

Г. А. Бабаджаниян

Об одной задаче нестационарного движения газа в длинном газопроводе

§ 1. Дифференциальные уравнения движения. Граничные и начальные условия

Рассмотрим одномерное, изотермическое течение реального газа в длинном газопроводе при $M \ll 1$ (M — число Маха).

Предположим, что каким-либо образом нарушился первоначальный (стационарный) режим движения газа. Задача заключается в определении параметров нестационарного движения газа (давления, скорости, плотности) при соответствующих граничных и начальных условиях.

В общем случае одномерное движение газа описывается следующей системой уравнений [1]

$$\begin{aligned} -f \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial t} + Q \frac{\partial v}{8\delta} + \gamma f \cdot \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \beta) Qv], \\ -\frac{\partial}{\partial t} (\rho f) &= \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Первое уравнение получено из теоремы количества движения, где значение касательного напряжения τ на стенке трубы принято равным

$$\tau = \frac{\xi}{8} \rho v^2,$$

а второе — есть уравнение неразрывности.

В системе (1.1) приняты следующие обозначения:

- f — площадь поперечного сечения трубы,
- p — среднее по сечению давление газа,
- ρ — средняя по сечению плотность газа,
- v — средняя по сечению скорость газа,
- Q — массовый расход газа,
- ξ — коэффициент сопротивления,
- γ — удельный вес газа,
- δ — гидравлический радиус сечения трубы,
- α — угол между направлением течения и горизонтом,

β — поправка Кориолиса,

x — направление потока,

t — время.

Задачу решаем в следующих предположениях.

1. Трубопровод горизонтальный ($\alpha = 0$) и имеет форму кругового цилиндра ($f = \text{const}$).

2. При нестационарном процессе характеристики сопротивления остаются такими же, какими были при стационарном.

3. Ввиду того, что газопровод достаточно длинный и газ движется с малой скоростью ($M \ll 1$), представляется возможность пренебрежения членами

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v), \quad \frac{\partial}{\partial x}[(1 + \beta)\rho v^2], \quad v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Учитывая вышеперечисленные предположения и допущения, система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\xi \rho v^2}{8\delta}, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

К этой системе присоединив уравнение состояния

$$p = \rho gRT,$$

получим нелинейную замкнутую систему уравнений параболического типа с неизвестными p , v , ρ .

Интегрирование системы (1.2) при тех граничных и начальных условиях, которые ставятся в данной задаче (см. ниже) невозможно, поэтому сделаем частичную линеаризацию, а именно, заменим величину $\frac{\xi \rho v}{8\delta}$ средним значением в интервале изменения расхода, т. е.

$$\left(\frac{\xi \rho v}{8\delta}\right)_{cp} = b = \text{const}.$$

Тогда система (1.2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= bv, \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}, \\ p &= \rho gRT. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Исключив из этой системы ρ и v , относительно p получим следующее уравнение

$$p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = b \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.4)$$

которое посредством подстановки $P = p^2$ приведет к виду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{b}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Зададимся следующими граничными и начальными условиями

1. при $x = 0$, $P = P_n = \text{const}$,

т. е. в начале газопровода давление остается постоянным;

2. при $x = L$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$,

т. е. мгновенно прекращается поток газа в конце газопровода (имеется задвижка, которая мгновенно закрывается);

3. при $t = 0$, $P = P_0(x)$.

Здесь $P_0(x)$ — заданная функция, показывающая закон изменения квадрата давления при стационарном режиме, которая берется в виде [2]

$$P_0(x) = P_n - (P_n - P_k) \frac{x}{L}, \quad (1.6)$$

где P_n , P_k — значения квадратов давлений в начале и в конце газопровода,

L — длина газопровода.

§ 2. Решение уравнения (1.5)

Решение уравнения (1.5) при вышеизложенных граничных и начальных условиях также представляется невыполнимым, поэтому его будем искать своеобразными последовательными приближениями.

Для решения задачи в первом приближении переменный коэффициент $P^{-1/2}$ заменим его осредненным значением для стационарного режима согласно формуле [3]

$$P^{1/2} = (p_0)_{cp} = \left[\frac{2}{3} \left(P_n + \frac{P_k^2}{P_n + P_k} \right) \right]^{1/2}.$$

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{b}{(p_0)_{cp}} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Это есть уравнение теплопроводности, решение которого представим в следующем виде

$$P(x, t) = P_n + (A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x) e^{-\frac{(p_0)_{cp} \lambda^2 t}{b}}$$

Имея ввиду граничные условия 1 и 2, получим

$$P(x, t) = P_n + A_1 \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-\frac{(p_0)_{cp} n^2 \pi^2}{4L^2 b} t},$$

где $n = 1, 3, 5 \dots$

Следовательно, общее решение представится в виде

$$P(x, t) = P_n + \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-\mu n^2 t}, \quad (2.2)$$

где

$$\mu = \frac{\pi^2 (p_0)_{cp}}{4L^2 b}. \quad (2.3)$$

Из начального условия можно написать

$$P_0(x) = P_n + \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{2L}.$$

Разлагая функцию $P_0(x) - P_n$ в ряд по синусам, для коэффициентов A_n получим

$$A_n = \frac{\int_0^L [P_0(x) - P_n] \sin \frac{n\pi x}{2L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{2L} dx}.$$

Подставив значение $P_0(x) - P_n$ из (1.6) и произведя интегрирование, получим

$$A_n = -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8(p_n^2 - p_k^2)}{n^2 \pi^2}.$$

Тогда выражение (2.2) примет вид

$$P(x, t) = P_n - \frac{8(p_n^2 - p_k^2)}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-\mu n^2 t}.$$

Имея в виду обозначение $P(x, t) = p^2(x, t)$, получим окончательное решение уравнения (1.4) в первом приближении

$$p(x, t) = \sqrt{p_n^2 - \frac{8(p_n^2 - p_k^2)}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-\mu n^2 t}}. \quad (2.4)$$

Для решения задачи во втором приближении переменный коэффициент $P^{1/2}$ в уравнении (1.5) возьмем в следующем виде

$$P^{1/2} = p(t) = p_n + [(p_0)_{cp} - p_n] e^{-\frac{t}{\mu}} \quad (2.5)$$

Вид этой функции обусловлен тем, что при $t \rightarrow \infty$, $P \rightarrow P_n$, или $p \rightarrow p_n$; при $t \rightarrow 0$, $P \rightarrow P_0$, или $p \rightarrow p_0$.

Подставив (2.5) в уравнение (1.5), получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{b}{(p_0)_{cp}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (2.6)$$

где

$$\tau = \frac{p_n}{(p_0)_{cp}} t + \frac{2}{\mu} \left[1 - \frac{p_n}{(p_0)_{cp}} \right] \left(1 - e^{-\frac{t}{\mu}} \right) = \int_0^t \pi(t) dt \quad (2.7)$$

Таким образом, решение уравнения (1.4) во втором приближении будет

$$P(x, t) = \sqrt{p_n^2 - \frac{8(p_n^2 - p_k^2)}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-\mu n^2 \tau}} \quad (2.8)$$

Для получения третьего приближения, значение коэффициента $P^{1/2}$ в уравнении (1.5) примем в виде

$$P^{1/2} = p = [\pi(t) p_0(x) (p_0)_{cp}],$$

тогда уравнение (1.5) запишется следующим образом

$$\sqrt{1 + kx} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{b}{(p_0)_{cp} p_n} \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (2.9)$$

где

$$k = -\frac{p_n^2 - p_k^2}{p_n^2 L}$$

Уравнение (2.9) принадлежит к типу уравнения теплопроводности, решение которого ищем в виде

$$P(x, t) = F_n + F(x) e^{-\lambda \tau} \quad (2.10)$$

где λ — неизвестная постоянная, а функция $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{1 + kx} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} + \frac{\lambda b}{(p_0)_{cp} p_n} F(x) = 0 \quad (2.11)$$

Граничные условия для $F(x)$ имеют следующий вид

1. при $x = 0$, $F(x) = 0$;
 2. при $x = L$, $\frac{dF}{dx} = 0$.
- (2.12)

Решение уравнения (2.11) представится функцией Бесселя с индексами $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$, но, ввиду отсутствия соответствующих таблиц для

этих функций, такими решениями практически пользоваться невозможно. Поэтому в уравнении (2.11) коэффициент при $\frac{d^2 F}{dx^2}$ разлагая в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим:

$$\left(1 + \frac{kx}{2}\right) \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{\lambda b}{p_n(p_0)_{cp}} \cdot F = 0. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) есть частный случай уравнения Бесселя, решением которого является

$$F(x) = \sqrt{1 + \frac{kx}{2}} \cdot J_1 \left[2 \sqrt{A \left(1 + \frac{kx}{2}\right)} \right], \quad (2.14)$$

где $J_1 \left[2 \sqrt{A \left(1 + \frac{kx}{2}\right)} \right]$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Здесь

$$A = \frac{4\lambda b}{p_n(p_0)_{cp} k^2}.$$

Из первого граничного условия (2.12) для $F(x)$ получим

$$F(0) = J_1 [2\sqrt{A}] = 0, \quad (2.15)$$

а из второго условия —

$$J_1 \left[2 \sqrt{A \left(1 + \frac{kL}{2}\right)} \right] + 2 \sqrt{A \left(1 + \frac{kL}{2}\right)} J_1 \left[2 \sqrt{A \left(1 + \frac{kL}{2}\right)} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Имея ввиду известное соотношение в теории Бесселевых функций

$$J_1'(z) + \frac{1}{z} J_1(z) = J_0(z),$$

из (2.16) получим

$$J_0 \left[2 \sqrt{A \left(1 + \frac{kL}{2}\right)} \right] = 0, \quad (2.17)$$

откуда

$$\lambda_i = \frac{\alpha_i^2}{d^2}, \quad (2.18)$$

где

$$d = \frac{4}{k} \sqrt{\frac{b}{p_n(p_0)_{cp}} \left(1 + \frac{kL}{2}\right)},$$

а α_i — являются корнями уравнения (2.17).

Таким образом, решением дифференциального уравнения (2.13) будет семейство следующих функций

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \sqrt{1 + \frac{kx}{2}} \cdot J_1 \left[\alpha_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{kx}{2}}{1 + \frac{kL}{2}}} \right], \\
 F_2(x) &= \sqrt{1 + \frac{kx}{2}} \cdot J_1 \left[\alpha_2 \sqrt{\frac{1 + \frac{kx}{2}}{1 + \frac{kL}{2}}} \right], \\
 &\dots \\
 F_n(x) &= \sqrt{1 + \frac{kx}{2}} \cdot J_1 \left[\alpha_n \sqrt{\frac{1 + \frac{kx}{2}}{1 + \frac{kL}{2}}} \right]. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Общее решение задачи в третьем приближении имеет вид

$$P(x, t) = P_n + \sum_{i=1}^{\infty} B_i F_i(x, \lambda_i) e^{-\lambda_i t}. \quad (2.20)$$

Легко доказать ортогональность функций $F_i(x, \lambda_i)$. Разлагая функцию $P(x, 0) - P_n$ в ряд в интервале $0 < x < L$ по функциям $F_i(x, \lambda_i)$, для коэффициентов B_i получим

$$B_i = \frac{k p_n^2 \int_0^L x F_i \frac{dx}{1 + \frac{kx}{2}}}{\int_0^L F_i^2 \frac{dx}{1 + \frac{kx}{2}}}. \quad (2.21)$$

Подставив значение $F_i(x, \lambda_i)$ и произведя вычисления, для B_i получим

$$B_i = \frac{8 p_n^2 \sqrt{1 + \frac{kL}{2}} \cdot J_1(\alpha_i)}{\alpha_i^3 \left[J_1^2(\alpha_i) + \frac{2}{2 + kL} J_0 \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{1 + \frac{kL}{2}}} \right) \cdot J_2 \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{1 + \frac{kL}{2}}} \right) \right]}. \quad (2.22)$$

Подставив значение B_i в уравнение (2.20) и имея в виду, что $P(x, t) = p^2(x, t)$, получим общее решение задачи в третьем приближении

$$p(x, t) = p_n \sqrt{1+G}, \quad (2.23)$$

$$G = \frac{8 \int_0^x \left(1 + \frac{kx}{2}\right) \left(1 + \frac{kL}{2}\right) \cdot J_1(z_i) e^{-\lambda_i x} dx}{x_i^3 \left[J_1^2(z_i) + \frac{2}{2+kL} J_0\left(\frac{z_i}{\sqrt{1+\frac{kL}{2}}}\right) \cdot J_2\left(\frac{z_i}{\sqrt{1+\frac{kL}{2}}}\right) \right]},$$

где λ_i определяется из уравнений (2.18).

Внося полученное решение для $p(x, t)$ в соответствующих приближениях в первое уравнение (1.2), получим значение для $v(x, t)$, а из третьего уравнения (1.3) получим значение $\rho(x, t)$.

Заметим, что при определении $v(x, t)$ берется точное уравнение, а не линеаризованное, которым пользовались при определении $p(x, t)$. Подсчеты показывают, что значения $v(x, t)$, полученные из точных уравнений (1.2) более близки к действительности, чем значения $v(x, t)$, полученные из линеаризованных уравнений. Значение $v(x, t)$ во втором приближении будет

$$v(x, t) = \frac{2}{p(x, t)} \sqrt{\frac{(p_n^2 - p_k^2) gRTD}{L\xi\pi}} \psi(x, t), \quad (2.24)$$

где

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \cos \frac{n\pi x}{2L} e^{-\mu_n t},$$

D — диаметр трубы.

Для $\rho(x, t)$ аналогично получим

$$\rho(x, t) = \frac{1}{gRT} \sqrt{p_n^2 - \frac{8(p_n^2 - p_k^2)}{\pi^2} \sum_{1, 3, 5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-\mu_n t}}. \quad (2.25)$$

Закон изменения расхода определим по формуле

$$Q = S \cdot g \cdot \rho v, \quad (2.26)$$

Пример расчета. Ограничиваясь вторым приближением возьмем для примера расчета следующие данные

$$\begin{aligned} L &= 165 \text{ км}, & R &= 50 \text{ м/град}, \\ p_n &= 36 \text{ атм}, & D &= 0,625 \text{ м}, \\ p_k &= 14 \text{ атм}, & T &= 280 \text{ град}, \\ Q &= 50 \text{ кг/сек}, & \xi &= 0,0119. \end{aligned}$$

Начальный расход вычислен по формуле

$$Q = s \sqrt{\frac{p_n^2 - p_k^2}{\xi RTLz}} gD,$$

где s — сечение газопровода в м^2 ,

z — коэффициент сжимаемости, который выражает отклонение реального газа от закона состояния идеального газа (для идеального газа $z=1$). В нашем случае $z=0,93$.

Среднее давление при стационарном режиме вычислим по формуле

$$p_{cp} = \frac{2}{3} \left(p_n + \frac{p_k^2}{p_n + p_k} \right).$$

Подставив значения p_n и p_k , получим

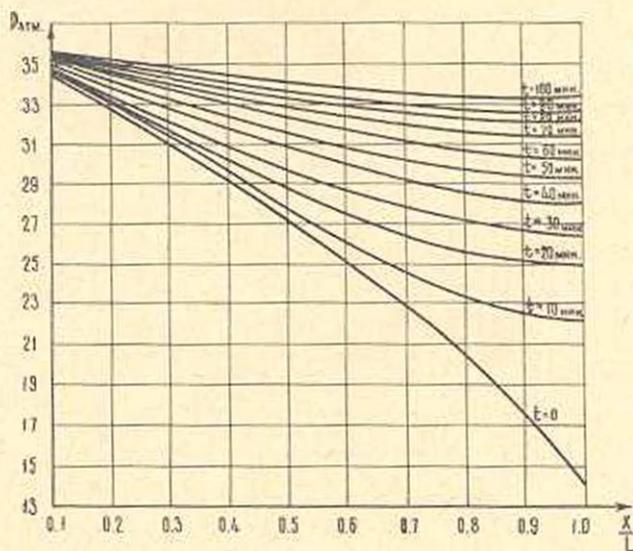
$$p_{cp} = 26,6 \text{ атм.}$$

Значение b вычислим из следующего соотношения

$$b = \left(\frac{z p v}{8 \delta} \right)_{cp} = \frac{z Q_{cp}}{8 g s \delta}.$$

Вычислив по формуле (2.26) значение $Q(x, t)$, осреднив его во времени и вдоль газопровода, будем иметь

$$Q_{cp} = 17,43 \text{ кг/сек.}$$



Фиг. 1.

Внеся значение Q_{cp} в выражение b , получим

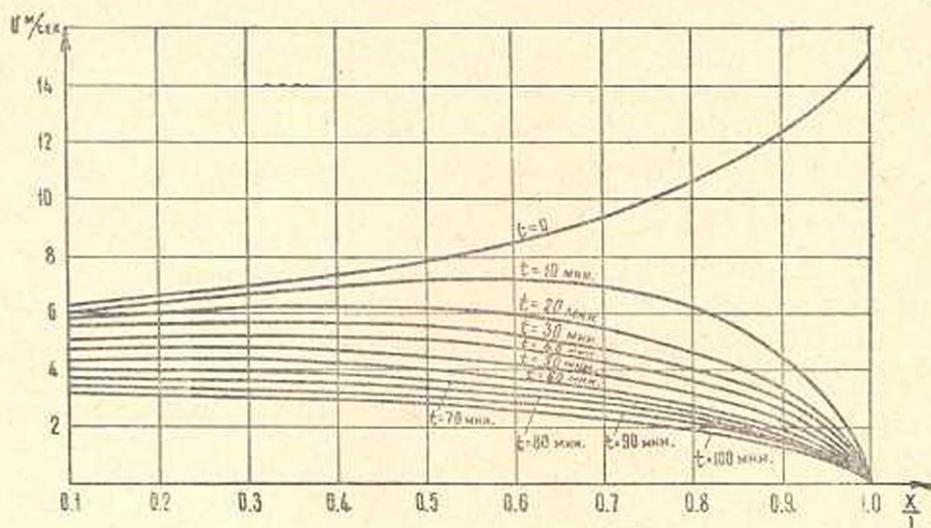
$$b = 0,0555 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^4}.$$

Значение μ вычислим по формуле

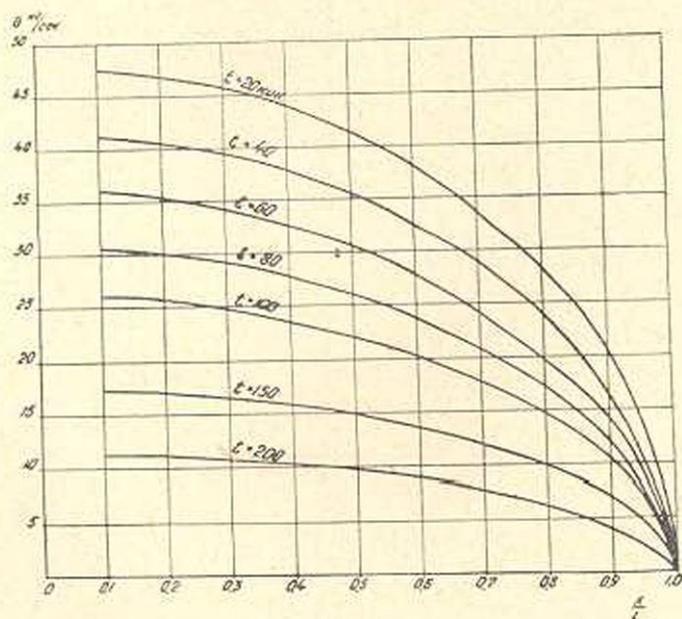
$$\mu = \frac{\pi^2 (p_0)_{cp}}{4 l^2 b} = 0,43437 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}.$$

Переход от значения t к значениям τ осуществляется по формуле (2.7).

Законы изменения $p(x, t)$, $v(x, t)$ и $Q(x, t)$ вдоль газопровода и во времени приведены на фиг. 1, 2, 3.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Գ. Լ. Քարաջանյան

ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ ԳԱԶԻ ՈՋ ՍՏԱՅԻՆՆԱՐ ՇԱՐԺՄԱՆ
ՄԻ ԽՆԴԻԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողիվածում քննարկվում է գազի ոչ ստացիոնար շարժումը երկար գազամուղում, երբ խախտվում է նրա ստացիոնար շարժման վիճակը՝ գազամուղի վերջում գազի շոտքի գաղարեցման պատճառով: Ընդհանրապես, գազի ոչ ստացիոնար շարժման ուսումնասիրությունը բերվում է մասնակի ամանցարձևերով ոչ զծային դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմեմի լուծման խնդրին:

Ինչպես հայտնի է, այդպիսի սխեմեմների ճշգրիտ լուծումը ներկայումս անհնարին է, նրանք լուծվում են դանազան մոտափոր եղանակներով, կամ ուղղակի թվորեն:

Հողիվածում խնդիրը լուծվում է նշված սխեմեմի գծայնացումով: Ստացված են ճնշման, արագության և խտության փոփոխման օրենքները: Հաշվված է կոնկրետ օրինակ երևան—Կարազաղ գազամուղի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чарный Н. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. Лейбензон Л. С. Сборник трудов, 2, М., 1953.
3. Смирнов А. С. и Шарковский А. И. Добыча и транспорт газа. Гостехиздат, М., 1957.
4. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Гостехиздат, М.—Л., 1949.