

ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА

Л. А. Мовсисян

К теории неустановившегося движения реальной сжимаемой жидкости в длинных трубопроводах

Исследования одномерных нестационарных изотермических движений вязкого газа в трубопроводах постоянного сечения при соответствующих условиях однозначности¹ сводятся к решению следующей системы уравнений [1]:

уравнения движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D} v^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

и уравнения состояния

$$p = \rho g R T \quad (T = \text{const}), \quad (3)$$

где p — среднее по сечению трубы давление газа,

ρ — средняя по сечению трубы плотность газа,

v — средняя по сечению трубы скорость газа,

x — направление оси трубы,

λ — коэффициент сопротивления,

D — диаметр трубы,

R — газовая постоянная,

T — абсолютная температура газа,

g — ускорение свободного падения.

Система уравнений (1), (2), (3) относительно искомых величин $p(x, t)$, $\rho(x, t)$, $v(x, t)$ является замкнутой, однако разрешение ее в представленном виде, хотя бы приближенно, для краевых условий сопряжено с большими трудностями.

Если предположить, что трубопровод достаточно длинный (чему могут соответствовать современные магистральные газопроводы, в которых силы вязкости намного больше сил инерции [2, 3]), то в урав-

¹ О граничных и начальных условиях см. ниже.

нении (1) инерционные члены $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $v \frac{\partial v}{\partial x}$ можно отбросить. Тогда система (1), (2), (3) после исключения ρ и перехода к безразмерным независимым переменным примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\lambda L}{2DgRT} p v^2 &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{t^*}{L} \frac{\partial (pv)}{\partial \xi} &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

где $\xi = x/L$; $\tau = t/t^*$,

L — длина трубопровода,

t^* — постоянная с размерностью времени.

Первое уравнение системы (4) умножив на p и обозначив $pv = q$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial p^2}{\partial x} + \frac{\lambda L}{DgRT} q^2 &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{t^*}{L} \frac{\partial q}{\partial \xi} &= 0.\end{aligned}\quad (4')$$

Так как в магистральных газопроводах газ движется в зоне постоянства сопротивления (автомодельная зона), то $\lambda = \text{const}$ [4].

Из второго уравнения системы (4') видно, что существует такая функция $\psi(\xi, \tau)$, для которой имеют место следующие соотношения

$$p = \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi}; \quad q = -\frac{L}{t^*} \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Подставив значения $p(\xi, \tau)$ и $q(\xi, \tau)$ из (5) в первое уравнение системы (4') и выбрав $t^* = \sqrt{\frac{\lambda L^3}{2DgRT}}$, получим нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

Составим условия однозначности.

Движение газа до некоторого начального момента времени $\tau \leq 0$ будем предполагать заданным. В связи с этим может возникнуть множество начальных условий, различных по своему характеру и соответствующих определенным нестационарным задачам. Ограничимся общим случаем и запишем следующие начальные условия при $\tau = 0$

$$p(\xi, 0) = p_0(\xi); \quad q(\xi, 0) = q_0(\xi). \quad (7)$$

Например, если предположить, что до момента $\tau = 0$ движение было стационарным, то, как легко видеть из системы (4'), начальными условиями будут

$$q(\xi, 0) = \text{const}; \quad p^2(\xi, 0) = \text{const} \cdot \xi + \text{const}.$$

Конечно, $p_0(\xi)$ и $q_0(\xi)$ не могут быть независимы друг от друга, они должны удовлетворять системе (4'). При определении начального условия для функции $\psi(\xi, \tau)$ целесообразно обратиться к первому соотношению (5), ибо оно не содержит производной по τ . Отметим, что функцию $\psi(\xi, \tau)$ можно определять с точностью до произвольной постоянной.

На обоих концах трубопровода $\xi = 0$ и $\xi = 1$ при $\tau > 0$ в общем случае могут быть заданы p или q в функции от времени, т. е.

при $\xi = 0$ (начало трубопровода)

$$q = q_1(\tau) \text{ [или } p = p_1(\tau)\text{]}. \quad (8)$$

при $\xi = 1$ (конец трубопровода)

$$q = q_2(\tau) \text{ [или } p = p_2(\tau)\text{]}. \quad (9)$$

Заметим, что для определения граничных значений функции $\psi(\xi, \tau)$ необходимо обратиться ко второму соотношению (5).

Поясним физическую сущность условий (4), (8), (9).

Если через Q обозначим весовой расход газа через поперечное сечение s трубопровода, то

$$Q = spgv.$$

Воспользовавшись уравнением (3) и обозначением $q = p\tau$, можем написать

$$q = c \cdot Q \quad (c = RT/s = \text{const}). \quad (10)$$

Следовательно, представленные условия однозначности выражают собой задание давления или весового расхода газа как в начальный момент по всей длине трубопровода, так и в последующие моменты времени на его концах.

Таким образом, исследования нестационарных движений сжимаемой жидкости в длинных трубопроводах сводятся к решению нелинейного дифференциального уравнения (6) с краевыми условиями (7), (8), (9) при наличии соотношений (5).

По-видимому, в таком общем аспекте внутреннюю задачу, хотя бы приближенно, разрешить невозможно. Однако, для некоторых частных случаев условий однозначности, уравнение (6) можно свести к бесконечной системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть до некоторого начального момента времени $\tau = 0$ в газопроводе находился газ под давлением $p_0 = \text{const}$. Следовательно, весовой расход газа Q , а с ним и q при $\tau = 0$ равны нулю. Предположим, что после момента $\tau = 0$ на обоих концах газопровода расходы газа, будучи нулями, стали заданными непрерывными и бесконечно раз дифференцируемыми в точке $\tau = 0$ функциями $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$, причем

$$Q_1(0) = Q_2(0) = 0. \quad (11)$$

Требуется определить $p(\xi, \tau)$ и $Q(\xi, \tau)$

Условия однозначности для функции $\psi(\xi, \tau)$ будут

$$\frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} \equiv p_0; \quad \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = -\frac{L}{t^*} q_0(\xi) \equiv 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\xi=0} = -m Q_1(\tau), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\xi=1} = -m Q_2(\tau), \quad (14)$$

где $m = \frac{cL}{t^*}$.

Разложив $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ в точке $\tau=0$ в ряд Тейлора, получим

$$Q_1(\tau) = a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + a_n\tau^n + \dots, \quad (15)$$

$$Q_2(\tau) = b_1\tau + b_2\tau^2 + \dots + b_n\tau^n + \dots, \quad (16)$$

где

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n Q_1(\tau)}{d\tau^n} \Big|_{\tau=0}; \quad b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n Q_2(\tau)}{d\tau^n} \Big|_{\tau=0}.$$

[Согласно условиям (11) свободные члены разложений (15) и (16) равны нулю].

Решение уравнения (6) для значений $\tau < 1$ (соответственно

$t < t^* = \sqrt{\frac{\kappa L^2}{2DgRT}}$) будем искать в виде бесконечного ряда по степеням τ

$$\psi(\xi, \tau) = y_0(\xi) + y_1(\xi)\tau + y_2(\xi)\tau^2 + \dots + y_n(\xi)\tau^n + \dots, \quad (17)$$

где $y_i(\xi)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) функции, подлежащие определению.

Согласно соотношениям (12)–(16) для $y_i(\xi)$ будем иметь условия

$$y'_0(\xi) \equiv p_0 = \text{const} \quad (y'_0(\xi) = 0), \quad (18)$$

$$y_1(\xi) \equiv 0, \quad (19)$$

$$y_i(0) = -\frac{m}{i} a_{i-1} \quad (i=2, 3, \dots), \quad (20)$$

$$y_i(1) = -\frac{m}{i} b_{i-1} \quad (i=2, 3, \dots). \quad (21)$$

Подставив значение $\psi(\xi, \tau)$ из (17) в уравнение (6), приравняв функциональные коэффициенты при одинаковых степенях τ и воспользовавшись условиями (18), (19), получим следующую бесконечную систему обыкновенных линейных (за исключением первого) дифференциальных уравнений второго порядка

$$p_0 y_2'' + 4y_2'^2 = 0, \quad (1)$$

$$p_0 y_3'' + 12y_2 y_3' = 0,$$

$$p_0 y_4'' + 16y_2 y_4' + (9y_3'^2 + y_2' y_3'') = 0,$$

$$p_0 y_5'' + 20y_2 y_5' + (24y_3 y_4' + y_2' y_3'' + y_2'' y_3') = 0,$$

$$p_0 y_6'' + 24y_2 y_6' + (30y_3 y_5' + 16y_4'^2 + y_2' y_4'' + y_2'' y_4' + y_3' y_5'') = 0, \quad (22)$$

$$p_0 y_n'' + 4n y_2 y_n' + f_n(y_2, \dots, y_{n-1}; y_2', \dots, y_{n-1}', y_2'', \dots, y_{n-2}'') = 0,$$

где $y_i'(\xi)$, $y_i''(\xi)$ — производные от функций $y_i(\xi)$ по ξ .

Получение точного решения написанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений не представляется возможным, ибо, как видно из (1), функция $y_2(\xi)$, входящая в упомянутые уравнения, есть эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(\xi)$. Систему (22) проще всего решить численными методами [в основном методом последовательных приближений, при условии, чтобы нулевые приближения, являющиеся линейными функциями ξ , удовлетворяли условиям однозначности (20), (21), а остальные — на границах были нулями], что не представляет особого труда.

Однако для некоторых частных случаев поставленной задачи при дополнительных условиях для функций $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ систему дифференциальных уравнений (22) можно разрешить в элементарных функциях (даже полиномами).

Покажем, что если заданные функции $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ удовлетворяют условиям

$$\left. \frac{\partial Q_1(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial Q_2(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (23)$$

то

$$y_2(\xi) = 0. \quad (24)$$

Из второго соотношения (5) и выражений (10) и (17) легко видеть, что условия (23) эквивалентны условиям

$$y_2(0) = y_2(1) = 0. \quad (25)$$

Прежде всего докажем, что при соблюдении условий (23) имеет место следующее равенство

$$\left. \frac{\partial^2 q(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} \right|_{\xi=0, \tau=0} = \left. \frac{\partial^2 q(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} \right|_{\xi=1, \tau=0}, \quad (26)$$

или что то же —

$$\left. \frac{dy_2(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{dy_2(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} \quad (27)$$

Действительно, если в уравнении (I) системы (22) за независимую переменную принять y_2 , а за функцию — ее первую производную, которую обозначим через z , то уравнение (I) запишется так

$$p_0 z \frac{dz}{dy_2} + 4y_2^2 = 0.$$

Разрешив его относительно z , получим

$$z = \frac{dy_2(\xi)}{d\xi} = \pm \sqrt{\text{const} - \frac{8}{3p_0} y_2^3(\xi)},$$

откуда видно, что при условиях (25) [что то же — (23)] выполняется равенство (27) [или (26)].

Наконец, покажем, что из равенства (26) вытекает тождество (24). Первое уравнение системы (4') разрешив относительно $p^2(\xi, \tau)$, можем написать

$$p^2(\xi, \tau) = - \frac{\lambda L}{DgRT} \int_0^\xi q^2(\xi, \tau) d\xi + p^2(\xi, \tau)|_{\xi=0}. \quad (28)$$

Уравнение (28) два раза дифференцируя по τ в точке $\tau=0$ и принимая во внимание условия (12) и второе уравнение системы (4'), получим

$$p_0 \frac{\partial^2 p(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} = - \frac{\lambda L}{DgRT} \int_0^\xi \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2_{\tau=0} d\xi - \frac{t^* p_0}{L} \frac{\partial^2 q(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} \Big|_{\xi=0, \tau=0}. \quad (29)$$

Аналогично можно написать

$$p_0 \frac{\partial^2 p(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} = - \frac{\lambda L}{DgRT} \int_1^\xi \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2_{\tau=0} d\xi - \frac{t^* p_0}{L} \frac{\partial^2 q(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} \Big|_{\xi=1, \tau=0}. \quad (30)$$

Вычитая из (29) уравнение (30) и имея в виду (26), окончательно получим

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial q(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right]^2_{\tau=0} d\xi = 0.$$

Но ввиду того, что подынтегральное выражение всегда положительно, полученное тождество имеет место лишь при

$$\frac{\partial q(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0,$$

или, что то же —

$$y_2(\xi) = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Отметим, что тождество (24) существенно меняет облик дифференциальных уравнений системы (22), позволяя их решения $y_i(\xi)$ ($i=3, 4, \dots$) получить квадратурами.

Таким образом, если предположить, что в разложениях (15) и (16)

$$a_1 = \left. \frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad b_1 = \left. \frac{dQ_2(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (31)$$

то $y_i(\xi)$ определяются из системы (22) следующим образом

$$y_i(\xi) = - \int d\xi \int f_i(y_3, \dots, y_{i-1}; y'_3, \dots, y'_{i-1}; y''_3, \dots, y''_{i-1}) d\xi + A_i \xi + B_i, \quad (32)$$

где A_i и B_i — постоянные, подлежащие определению из условий однозначности (20) и (21).

Так например, простые выкладки с учетом (20), (21) и (31) дают следующие значения для $y_i(\xi)$.

$$y_3(\xi) = A_3 \xi + B_3,$$

$$y_4(\xi) = - \frac{3}{4A_3^2 p_0} (A_3 \xi + B_3)^4 + A_4 \xi + B_4,$$

$$y_5(\xi) = \frac{3}{7A_3^4 p_0^2} (A_3 \xi + B_3)^7 + \frac{3A_4}{2A_3^2 p_0^2} \xi^4 + \frac{3(A_3 B_4 + A_4 B_3)}{A_3^2 p_0^2} \xi^3 + \\ + \frac{9B_3 B_4}{A_3^2 p_0^2} \xi^2 + A_5 \xi + B_5,$$

$$\dots$$

где

$$A_3 = \frac{m}{3} (a_2 - b_2), \quad B_3 = - \frac{m}{3} a_2,$$

$$A_4 = \frac{m}{4} (a_2 - b_2) + \frac{m^2 b_2^4}{12 p_0 (a_2 - b_2)^2}; \quad B_4 = \frac{m^2 a_2^4}{12 p_0 (a_2 - b_2)^2} - \frac{m}{4} a_2,$$

$$\dots$$

Заметим, что если вместо аналитических выражений $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ будут даны их графики, то в этом случае проще всего их аппроксимировать многочленом какой-либо степени (в зависимости от степени точности расчетов) без свободного члена или даже без члена,

содержащего τ [начальные условия (18) и (19) должны быть удовлетворены].

Напомним, что рассматриваемый метод допускает решение в виде ряда (17) лишь для значений

$$t < t^* = \sqrt{\frac{\lambda L^3}{2DgRT}}.$$

Например, для газопровода с данными

$$\begin{aligned} L &= 3 \cdot 10^5 \text{ м}, & T &= 280 \text{ град.}, \\ D &= 0,5 \text{ м}, & R &= 29,3 \text{ м/град (воздух)}, \\ g &= 9,8 \text{ м/сек}^2, & \lambda &= 0,03 \end{aligned}$$

предельное значение для времени t равно 27,5 час, что в большинстве случаев вполне может удовлетворить практическое применение данного метода.

Однако, при некоторых других условиях однозначности, такого ограничения для t можно избежать.

Решим теперь другую задачу.

Пусть до момента времени $\tau = 0$ в газопроводе находился газ под давлением $p_0 = \text{const}$. Следовательно, начальные условия (12) в данном случае остаются в силе.

Предположим, что после момента $\tau = 0$ в начале газопровода ($\xi = 0$) расход и давление газа стали заданными непрерывными и ограниченными вместе со своими первыми производными для $\tau > 0$ функциями соответственно $Q(0, \tau)$ и $p(0, \tau)$, для которых сделаем одно ограничение: пусть они будут функциями квадрата своего аргумента, т. е.

$$Q(0, \tau) = c_1 \tau^2; \quad p(0, \tau) = c_2 \Psi(\tau^2), \quad (33)$$

причем

$$c_2 \Psi(0) = p_0, \quad [\Psi(\tau^2) > 0],$$

где c_1 и c_2 — некоторые отличные от нуля, определенные постоянные.

Условиями однозначности для рассматриваемой задачи будут

$$\left. \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\tau=0} = p_0; \quad \left. \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = -\frac{L}{t^*} q_0(\xi) = 0, \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\xi=0} = -mc_1 \tau^2, \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = c_2 \Psi(\tau^2). \quad (36)$$

Решение уравнения (6) при условиях (34), (35) и (36) теперь будем искать в виде бесконечного ряда по степеням ξ , т. е.

$$\psi(\xi, \tau) = \varphi_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) \xi^n. \quad (37)$$

Пользуясь условиями (35) и (36), получим первые два члена ряда (37)

$$\varphi_0'(\tau) = -mc_1\tau\chi(\tau^2); \quad \varphi_1(\tau) = c_2\Psi(\tau^2), \quad (38)$$

где $\varphi_0'(\tau)$ — производная от функции $\varphi_0(\tau)$ по τ .

Подставляя значение $\psi(\xi, \tau)$ из (37) в уравнение (6) и приравнявая функциональные коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $\varphi_i(\tau)$ ($i=2, 3, \dots$)

$$2\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_0''$$

$$6\varphi_1\varphi_3 + 4\varphi_2^2 = -2\varphi_0'\varphi_1'$$

$$12\varphi_1\varphi_4 + 18\varphi_2\varphi_3 = -(2\varphi_0'\varphi_2' + \varphi_1''')$$

$$20\varphi_1\varphi_5 + 32\varphi_1\varphi_4 + 18\varphi_3^2 = -2(\varphi_0'\varphi_3' + \varphi_1'\varphi_2''),$$

$$\dots \dots \dots$$

откуда при наличии соотношений (35) очень легко определяются искомые функции $\varphi_i(\tau)$ ($i=2, 3, \dots$)

$$\varphi_2 = -\frac{m^2c_1^2\tau^2\chi^2(\tau^2)}{2c_2\Psi(\tau^2)},$$

$$\varphi_3 = \frac{4mc_1\tau^2\chi(\tau^2)\Psi'(\tau^2)}{6\Psi(\tau^2)} - \frac{m^4c_1^4\tau^4\chi^4(\tau^2)}{6c_2^3\Psi^3(\tau^2)},$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 = & \frac{3m^2c_1^2\tau^2\chi^2(\tau^2)}{4c_2^2\Psi^2(\tau^2)} \left[\frac{4mc_1\tau^2\chi(\tau^2)\Psi'(\tau^2)}{6\Psi(\tau^2)} - \frac{m^4c_1^4\tau^4\chi^4(\tau^2)}{6c_2^3\Psi^3(\tau^2)} \right] + \\ & + \frac{m^4c_1^4\tau^4}{c_2} \left[\tau^2 \frac{\chi^2(\tau^2)}{\Psi(\tau^2)} \right]' - 4c_2^2\tau^2\Psi^2(\tau^2), \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots$$

где штрихами обозначены производные от функций по τ .

Легко видеть, что $\varphi_i(\tau)$ ($i=2, 3, \dots$) также являются функциями квадрата своего аргумента. Следовательно, начальные условия (34) уже удовлетворяются.

Заметим, что граничные условия (35) и (36) являются несколько своеобразными (наподобие обратной задачи), ибо на практике в начале газопровода невозможно произвольным образом регулировать сразу расход и давление. Один из последних должен быть задан в конце газопровода, а в начале уже получится искомая функция давления (или расхода).

Однако, в некоторых случаях практики создается необходимость в получении в начале газопровода нужного давления (или расхода), для чего данный метод может найти применение.

В заключение следует отметить, что рассмотренными случаями не исчерпываются методы решений полученного нами уравнения (6) с условиями однозначности (7), (8) и (9). Наоборот, может возникнуть множество решений (как приближенных [5], так и точных) различных нестационарных задач движения реального газа в длинных трубопроводах, что является предметом специального исследования.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 25 XI 1960

Լ. Ա. Մովսեսյան

ԵՐԿԱՐ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ ՍԵՂՄՎՈՂ ՌԵԱԼ ՇԵՂՈՒԿԻ ՈՋ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՇԱՐՔՄԱՆ ՏԵՍՈՒՅՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Փ. Ո.

Ինչպես հարանի է [1], խողովակներում մածուցիկ զազի չհաստատված իզոթերմիկ շարժման առանձնահատկությունը հանդիս է (1), (2) և (3) հափառարտման լուծմանը՝ համապատասխան եզրային պայմանների առկայությամբ:

Մեծ երկարություն ունեցող խողովակների համար այդ հափառարտմանը բերվում են (4) սիստեմին, որից (5) անհաղթյունների օգնությամբ ստացվում է պարարտական տիպի (6) հափառարտման: Այդ հափառարտման եզրային պայմաններն են՝ (7), (8) և (9):

Ներկա հոգիվածում (6) հափառարտման լուծումը (12), (13) և (14) եզրային պայմանների զեպքում բերվում է երկրորդ կարգի սովորական դժային դիֆերենցիալ հափառարտման (22) անկերջ սիստեմին:

Ապացուցվում է, որ եթե գոյություն ունի (23) անհաղթյունը, ապա (22) սիստեմի լուծումն ստացվում է կվադրատուրաներով:

Արախտով, ներկա հոգիվածում զազի չհաստատված շարժման (1), (2) և (3) հափառարտմանը առաջին անգամ բերվում են (6) հափառարտմանը և լուծվում է ի մասնավոր զեպքի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Христианович С. А. и др. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, М.—Л., 1938.
2. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Госиздат научно-технической литературы, М.—Л., 1951.
3. Мовсесян Л. А. К вопросу об инерционном сопротивлении магистральных газопроводов. Известия АН АрмССР, серия техн. наук*, № 4, 1960.
4. Смирнов А. С., Ширковский А. И. Добыча и транспорт газа. Гос. научно-техн. изд. нефтяной и горно-топливной литературы, М., 1957.
5. Мовсесян Л. А. О неустановившемся движении сжимаемой жидкости в длинных трубопроводах. Инженерно-физический журнал*, № 1, 1961.