плоскость

$$(p_1 p_3 p_4) \text{ и } (p_2 p_5 p_6). \tag{4.2}$$

В поляритете гиперквадрики Q_4^2 каждая 2-плоскость имеет свою сопряженную 2-плоскость. Нетрудно заметить, что в этом поляритете плоскости (4.2) сопряжены с плоскостями

$$(p_1 p_5 p_6) \text{ и } (p_2 p_3 p_4). \tag{4.3}$$

Первая плоскость (4.2) пересекается со второй плоскостью (4.3) по прямой $p_3 p_4$ и, наоборот, первая плоскость (4.3) пересекается со второй из плоскостей (4.2) по прямой $p_5 p_6$, причем каждое из этих утверждений является следствием другого. Простые расчеты показывают, что это свойство характеризует пару Λ конгруэнций, т. е. *две конгруэнции образуют пару Λ тогда и только тогда, когда касательная плоскость плюкерова отображения одной из этих конгруэнций пересекается по прямой с плоскостью, сопряженной с касательной плоскостью плюкерова отображения другой конгруэнции.*

2. Теория пар A_0 конгруэнций тесно связана с теорией пар Λ конгруэнций, в чем нас убеждают нижеследующие теоремы.

Теорема. *Каждая вспомогательная пара конгруэнций конфигурации Λ образует пару A_0.*

Доказательство. Действительно, вспомогательная пара первой конгруэнции (p_1) описывается ребрами p_3 и p_4. Касательные плоскости к поверхностям (p_3) и (p_4), согласно (2.2) и (4.1), определяются точками

$$\begin{gathered}(p_3, \gamma' p_5 - \alpha p_6, \gamma' p_2 - (\beta\gamma' + \beta'\alpha) p_6), \\ (p_4, \gamma p_6 - \alpha' p_5, \gamma p_2 - (\beta'\gamma + \beta\alpha') p_5).\end{gathered} \tag{4.4}$$

Если (p_1) не является W конгруэнцией, то эти две плоскости всегда пересекаются в одной точке

$$p_2 - \beta p_6 - \beta' p_5, \tag{4.5}$$

что, согласно § 3, и служит доказательством теоремы.

Если (p_1) является конгруэнцией W, то плоскости (4.4) пересекаются по прямой, определяемой точками

$$(\gamma p_6 - \alpha' p_5, \gamma p_2 - (\beta'\gamma + \beta\alpha') p_5). \tag{4.5'}$$

В этом случае пара конгруэнций (p_3) и (p_4) является парой T (см. § 2). Но известно, что если вспомогательная пара конгруэнций конфигурации Λ является парой T, то она есть расслояемая пара [1], следовательно, проективное соответствие между двумя рядами точек на прямой (4.5'), установленное линейчатыми поверхностями пары, есть инволюция.

Как известно, каждая конгруэнция пары A_0 расслаивается на однопараметрическое семейство таких линейчатых поверхностей, из которых две линейчатые поверхности, проходящие через соответствующие лучи пары, составляют фокальные поверхности некоторой конгруэнции W.

Теорема. *Для вспомогательной пары первой конгруэнции пары* $\mathfrak{h}$ *расслаивающие линейчатые поверхности соответствуют развертывающимся поверхностям первой конгруэнции; т. е. они пересекаются с фокальными поверхностями первой конгруэнции по ребрам возврата развертывающихся поверхностей этой конгруэнции.* Эта теорема справедлива и для второй конгруэнции и ее вспомогательной пары конфигурации $\mathfrak{h}$.

С каждой парой A_0 конгруэнций связывается определенный комплекс прямых, расслояемых в однопараметрическое семейство конгруэнций W с линейчатыми фокальными поверхностями (см. § 3). Так как пара $\mathfrak{h}$ конгруэнций, согласно вышеуказанным теоремам, допускает две пары A_0, то *с каждой парой* $\mathfrak{h}$ *конгруэнций связываются два определенных комплекса прямых, расслояемых в однопараметрическое семейство конгруэнций* W *с линейчатыми фокальными поверхностями.*

3. Вспомогательная пара $p_3 p_1$ другой конгруэнции пары $\mathfrak{h}$, как уже известно, тоже образует пару A_0. Касательные плоскости их плюкеровых отображений пересекаются в точке

$$(aa' - bb')\, p_1 - (\alpha' a - \beta' b)\, p_3 - (\beta b' + \alpha a')\, p_4. \tag{4.6}$$

Прямая, определяемая точками (4.4) и (4.6), пересекаясь с гиперквадрикой в двух точках, дает новую пару конгруэнций. *Эта новая пара совпадает с первоначальной парой* $\mathfrak{h}$ *тогда и только тогда, когда каждая конгруэнция пары* $\mathfrak{h}$ *вместе с двумя вспомогательными конгруэнциями другой конгруэнции принадлежит последовательности Лапласа.*

4. Рассмотрим преобразование конгруэнций, сохраняющее сопряженность линейчатых поверхностей. Сначала посмотрим, как надо понимать эту сопряженность?

Плюкерово отображение конгруэнции трехмерного пространства есть 2-поверхность на гиперквадрике Q_1^4. В [7] было доказано, что касательная 2-плоскость этой поверхности для непараболической конгруэнции пересекается с гиперквадрикой по двум образующим прямым, являющимся касательными к плюкеровым отображениям развертывающихся поверхностей конгруэнции. В касательной 2-плоскости две касательные прямые называются сопряженными, если они гармонически разделяются двумя образующими гиперквадрики (подобно тому, как асимптотические касательные поверхности трехмерного пространства устанавливают сопряженность касательных прямых на касательной плоскости). Две сопряженные друг с другом прямые касаются плюкеровых отображений двух сопряженных (в смысле Санна) линейчатых поверхностей конгруэнции. Установленная таким образом сопряженность линейчатых поверхностей в конгруэнции имеет замечательный геометрический смысл в трехмерном пространстве (см. [7]).

Теперь вернемся к поставленной нами задаче.

С. П. Фиников в [3] рассмотрел две конгруэнции, развертывающиеся поверхности которых соответствуют друг другу. Преобразование, посредством которого вторая конгруэнция получается из первой, там обозначается буквой S. Здесь преобразование S получает новое содержание, а именно—*сопряженность линейчатых поверхностей сохраняется при преобразовании* S. Действительно, пусть (p_2) является преобразованием S конгруэнции (p_1). Известно, что сопряженность линейчатых поверхностей конгруэнции (p_1) получается из поляритета квадратичной формы $[dp_1 dp_1]$ (см., например, [7]). Следовательно, преобразование S сохраняет сопряженность тогда, и только тогда, когда две квадратичные формы $[dp_1 dp_1]$ и $[dp_2 dp_2]$ пропорциональны друг другу. Но это означает, что нулевые многообразия этих форм соответствуют друг другу, а так как нулевые многообразия квадратичной формы каждой конгруэнции совпадают с развертывающимися поверхностями этой конгруэнции, то сохранение сопряженности приводит к сохранению развертывающихся поверхностей. Обратное утверждение, доказательство которого очевидно, также справедливо. Доказанная теорема является аналогом теоремы Петерсона для трехмерного пространства. Другое простое доказательство вышеуказанной теоремы можно дать, если учесть, что развертывающиеся поверхности конгруэнции (и только они) являются самосопряженными поверхностями.

Ниже мы будем пользоваться этими результатами.

5. В этом пункте рассмотрим случай, когда у одной вспомогательной пары конгруэнций конфигурации $\mathfrak{K}$ сопряженность в смысле Сания сохраняется, т. е. каждым двум сопряженным друг другу линейчатым поверхностям одной конгруэнции соответствуют сопряженные линейчатые поверхности во второй конгруэнции, и наоборот. Как известно [4], это требование равносильно соответствию развертывающихся поверхностей этих конгруэнций. Развертывающиеся поверхности конгруэнций (p_3) и (p_4) определяются соответственно уравнениями

$$[dp_3 dp_3] = -\omega_2^3 \omega_3^4 = 0, \quad [dp_4 dp_4] = -\omega_1^2 \omega_4^1 = 0.$$

Наше требование сводится к одному из двух условий

$$\begin{aligned} &1)\ [\omega_1^2 \omega_2^3] = 0, \qquad [\omega_3^4 \omega_4^1] = 0, \\ &2)\ [\omega_1^2 \omega_3^4] = 0, \qquad [\omega_2^3 \omega_4^1] = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Первое условие (4.7) в силу (4.1) равносильно двум конечным уравнениям

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = \beta\beta', \tag{4.8}$$

являющимся условиями, при которых обе конгруэнции пары δ становятся W конгруэнциями и, следовательно, обе вспомогательные пары конфигурации δ являются сопряженными парами (см. [1]).

Второе условие (4.7) в силу (4.1) равносильно уравнениям

$$\gamma\alpha - \beta^2 = 0, \quad \gamma'\alpha' - \beta'^2 = 0. \tag{4.9}$$

В силу этих уравнений обе конгруэнции другой вспомогательной пары конфигурации δ являются параболическими конгруэнциями. Действительно, условия (4.9) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы ранг квадратичных форм $[dp_5 dp_5] = \omega_3^1\omega_1^2$, $[dp_6 dp_6] = \omega_2^1\omega_4^3$ был единицей. Но в этом случае каждая из касательных плоскостей к поверхностям (p_5) и (p_6) пересекается с гиперквадрикой по двум совпавшим образующим прямым, следовательно, фокусы этих конгруэнций также совпадают (см. [7]).

В результате можно сформулировать следующую теорему.

Если каждой сопряженной паре линейчатых поверхностей одной вспомогательной конгруэнции соответствует сопряженная пара линейчатых поверхностей в противоположной конгруэнции конфигурации δ, то либо вторая вспомогательная пара конгруэнций также обладает этим свойством и, следовательно, пара δ образуется из двух конгруэнций W, либо вторая вспомогательная пара является параболической парой.

6. В этом пункте рассмотрим случай, когда каждой сопряженной паре линейчатых поверхностей одной конгруэнции соответствует такая же пара линейчатых поверхностей в другой конгруэнции пары δ. Это требование, как и всегда, приводит к соответствию развертывающихся поверхностей у этих конгруэнций. Но в [4] доказано, что в этом случае пара δ конгруэнций расслаивается в одном направлении.

§ 5. Пара A_0 с пересекающимися соответствующими лучами

1. В этом параграфе рассмотрим частный случай пары A_0 конгруэнций, когда соответствующие лучи обеих конгруэнций пары пересекаются.

Пусть ребра p_1 и p_5 являются соответствующими лучами нашей пары (p_1), (p_5). Они пересекаются в точке A_1. Не нарушая общности задачи, мы можем подвижной тетраэдр выбрать так, чтобы выполнялись равенства

$$\omega_2^3 = 0, \qquad \omega_3^2 = 0. \tag{5.1}$$

Согласно требованию задачи, касательные 2-плоскости к поверхностям (p_1) в (p_5) должны пересекаться в одной точке. Это приводит к единственному уравнению

$$[a\omega_1^2 - b\omega_3^4, \omega_1^4] = 0, \tag{5.2}$$

а точка пересечения этих плоскостей напишется в виде

$$(a\delta - b\alpha)\, p_4 - (a\gamma - b\beta)\, p_3 = p, \tag{5.3}$$

где

$$\omega_1^4 = a\omega_1^3 - b\omega_2^4,\quad \omega_1^2 = \delta\omega_1^3 - \gamma\omega_2^4,\quad \omega_4^1 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4. \tag{5.4}$$

Нулевые линии форм ω_1^3, ω_2^4 соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнции (p_1) и поэтому они являются независимыми линейными формами, так как конгруэнции пары A_0 предполагаются непараболическими.

Доказывается, что прямые pp_1 и pp_5 на поверхностях (p_1) и (p_5) касаются линий, определяемых одним и тем же уравнением

$$\omega_1^4 = 0, \tag{5.5}$$

которое, как известно, будет дифференциальным уравнением линейчатых поверхностей, расслаивающих обе конгруэнции пары. Таким образом, уравнение (5.5) определяет однопараметрическое семейство кривых на поверхности (A_1), по которым пересекаются расслаивающие линейчатые поверхности конгруэнций пары A_0. Касательные прямые к однопараметрическому семейству линий (5.5) образуют конгруэнцию, одна фокальная поверхность которой совпадает с поверхностью (A_1). Доказывается, что эта конгруэнция описывается прямой

$$bp_5 - (\beta b - \gamma a)\, p_1, \tag{5.6}$$

следовательно, луч конгруэнции (5.6) находится на плоскости, определяемой соответствующими лучами p_1 и p_5 нашей пары (p_1), (p_5).

Резюмируя полученные результаты, можно сформулировать следующие теоремы.

Если соответствующие лучи пары A_0 пересекаются, то расслаивающие линейчатые поверхности соответствуют друг другу.

На поверхности, описанной точкой пересечения соответствующих лучей пары A_0, расслаивающим линейчатым поверхностям соответствует единственное однопараметрическое семейство линий. Касательная этих линий описывает конгруэнцию, луч которой всегда лежит в плоскости, определяемой соответственными лучами пары A_0.

2. Не лишен интереса и тот случай, когда одна из конгруэнций пары A_0 расслаивается одним семейством развертывающихся поверхностей. Пусть конгруэнция (p_1) расслаивается одним своим семейством развертывающихся поверхностей $\omega_2^4 = 0$ [для выбранного подвижного тетраэдра выбор развертывающейся поверхности $\omega_1^3 = 0$ приведет к вырождению поверхности (A_1)]. Так как расслаивающие линейчатые поверхности определяются уравнением (5.5), то, согласно предположению $[\omega_1^4 \omega_2^4] = 0$ (или $a = 0$) и (5.2) приводит к равенству

$$[\omega_3^4 \omega_1^4] = 0.$$

Развертывающиеся поверхности конгруэнции (p_5) определяются уравнением $(dp_5 dp_5) = \omega_4^1 \omega_1^2 = 0$, следовательно, для (p_5) расслаивающие линейчатые поверхности также развертываются. Таким образом, для пары A_0 (соответственные лучи которой пересекаются) получается теорема: *если одна конгруэнция пары расслаивается своими развертывающимися поверхностями, то другая конгруэнция также расслаивается своими развертывающимися поверхностями.* Как известно (§ 3), эта теорема справедлива и для общей пары A_0.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 20 X 1960

Ս. Ե. Կարապետյան

ԿՈՆԳՐՈՒԵՆՑԻԱՆԵՐԻ ԶՈՒՅԳԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կոնգրուենցիաների տեսությունը հնգաչափ տարածության մեջ արտապատկերելիս (պլյուկերյան արտապատկերում) ստանում է նոր բովանդակություն։

Այս աշխատության մեջ ստացված են կոնգրուենցիաների T զույգերի բոլոր դասերի նոր խարակտերիստիկ հատկությունները։ Տրված է A_0 կոնգրուենցիաների զույգի նոր սահմանում և այն սերտորեն կապված է կոմպլեքսների հատուկ դասի ու Φ կոնգրուենցիաների զույգի հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С. П.* Теория пар конгруэнций. Гостехиздат. М., 1956.
2. *Розенфельд Б. А.* Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии. „Матем. сб.“, **22**, 1948.
3. *Фиников С. П.* Проективно-дифференциальная геометрия. Гостехиздат, М.—Л., 1937.
4. *Карапетян С. Е.* Пара Φ Попова. „Сборник научных трудов Арм. ПИ“, № 5, 1955.
5. *Карапетян С. Е.* Замкнутый цикл четырех конгруэнций. „Матем. сб.“, **41**, 1957.
6. *Карапетян С. Е.* Пара A и некоторые свойства пары T. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, **12**, 1959.
7. *Карапетян С. Е.* Сопряженные многообразия и их приложение. „ДАН СССР“, **31**, 1960.
8. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. Гостехиздат. М.—Л., 1948.
9. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций. Гостехиздат. М., 1950.
10. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Автореферат докторской диссертации. МГУ, 1958.