

И. А. Александров

Вариационные задачи для звездообразных однолистных в круге функций*

§ 1.

Пусть S_r — класс регулярных однолистных в круге $W: |w| < 1$ функций

$$z = f(w) = w + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1} w^{k-1}, \quad (1.1)$$

отображающих W на области, обладающие p -кратной симметрией вращения относительно точки $z = 0$ и звездообразные относительно нее. Предположим, что функция $I = I(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ задана для любых конечных комплексных значений $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Рассмотрим на классе S_r функционал

$$I = I[f(w), \overline{f(w)}, f'(w), \overline{f'(w)}, \dots, f^{(n)}(w), \overline{f^{(n)}(w)}], \quad (1.2)$$

($w \in W$ и фиксировано) и поставим задачу о нахождении множества D его значений.

Множество D связно и замкнуто [1] и в дальнейшем, как это принято при исследовании аналогичных задач, оно будет именоваться областью D . Обозначим произвольную точку границы области D через I_0 и будем называть функции, вносящие в D значение I_0 , граничными. Ясно, что если будут найдены все граничные функции, то появится возможность установить вид области D , получить уравнение ее границы. В отдельных конкретных задачах, являющихся частными случаями рассматриваемой, удастся определить границу области значений функционала приемами, которые не требуют знания граничных функций. Однако эти приемы не распространяются на общий случай.

Для нахождения граничных функций воспользуемся вариационным методом.

* Доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

Ранее нами было показано [2], что вместе с функцией $f(w)$ классу S_0 принадлежит функция

$$f_*(w) = f(w) + tP(w, w_0)f(w) + O(t), \quad t > 0, \quad (1.3)$$

где

$$P(w, w_0) = A \left[\frac{w'' - w_0''}{w'' - w_0''} + H(w) \right] + A \left[\frac{1 + \overline{w_0''} w''}{1 - \overline{w_0''} w''} - H(w) \right] - \\ - \frac{A}{H_0} \left[H(w) \frac{w'' - w_0''}{w'' - w_0''} + 1 \right] + \frac{\overline{A}}{H_0} \left[H(w) \frac{1 - \overline{w_0''} w''}{1 - \overline{w_0''} w''} - 1 \right], \quad (1.4)$$

A — комплексная постоянная,

w_0 — произвольная фиксированная точка круга W ,

$$H(w) = \frac{wf'(w)}{f(w)}, \quad H_0 = H(w_0), \quad (1.5)$$

$O(t)$ — величина более высокого порядка малости, чем t , на любом замкнутом множестве, лежащем в W .

Пусть $I_c \in D$. Найдется в D такая точка I_0 , что $|I_0 - I_c|$ будет не больше расстояния от I_c до любой точки $I \in D$: $|I_0 - I_c| \leq |I - I_c|$. Предположим, что $f(w)$ вносит в D значение I_0 . Функции $f_*(w)$ соответствует в D точка I_* . Следовательно,

$$|I_0 - I_c| \leq |I_* - I_c|. \quad (1.6)$$

Для I_* по формуле Тейлора имеем

$$I_* = I_0 + \frac{\partial I_0}{\partial f} (f_* - f) + \frac{\partial I_0}{\partial f} (f_* - \bar{f}) + \dots + \frac{\partial I_0}{\partial f^{(n)}} (f_*^{(n)} - f^{(n)}) + \\ + \frac{\partial I_0}{\partial f^{(n)}} (f_*^{(n)} - \bar{f}^{(n)}) + r_2.$$

Заменим здесь разности в круглых скобках их значениями, найденными из (1.3). Остаточный член r_2 оказывается величиной порядка $O(t)$. Введем следующие обозначения

$$\frac{\partial I_0}{\partial f} = t_0, \quad \frac{\partial I_0}{\partial f} = s_0, \quad \frac{\partial I_0}{\partial f^{(k)}} = t_k, \quad \frac{\partial I_0}{\partial f^{(k)}} = \bar{s}_k, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

$$P(w, w_0)f(w) = X_0(w, w_0), \quad \frac{d^k}{dw^k} [P(w, w_0)f(w)] = X_k(w, w_0), \quad k=1, \dots, n \quad (1.8)$$

$$\sum_{k=0}^n t_k X_k(w, w_0) = L(w, w_0), \quad \sum_{k=0}^n \bar{s}_k \overline{X_k(w, w_0)} = K(w, w_0) \quad (1.9)$$

Тогда для I_* получим

$$I_* = I_0 + t[L(w, w_0) + K(w, w_0)] + O(t).$$

Подставляя это выражение для I_* в неравенство (1.6), будем иметь

$$2t \operatorname{Re} (\bar{I}_0 - I_*) [L(w, w_0) - K(w, w_0)] = 0(t) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{Re} (I_0 - I_*) [L(w, w_0) + K(w, w_0)] = 0,$$

или

$$\operatorname{Re} x [L(w, w_0) - K(w, w_0)] = 0, \quad (1.10)$$

где

$$x = e^{-i\alpha}, \quad \alpha = \arg(I_0 - I_*). \quad (1.11)$$

Для записи $X_k(w, w_0)$, $k=0, 1, 2, \dots, \infty$, воспользуемся тем, что

$$\frac{d^k}{dw^k} \left[f(w) \left[\frac{w^p - w_0^p}{w^p - w_0^p} \cdot H(w) \right] \right] = \frac{G_{k+1}(w, w_0)}{(w^p - w_0^p)^{k+1}}, \quad (1.12)$$

$$\frac{d^k}{dw^k} \left[f(w) \left[H(w) \frac{w^p - w_0^p}{w^p - w_0^p} - 1 \right] \right] = \frac{F_{k+1}(w, w_0)}{(w^p - w_0^p)^{k+1}}, \quad (1.13)$$

где $G_{k+1}(w, w_0)$ и $F_{k+1}(w, w_0)$ — функции, аналитические относительно w в круге W и целые рациональные порядка $k+1$ относительно w_0 .

Имеем

$$\begin{aligned} X_k(w, w_0) &= A \frac{G_{k+1}(w, w_0)}{(w^p - w_0^p)^{k+1}} - \bar{A} \frac{G_{k+1}\left(w, \frac{1}{\bar{w}_0}\right)}{\left(w^p - \frac{1}{\bar{w}_0^p}\right)^{k+1}} \\ &= \frac{A}{H_0} \frac{F_{k+1}(w, w_0)}{(w^p - w_0^p)^{k+1}} - \frac{\bar{A}}{H_0} \frac{F_{k+1}\left(w, \frac{1}{\bar{w}_0}\right)}{\left(w^p - \frac{1}{\bar{w}_0^p}\right)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если ввести обозначения

$$H_0 G_{k+1}(w, w_0) - F_{k+1}(w, w_0) = N_{k+1}(w, w_0), \quad (1.15)$$

$$H_0 G_{k+1}\left(w, \frac{1}{\bar{w}_0}\right) - F_{k+1}\left(w, \frac{1}{\bar{w}_0}\right) = M_{k+1}\left(w, \frac{1}{\bar{w}_0}\right) \quad (1.16)$$

и вместо отношения $\frac{\bar{A}}{H_0}$ ввиду произвольности постоянной A написать A , то для $X_k(w, w_0)$ получим

$$X_k(w, w_0) = A \frac{N_{k+1}(w, w_0)}{(w^p - w_0^p)^{k+1}} - A \frac{M_{k+1}\left(w, \frac{1}{\bar{w}_0}\right)}{\left(w^p - \frac{1}{\bar{w}_0^p}\right)^{k+1}}. \quad (1.17)$$

Подставив сначала (1.17) в (1.9), а затем полученные формулы в неравенство (1.10), будем иметь

$$\operatorname{Re} \left\{ xA \sum_{k=0}^n t_k \frac{N_{k+1}(\bar{w}, \bar{w}_0)}{(\bar{w}^p - \bar{w}_0^p)^{k+1}} - xA \sum_{k=0}^n t_k \frac{M_{k+1}\left(\bar{w}, \frac{1}{\bar{w}_0}\right)}{\left(\bar{w}^p - \frac{1}{\bar{w}_0^p}\right)^{k+1}} - \right. \\ \left. - xA \sum_{k=0}^n s_k \left[\frac{N_{k+1}(\bar{w}, \bar{w}_0)}{(\bar{w}^p - \bar{w}_0^p)^{k+1}} \right] - xA \sum_{k=0}^n s_k \left[\frac{M_{k+1}\left(\bar{w}, \frac{1}{\bar{w}_0}\right)}{\left(\bar{w}^p - \frac{1}{\bar{w}_0^p}\right)^{k+1}} \right] \right\} > 0.$$

Заменим здесь члены, содержащие A , на сопряженные и вынесем A за скобку. Увидим, что оставшееся в скобках выражение, ввиду произвольности $\arg A$, равно нулю. Таким образом получим

$$\sum_{k=0}^n (xt_k + xs_k) \frac{N_{k+1}(\bar{w}, \bar{w}_0)}{(\bar{w}^p - \bar{w}_0^p)^{k+1}} - \sum_{k=0}^n (xt_k - xs_k) \left[\frac{M_{k+1}\left(\bar{w}, \frac{1}{\bar{w}_0}\right)}{\left(\bar{w}^p - \frac{1}{\bar{w}_0^p}\right)^{k+1}} \right] = 0,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^n (xt_k - xs_k) \frac{H_0 G_{k+1}(\bar{w}, \bar{w}_0) - F_{k+1}(\bar{w}, \bar{w}_0)}{(\bar{w}^p - \bar{w}_0^p)^{k+1}} = \\ = \sum_{k=0}^n (xt_k - xs_k) \frac{H_0 G_{k+1}\left(\bar{w}, \frac{1}{\bar{w}_0}\right) + F_{k+1}\left(\bar{w}, \frac{1}{\bar{w}_0}\right)}{\left(\bar{w}^p - \frac{1}{\bar{w}_0^p}\right)^{k+1}}. \quad (1.18)$$

Это равенство доказано в предположении, что w_0 — произвольная фиксированная точка из W . Рассматривая теперь ее как переменную и в связи с этим записывая далее w вместо w_0 , получим дифференциальное уравнение для граничной функции. Обозначив для удобства

$$\sum_{k=0}^n (xt_k - xs_k) \frac{G_{k+1}(\bar{w}, w)}{(\bar{w}^p - w^p)^{k+1}} = A(\bar{w}, w), \quad (1.19)$$

$$\sum_{k=0}^n (xt_k - xs_k) \frac{F_{k+1}(\bar{w}, w)}{(\bar{w}^p - w^p)^{k+1}} = B(\bar{w}, w), \quad (1.20)$$

где, как легко видеть, $A(\bar{w}, w)$ и $B(\bar{w}, w)$ являются дробно-рациональными функциями относительно w , будем иметь

$$\left[A(\bar{w}, w) - A\left(\bar{w}, \frac{1}{w}\right) \right] \frac{wf'(w)}{f(w)} = B(\bar{w}, w) - B\left(\bar{w}, \frac{1}{w}\right). \quad (1.21)$$

Из этого уравнения следует, что $f(w)$ регулярна на $|w|=1$, за исключением конечного числа точек, где $f(w)$ имеет алгебраические особенности. Значит, $f(w)$ отображает $|w|<1$ на область B , ограниченную конечным числом аналитических дуг.

Граница области B легко определяется. Представим ее в виде $z=f(e^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Из (1.21) получаем

$$[A(w, e^{i\varphi}) - \overline{A(\bar{w}, e^{i\varphi})}] \frac{z'(\varphi)}{iz(\varphi)} = B(w, e^{i\varphi}) + \overline{B(\bar{w}, e^{i\varphi})},$$

откуда

$$\frac{z'(\varphi)}{z(\varphi)} = C(\varphi),$$

где $C(\varphi)$ — вещественная функция. В результате интегрирования имеем

$$z(\varphi) = e^{iC(\varphi)}, \quad (1.22)$$

где γ — комплексная постоянная.

Таким образом, граница области B состоит из прямолинейных лучей, продолжение которых проходит через точку $z=0$.

Для оценки сверху количества таких лучей, заметим, что функция $A(w, w) = A(w, \frac{1}{\bar{w}})$ на окружности $|w|=1$ имеет не более $2p(n+1)$ нулей. Значит, принадлежащие классу S_p^* решения $f(w)$ уравнения (1.21) отображают круг W на область, представляющую всю плоскость, разрезанную не более чем на $2p(n+1)$ лучам, проходящим при продолжении через точку $z=0$. Эти лучи распадаются на $(n+1)$ группу, каждая из которых содержит p лучей, переходящих друг в друга при повороте области B вокруг начала на угол, кратный $\frac{2\pi}{p}$. Вид функций, дающих рассматриваемое отображение, известен [3]

$$f(w) = \frac{w}{\prod_{l=1}^{n+1} (1 - e^{-ip\theta_l} w^{p_l})^{\frac{2}{p}}}, \quad (1.23)$$

где $\theta_l > 0$ и $\sum_{l=1}^{n+1} p_l = 2$. Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть S_p^* — класс регулярных однолистных в круге $|w|<1$ функций $z=f(w)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, обладающих p -кратной симметрией вращения относительно начала. Пусть $I=I[f(w), f'(w), \dots, f^{(n)}(w), f^{(n+1)}(w)]$ — непрерывный, вместе со своими производными до второго порядка включительно, функционал, определенный на S_p^* (w — фиксированная точка круга $|w|<1$).

Тогда граничные точки области значений этого функционала оставляют функции вида

$$f(\omega) = \frac{\omega}{\prod_{l=1}^{2(n+1)} (1 - e^{-ip_l} \omega^p)^{\frac{p_l}{p}}},$$

где $p_l > 0$, $\sum_{l=1}^{2(n+1)} p_l = 2$.

Эти функции отображают единичный круг на p -симметричные области, представляющие всю плоскость, разрезанную не более чем по $2p(n+1)$ лучам, продолжение которых содержит начало.

§ 2.

Небольшие изменения в доказательстве теоремы 1 позволяют установить весьма общую теорему, относящуюся к интегральным средним в классе S_p .

Введем интеграл

$$I = \int_{\gamma} y |f(\omega), f(\omega), \dots, f^{(n)}(\omega), \overline{f^{(n)}(\omega)}| ds, \quad (2.1)$$

распространенный либо по кусочно гладкой дуге в W , либо по области, лежащей в W и имеющей кусочно гладкую границу. Предположим, что подинтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема как функция своих $2n+2$ аргументов.

Теорема 2. В область D значений функционала

$$I = \int_{\gamma} y |f(\omega), \overline{f(\omega)}, \dots, f^{(n)}(\omega), \overline{f^{(n)}(\omega)}| ds$$

на классе S_p граничные точки вносят функции

$$f(\omega) = \frac{\omega}{\prod_{l=1}^m (1 - e^{-ip_l} \omega^p)^{\frac{p_l}{p}}}, \quad (2.2)$$

где $p_l > 0$, $\sum_{l=1}^m p_l = 2$.

В отличие от теоремы 1, здесь не удастся оценить количество разрезов m в зависимости от n .

При исследовании частных задач полезными оказываются элементарные вариации подкласса функций, представимых формулой (2.2).

Для получения первой из них изменим на δ аргумент одной из точек, являющихся образами точки $z = \infty$. При этом мы получим новую функцию

$$f_*(w) = \frac{w}{\prod_{l=1}^m (1 - e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l})^{\frac{\alpha_l}{p}}}, \quad 1 \leq k \leq l,$$

отображающую W на плоскость с прямыми разрезами, направления которых совпадают с направлениями соответствующих граничных лучей для $f(w)$.

Разложение функции $f_*(w)$ по степеням z имеет вид

$$f_*(w) = f(w) + i \frac{\alpha_k z}{t} f(w) \frac{e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l}}{1 - e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l}} + O(t), \quad 0 \leq k \leq l, \quad (2.3)$$

Подчеркнем, что $t = \frac{\alpha_k z}{p}$ может иметь любой знак, а θ_k — аргумент любой фиксированной точки, переводимой функцией $f(w)$ в бесконечность.

Другую вариацию мы получим в предположении, что область $f(W)$ ограничена по меньшей мере двумя группами лучей, каждая из которых состоит из лучей, переходящих друг в друга при вращении $f(W)$ вокруг начала на угол, кратный $\frac{2\pi}{p}$. Повернув одну из групп лучей на малый угол z в положительном или отрицательном направлении, и, если нужно, выполнив преобразование подобия, мы придем к области, являющейся образом круга W при отображении функцией

$$f_*(w) = \frac{w}{\prod_{l=1}^n (1 - e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l})^{\frac{\alpha_l}{p}}} \left(\frac{1 - e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l}}{1 - e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l}} \right)^z,$$

входящей в класс S_p^* . Здесь θ_k и $\theta_{k'}$ — аргументы двух соседних точек на окружности $|w| = 1$, являющихся образами бесконечности. Ограничиваясь в разложении малыми первого порядка относительно z , мы получим искомую вариацию

$$f_*(w) = f(w) - z f(w) \ln \frac{1 - e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l}}{1 - e^{-ip^{(l)}_k} w^{p_l}} + O(z^2), \quad (2.4)$$

§ 3.

Нахождение области D значений того или иного функционала I вида (1.2) на классе S_p^* сводится, в силу теоремы 1, к отысканию минимального значения функции $I - I_{cr}$ на D , где I подсчитывается для функции (2.2). Принципиально задача сведена к нахождению ми-

нимума функции с конечным числом переменных w , следовательно, она может быть решена элементарными методами. Доведение вычислений до получения уравнений границы области D связано с аналитическими трудностями технического порядка, обычными для задач об экстремуме функций многих переменных. Естественно, что выполнять необходимые вычисления следует лишь тогда, когда ценность результата оправдывает необходимые для его получения усилия. Мы рассмотрим здесь три простых задачи, представляющих некоторый самостоятельный интерес.

Оценка коэффициентов a_{kp} для класса S_p^* . Найдем $\max |a_{kp}|$ для функций $f(w) = w + \sum_{k=2}^{\infty} a_{kp} w^{kp}$ класса S_p^* . Достаточно, по теореме 1, оценить $|a_{kp}|$ для функций, представимых формулой

$$f(w) = \frac{w}{\prod_{l=1}^m |1 - e^{-ip\theta_l} w^p|^{p_l}} = w \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} w^{kp}, \quad (3.1)$$

$$p_l > 0, \quad \sum_{l=1}^m p_l = 2.$$

Введем функцию

$$F(z) = \frac{1}{\prod_{l=1}^m |1 - e^{-ip\theta_l} z^p|^{p_l/p}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} z^{kp}, \quad (3.2)$$

голоморфную в круге $|z| < 1$.

Очевидно,

$$a_{kp} = \frac{F^{(kp)}(0)}{k!}, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Из (3.2) следует, что

$$F'(z) = w(z) F(z), \quad (3.4)$$

где

$$w(z) = \sum_{l=1}^m \frac{p_l}{p} \frac{1}{e^{-ip\theta_l} - z^p}.$$

Продифференцировав равенство (3.4) $k-1$ раз и заметив, что

$$w^{(r)}(z) = r! \sum_{l=1}^m \frac{p_l}{p} \frac{1}{(e^{-ip\theta_l} - z^p)^{r+1}},$$

получим

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{k-1}{n} \right] (k-1-n)! \sum_{l=1}^m \frac{p_l}{p} \frac{1}{(e^{-ip\theta_l} - z^p)^{k-1-n}} F^{(n)}(z),$$

Отсюда

$$\frac{F^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k} \left| \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=1}^m \frac{p_l}{p} \frac{1}{e^{ip_l k - 1 - n + i_l}} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{2}{kp} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}. \quad (3.5)$$

Предположим, что при $1 \leq n \leq k-1$

$$|a_{np+1}| \leq \frac{2(2+p)(2+2p) \cdots [2 + (n-1)p]}{n! p^n} = (-1)^n \left\lfloor \frac{\frac{2}{p}}{n} \right\rfloor. \quad (3.6)$$

На основании неравенства 3.5, суммируя биномальные коэффициенты, имеем

$$|a_{kp+1}| \leq \frac{2}{kp} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left\lfloor \frac{\frac{2}{p}}{n} \right\rfloor = \frac{2}{p} (-1)^{k-1} \left\lfloor \frac{\frac{2}{p}-1}{k-1} \right\rfloor = (-1)^{k-1} \left\lfloor \frac{\frac{2}{p}}{k} \right\rfloor.$$

Таким образом, предположив, что при $1 \leq n \leq k-1$ справедлива оценка (3.6), мы доказали ее и для $n = k$.

Для коэффициентов a_{kp+1} , $k = 1, 2, 3, \dots$ функций

$$f(\omega) = \omega \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp+1} \omega^{kp+1} \in S_p^*$$

справедлива точная оценка

$$|a_{kp+1}| \leq (-1)^k \left\lfloor \frac{\frac{2}{p}}{k} \right\rfloor = \frac{1}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)} = \frac{1}{kB\left(\frac{2}{p}, k\right)}. \quad (3.7)$$

Равенство реализуется для функции

$$f(\omega) = \frac{\omega}{(1 - e^{-ip\theta} \omega^p)^{2/p}}.$$

Область D значений функционала $I = \ln \frac{f(\omega_0)}{\omega_0}$ на классе S_p^* . Из теоремы 1 следует, что граничные функции для рассматриваемого функционала содержатся в семействе

$$f(\omega) = \frac{\omega}{\prod_{l=1}^m (1 - e^{-ip_l \theta_l} \omega^{p_l})^{\frac{p_l}{p}}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$p_1 + p_2 = 2, \quad p_{l+2} \geq 0.$$

Эти функции вносят в D точки

$$I = - \sum_{l=1}^m \frac{p_l}{p} \ln (1 - e^{-ip_l \theta_l} \omega_0^{p_l}). \quad (3.8)$$

Воспользовавшись тем, что вариация граничной функции может быть записана в виде (2.3), при произвольном значении параметра δ из неравенства $|I_0 - I_\varepsilon| \leq |I_* - I_\varepsilon|$ получаем

$$\operatorname{Im} \left[x \frac{e^{-ip\theta_1} \bar{\omega}_0^p}{1 - e^{-ip\theta_1} \bar{\omega}_0^p} \right] = 0, \quad l = 1, 2,$$

где $x = e^{-i\theta_1}$, $\theta_1 = \arg(I_0 - I_\varepsilon)$. Отсюда, положив $-\theta_1 + \arg \bar{\omega}_0 = \varphi_1$ и $|\bar{\omega}_0|^p = r$, имеем

$$\sin(\theta_1 - p\varphi_1) = r$$

или

$$\begin{aligned} p\varphi_1 &= \theta_1 - \arcsin(r^p \sin \theta_1), \\ p\varphi_2 &= \theta_1 - \pi - \arcsin(r^p \sin \theta_1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставив значения (3.9) в формулу (3.8), мы получим точки $I = I(\eta)$, $\eta = \eta_1 \in [0, 2]$ области D , соединяющие некоторый отрезок. Так как $\frac{d}{d\eta} |I(\eta) - I_*| > 0$ при $\eta \in (0, 2)$, то наименьшее значение $|I(\eta) - I_*|$ получаем, когда $\eta = 0$.

Итак, доказано, что граничные точки области D значений функционала $I = \ln \frac{f(\bar{\omega}_0)}{\bar{\omega}_0}$ на классе S_p^* определяются формулой

$$I_* = -\frac{2}{p} \ln(1 - |\bar{\omega}_0|^p e^{i\theta_1}). \quad (3.10)$$

где

$$\theta_1 = \theta_1 - \arcsin(|\bar{\omega}_0|^p \sin \theta_1). \quad (3.11)$$

Граничными функциями являются

$$f(\bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}}{(1 - e^{-ip\theta_1} \bar{\omega}^p)^{1/p}}. \quad (3.12)$$

где

$$-\theta_1 = \theta_1 - \arcsin(|\bar{\omega}_0|^p \sin \theta_1) - p \arg \bar{\omega}_0. \quad (3.13)$$

В частности, при $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, получим точную оценку

$$\arg \frac{f(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} = \frac{2}{p} \arcsin |\bar{\omega}|^p. \quad (3.14)$$

Формулы (3.10) и (3.11) определяют одновременно и область значений функционала $\ln g^*(\bar{\omega}_0)$ на классе S_p^* функций $g(\bar{\omega})$, регулярных, однолистных в круге W , отображающих этот круг на выпуклые области, обладающие p -кратной симметрией вращения.

Область D значений функционала $I = \frac{w_0 f'(w_0)}{f(w_0)}$ на классе S_p^* . Для решения вопроса о граничных точках области D достаточно исследовать семейство функций

$$f(w) = \frac{w^p}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{-ip\tau_i} w^p)^{\frac{\alpha_i}{p}}}, \quad (3.15)$$

при $1 < m < 4$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 2$, $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_1 + \frac{2\pi}{p}$.

Предположим, что для граничной функции $f(w)$ $m=3$ или $m=4$. Тогда, применив вариацию (2.3) при каждом k , $1 \leq k \leq m$, мы придем к условию

$$\operatorname{Im} \left[x \frac{e^{-ip\tau_k} w^p}{(1 - e^{-ip\tau_k} w^p)^2} \right] = 0, \quad x = e^{-i\alpha}, \quad \alpha = \arg(l_0 - l_k).$$

из которого следует, что

$$x \frac{e^{ip\tau_k}}{(1 - e^{ip\tau_k} r^p)^2} = x \frac{e^{-ip\tau_k}}{(1 - e^{-ip\tau_k} r^p)^2}. \quad (3.16)$$

Здесь $\tau_k = -b_k + \arg w$. Решая уравнение (3.16), получаем для $e^{-ip\tau_k}$ при $1 \leq k \leq m$, $m=3, 4$ лишь два значения

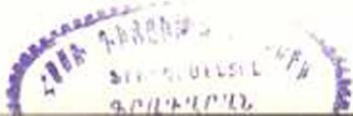
$$e^{-ip\tau_k} = \frac{r^p - x}{1 - xr^p}.$$

Следовательно, при $m=3$ или $m=4$ функция (3.15) не является граничной.

Если $m=1$ или $m=2$, то функции (3.15) вносят в D точки

$$\begin{aligned} I &= -i + \frac{\alpha}{1 - e^{-ip\tau_1} r^p} = \frac{2 - \alpha}{1 - e^{-ip\tau_1} r^p} = \\ &= \frac{1 - r^{2p}}{1 - r^{2p}} + 2(\alpha - 1) \frac{r^p e^{-i\alpha}}{1 - r^{2p}}, \quad 0 < \alpha < 2. \end{aligned}$$

Из полученной формулы непосредственно видно, что при $0 < \alpha < 2$ значения I заполняют диаметр круга с центром в точке $\frac{1+r^{2p}}{1-r^{2p}}$ и радиусом $\frac{2r^p}{1-r^{2p}}$. Этот круг и является областью значений функционала. Для граничных функций $m=1$.



Областью значений функционала $I = \frac{\omega_0 f'(\omega_0)}{f(\omega_0)}$ на классе S_p^* является круг с центром в точке $\frac{1 + |\omega_0|^{2p}}{1 - |\omega_0|^{2p}}$ и радиусом $\frac{2|\omega_0|^p}{1 - |\omega_0|^{2p}}$. Граничными функциями являются

$$f(\omega) = \frac{\omega}{(1 - e^{-ip\theta} \omega_0^{2p})},$$

где

$$e^{-ip\theta} = \frac{|\omega_0|^p + e^{-i\alpha}}{1 + |\omega_0|^p e^{-i\alpha}}.$$

Легко установить, в частности, что

$$\left| \arg \frac{\omega_0 f'(\omega_0)}{f(\omega_0)} \right| \leq \arg \sin \frac{2|\omega_0|^p}{1 + |\omega_0|^{2p}}. \quad (3.17)$$

Отметим также как следствие рассмотренной задачи, что значения функционала $\frac{\omega_0 g'(\omega_0)}{g'(\omega_0)}$ на классе S_p^0 образуют замкнутый круг с центром в точке $\frac{2|\omega_0|^{2p}}{1 - |\omega_0|^{2p}}$ и радиусом $\frac{2|\omega_0|^p}{1 - |\omega_0|^{2p}}$.

Тамский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Получила 15.1.1964

Ի. Ա. Ալեքսանդրով

ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԱՍՏՂԱԶԵՎ, ՇՐՋԱՆՈՒՄ ՄԻԱԹԵՐԹ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա. Ա. Փ Ո Փ Ո Ւ Ն Մ

Միավոր շրջանը սկզբնականի նկատմամբ p -սխեմորիկ առաջաձև տիրույթների վրա արառադատկերող միավորի մեկուկար $f(\omega)$ ֆունկցիաների դասի վրա պիտարկվում է (1.2) տիպի ֆունկցիոնալ: Աշխատության մեջ ապացուցված է, որ եզրային կետերը ֆունկցիոնալի արժեքների [1] տիրույթի մեջ մտնում են ֆունկցիաներ, որանք միավոր շրջանը արառադատկերում են ամբողջ հարկթույթյունը ոչ ավելի քան $2p(p+1)$ ճառագայթներով կորատեղուց ստացված p -սխեմորիկ տիրույթների վրա, ընդ որում ուղի ճառագայթների շարունակությունը պարունակում է սկզբնականը: [1] տիրույթի եզրի որոշումը հանգեցվում է մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի էքստրեմումի ուսումնասիրությանը:

Ստացված են ընդհանուր որակական արդյունքներ՝ (2.1) բանաձևով ներկայացված ինտեգրալ միջինների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александров Н. А. К вопросу о связности множества значений функционала. „Некоторые вопросы математики и механики (сборник статей)*“, Издательство Томского университета, Томск, 1961.
2. Александров Н. А. Вариация звездообразных функций. „Некоторые вопросы математики и механики (сборник статей)*“, Издательство Томского университета, Томск, 1961.
3. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.