20340406 000 чр50резпробре 040460р03р 5696409р известия академии наук армянской сср

Зрариш-бирьбина, араппертаббыт XIV, № 3, 1961 Физико-математические науки

теория ползучести

М. И. Розовский

Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести

Общие физические нелинейные интегральные уравнения теории ползучести и релаксации материалов для сложного напряженного состояния, построенные Ю. Н. Работновым [1], Н. Х. Арутюняном [2] и автором [3], учитывают основные особенности влияния фактора времени на напряженно-деформированное состояние тел.

В настоящей статье показано, что путем введения временных интегральных операторов можно установить некоторые новые физические особенности описываемых процессов деформирования, а также получить, при решении конкретной задачи, окончательные результаты в форме, удобной для качественного и количественного исследования. В частности, на этой основе установлена взаимосвязь между временным коэффициентом Пуассона и ядрами ползучести и релаксации, определяемыми по опытным данным на растяжение и кручение образцов, а также проведен анализ упомянутых характеристик материала.

Для облегчения исследования выделены три характерные зоны деформирования с четко выраженными физическими особенностями.

Эффективность развитого здесь метода продемонстрирована, для конкретности, применительно к задаче о ползучести быстро вращающегося вокруг своей оси длинного пустотелого цилиндра, представляющей значительный интерес для машиностроения.

Исследование проведено для упомянутых трех зон деформирования.

Полученные результаты могут быть применены без принципиальных изменений при изучении процессов ползучести и релаксации многих других осесимметричных тел, по крайней мере в тех случаях, когда главные напряжения связаны между собой зависимостью типа (3.3).

§ 1. Исходные физические уравнения

В качестве исходных физических уравнений примем

$$\sigma_{x} - \sigma_{y} = (\varepsilon_{x} - \varepsilon_{y}) \varphi(\varepsilon_{i}) - \int_{0}^{1} R(t, \tau; \sigma_{i}) [\varepsilon_{x}(\tau) - \varepsilon_{y}(\tau)] \varphi[\varepsilon_{i}(\tau)] d\tau, \quad (1.1)$$

$$2\tau_{xy} = \gamma_{xy} \varphi(z_i) - \int_0^i R(t,\tau;\sigma_i) \gamma_{xy}(\tau) \varphi[z_i(\tau)] d\tau, \quad (x, y, z),$$
(1.2)

 $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = k_0 \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right), \tag{1.3}$

где

$$k_0 = \frac{1 - 2v_0}{E_0} = \frac{1 - 2v_0}{2G_0(1 + v_0)},$$

которые записаны в несколько более общем виде, чем упомянутые выше [3].

Здесь и в дальнейшем симвот (x, y, z) указывает, что остальные четыре зависимости получаются круговой перестановкой индексов.



В уравнениях (1.1)—(1.3) компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$ и тензора деформаций $\varepsilon_x, \dots, \tau_{xz}$ суть функции координат x, y, z и времени t, v_0 —мгновенный коэффициент Пуассона, E_0 —мгновенный модуль нормальной упругости, G_0 —мгновенный модуль сдвига, σ_i интенсивность напряжений, ε_i —интенсивность деформации выражевные по Ильюшину [4] формулами

$$\sigma_{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{x} - \sigma_{y})^{2} + (\sigma_{y} - \sigma_{z})^{2} + (\tau_{z} - \sigma_{x})^{2} + 6(\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{xz}^{2})},$$

$$\varepsilon_{i} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{x} - \varepsilon_{y})^{2} + (\varepsilon_{y} - \varepsilon_{z})^{2} + (\varepsilon_{z} - \varepsilon_{x})^{2} + \frac{3}{2}(\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{yz}^{2})},$$

Вид функции $\varphi(\varepsilon_i)$ определяется по данным эксперимента при t = 0. Она характеризует меру отк. онеция кривой $\sigma_i = F(\varepsilon_i)$, где $F(\varepsilon_i) = \varepsilon_i \varphi(\varepsilon_i)$, от прямой Гука, отвечающей упруго-мгноненно-у состоянию (см. фиг. 1). Ядро релаксации $R(t, \tau; \tau_i)$ при больших напряжениях является функцией интенсивности σ_i . Естественно принять, что $\tau_i = \exp[f(\sigma_i)/kT]$, где k – постоянная Больцмана. T – абсолютная температура. Согласно Гуревичу [5], Кэ-Тин-Сую [6] и др.

98

можно принять, распространяя их результат на пространственный случай, что $f(\sigma_l) = u_0 - q\sigma_l$, где u_0 -энергия активации, q-постоянвая нелинейности. Здесь sign q = sign σ_l , ибо действующее напряжение уменьшает энергию активации. В общем случае $R(t, \tau; \sigma_l)$ хај актеризуст меру изменения формы кривых, изображенных на фиг. 1, с тенением времени.

Так как опыты на релаксацию, даже простую, протекающую при постоянных деформациях и температуре, труднее осуществи ь, чем опыты на ползучесть, то ядро релаксации $R(t, \tau; \sigma_t)$ можно найти аналитически как резольвенту язра ползучести $P(t, \tau; \sigma_t)$, которое отределяется из опытов на ползучесть, в частности, на простую ползучесть, протекающую при постоянных напряжениях и температу е.

Введем интегральный оператор

$$\overset{*}{R}(\sigma_i)\zeta = \int_{0}^{t} R(t,\tau;\sigma_i)\zeta(\tau) d\tau.$$

Тогда уравнения (1.1) и (1.2) примут вид

$$\sigma_{x} - \sigma_{y} = \left[1 - \hat{R}\left(\sigma_{i}\right)\right]\left(\varepsilon_{x} - \varepsilon_{y}\right)\varphi\left(\varepsilon_{i}\right), \qquad (1.4)$$

$$2\tau_{vy} = [1 - \hat{R}(\sigma_i)]\gamma_{xv}\varphi(z_i), \qquad (x, y, z).$$

$$(1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) следует

$$\sigma_i = \frac{3}{2} \left[1 - \mathring{R}(\sigma_i) \right] \varepsilon_i \varphi(\varepsilon_i), \tag{1.6}$$

откуда $\sigma_i \left[1 - \tilde{R}(\sigma_i)\right]^{-1} = F(\varepsilon_i)$, где $F(\varepsilon_i) = 1,5\varepsilon_i \varphi(\varepsilon_i)$, или

$$\sigma_i \left[1 + \hat{P}(\sigma_i) \right] = F(\varepsilon_i), \tag{1.7}$$

пбо оператор релаксации $\hat{R}(\sigma_i)$ с ядром $R(t, \tau; \sigma_i)$ и оператор ползучести $\stackrel{*}{P}(\sigma_i)$ с ядром $P(t, \tau; \sigma_i)$ связаны между собой зависимостью

$$\frac{1}{1-\overset{\infty}{R}(\sigma_i)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\overset{\infty}{\tilde{R}}(\sigma_i)]^n = 1 + \overset{\infty}{\tilde{P}}(\sigma_i).$$

Легко видеть, что соотношение (1.6), рассматриваемое как следствие уравнений (1.4) и (1.5), справедливо по крайней мере в случае, когда все компоненты тензора деформаций пропорциональны одному общему параметру, который может зависеть как от координат, так и от времени. Это условие является достаточным, но не необходимым. Менее жесткие условия рассматривать не будем, ибо в дальнейшем они не потребуются.

Анализ кривых, изображенных на фиг. 1, показывает наличие трех зон деформирования с различными физическими особенностями: линейности, 2) подобия и 3) полного влияния фактора времени. Их физическая характеристика будет указана в последующих параграфах с соответствующими наименованиями.

Разбиение на зоны осуществлено для конкретности на несколько увеличенной (с целью удобства дальнейших построений) фотокоции фиг. 602 из книги [7] (стр. 789), на которой изображены кривые, построенные по опытным данным на простую ползучесть стали при температуре 454°C. Там же указан химический состав испытанной стали.

Разделение на три зоны выполнено нами по площадям, занимаемым семейством кривых, с помощью трех дуг окружностей, с ралнусами *OA*, *OB* и *OC*. Такое разбиение целесообразно провести на оси деформаций соответственно точкам, относящимся к установившемуся состоянию $z_{\infty 1}$, $z_{\infty 2}$, $z_{\infty 3}$, а на оси напряжений—к мгновенному состоянию σ_{01} , σ_{o2} , σ_{o3} Тогда, при номографическом подходе к фиг. 1, на оси σ_i чри $z_i = \varepsilon_{01}$ может быть изображена шкала, отвечающая процессу релаксации, а на прямой $\sigma_i = \sigma_{01}$, параллельной оси ε_i ,— шкала, отвечающая процессу ползучести. На основании таких построений в § 2 будет определено время релаксации в зоне линейности.

Введение на фиг. 1 координат τ_i и z_i обозначает, подобно тому, как это принято в теория стационарной пластичности, что используемые экспериментальные кривые отвечают также зависимости типа (1.7). Тогда, с их помощью можно определить конкретный вид функций φ и P, а, следовательно, и R, пригодных для применения в случае пространственного напряженного состояния.

В заключение заметим, что хотя в каждой последующей зоне (как это видно из фиг. 1) содержится предыдущая, однако нецелесообразно ограничиться исследованием процессов деформирования только в третьей (наибольшей) зоне с тем, чтобы особенности процессов в первых двух зонах получить как частные случаи результатов исследования в третьей зоне, ибо при этом не будут обнаружены некоторые замечательные особенности, характерные только для процессов деформирования в первой и второй зонах в отдельности. Принятая здесь классификация процессов деформирования целесообразна всегда. В зависимости от конкретных условий, любую из указанных зон можно принять за основную и, ограничиваясь ею, рассматривать только в ней соответствующие прикладные задачи.

§ 2. Зона линейности

 Зона линейности на фиг. 1 сравнительно невелика. Вообще говоря, в других случаях она может быть значительной.

В этой зоне участки кривых семейства, исходящего из начала координат, практически не отличаются от прямых Гука для различных фиксированных моментов времени. В зоне линейности $\varphi(z_t) = 2G_0 = \text{const}$ и оператор $\hat{R}(\sigma_t) = \hat{R}$, адро которого $R(t, \tau)$ не зависит от σ_t . Поэтому уравнения (1.4) и (1.5) линеаризируются. Присоединяя к ним зависимость (1.3) и вводя оператор $\overline{G} = G_0(1 - \hat{R})$, получим

$$\begin{aligned} z_x - z_y &= 2\widetilde{G} \left(\varepsilon_x - \varepsilon_y \right), \quad z_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad (x, y, z), \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= k_0 \left(z_x + z_y + z_z \right). \end{aligned}$$
(2.1)

Зависимости (2.1) представляют собою модифицированные линейвне внтегральные уравнения Вольтерра [8] наследственной упругости, записанные в интегрально-операторной форме, для случая чисто упругов деформации объемного сжатия.

Оператор, обратный G, выражается через оператор ползучести P

$$\overline{G}^{-1} = G_0^{-1} \left(1 - \hat{R} \right)^{-1} = G_0^{-1} \left(1 + \hat{P} \right).$$
(2.2)

Ядро $P(t, \tau)$ оператора \tilde{P} и ядро $R(t, \tau)$ оператора \hat{R} опредеякотся из опытов на кручение образцов, первое-по кривой ползучести, второе-по кривой реляксации.

Математически ядро P(t, z) есть резольвента ядра R(t, z).

Введем также оператор нормальной наследственной упругости $E = E_0 (1 - \hat{R})$ и операторный коэффициент Пуассона у.

Оператор, обратный Е, выражается через оператор ползучести Р,

$$\overline{E}^{-1} = E_0^{-1} \left(1 - \hat{R} \right)^{-1} = E_0^{-1} \left(1 + \hat{P}_1 \right).$$
(2.3)

Ядра $P_1(t, \tau)$ и $R_1(t, \tau)$ операторов P_1 и R_1 определяются из опытов на растяжение или чистый изгиб образцов, первое — по кривой ползучести, второе — по кривой релаксации.

В рассматриваемой зоне имеет место принцип Вольтерра [14], позволяющий принципиально решить любую линейную задачу с учетом васледственности (ползучести и релаксации), если известно ее решение для упруго-мгновенного случая. Для этого формально достаточно упругие постоянные E, G и », входящие в упруго-мгновенное решение соответствующей задачи, заменить операторами $\overline{E}, \overline{G}$ в «. Основная трудность состоит в расшифровке появляющихся при этом функций операторов $\overline{E}, \overline{G}$ и ». Единого метода такой расшифровки пока не существует. Отдельные задачи решены Работновым [14] в автором [9].

Заметим, что расшифровка сложных операторов должна быть проясдена не формально, а применительно к конкретным опытным ланным. Поэтому нужно выразить оператор у через ядра релаксации в волзучести, а также установить между последними взаимосвязь для неоднотипных опытных данных. В зоне линейности $\varphi(z_i) = 2G_0 = \text{const}$ и оператор $\mathring{R}(\sigma_i) = \mathring{R}$, ядро которого $R(t, \tau)$ не зависит от σ_i . Поэтому уравнения (1.4) и (1.5) линеаризируются. Присоединяя к ним зависимость (1.3) и вводя оператор $\overline{G} = G_0(1 - \mathring{R})$, получим

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\overline{G} \left(\varepsilon_x - \varepsilon_y \right), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad (x, y, z), \quad (2.1)$$
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = k_0 \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right).$$

Зависимости (2.1) представляют собою модифицированные линейвые интегральные уравнения Вольтерра [8] наследственной упругости, записанные в интегрально-операторной форме, для случая чисто упругой деформации объемного сжатия.

Оператор, обратный G, выражается через оператор ползучести P

$$\overline{G}^{-1} = G_0^{-1} \left(1 - \tilde{R} \right)^{-1} = G_0^{-1} \left(1 + \tilde{P} \right).$$
(2.2)

Ядро $P(t, \tau)$ оператора \tilde{P} и ядро $R(t, \tau)$ оператора \tilde{R} определяются из опытов на кручение образцов, первое—по кривой ползучести, второе—по кривой реляксации.

Математически ядро P(t, т) есть резольвента ядра R(t, т).

Введем также оператор нормальной наследственной упругости $\overline{E} = E_0 (1 - \hat{R})$ и операторный коэффициент Пулссона у.

Оператор, обратный Е, выражается через оператор ползучести Р,

$$\overline{E}^{-1} = E_0^{-1} \left(1 - \tilde{R} \right)^{-1} = E_0^{-1} \left(1 + \tilde{P}_1 \right).$$
(2.3)

Ядра $P_1(t, z)$ и $R_1(t, z)$ операторов \tilde{P}_1 и \tilde{R}_1 определяются из опытов на растяжение или чистый изгиб образцов, первое — по кривой ползучести, второе — по кривой релаксации.

В рассматриваемой зоне имеет место принцип Вольтерра [14], позволяющий принципиально решить любую линейную задачу с учетом наследственности (ползучести и релаксации), если известно ее решение для упруго-мгновенного случая. Для этого формально доститочно упругие постоянные E, G и », входящие в упруго-мгновенное решение соответствующей задачи, заменить операторами $\overline{E}, \overline{G}$ п ». Основная трудность состоит в расшифровке появляющихся при этом функций операторов $\overline{E}, \overline{G}$ и ». Единого метода такой расшифровки пока не существует. Отдельные задачи решены Работновым [14] в автором [9].

Заметим, что расшифровка сложных операторов должна быть проведена не формально, а применительно к конкретным опытным лянным. Поэтому нужно выразить оператор и через ядра релаксации и ползучести, а также установить между последними взаимосвязь для неоднотипных опытных данных. Как уже отмечалось, зависимость (1.3) показывает, что деформация объемного сжатия чисто упругая. Это значит, что сложний оператор объемного сжатия не зависит от времени, т. с.

$$\frac{1 - 2\overline{v}}{E} = k_0. \qquad (2.4)$$

Исходя из (2.4), Работновым [14] получена формула

$$i = v_0 \left(1 + \frac{1 - 2v_0}{2v_0} \vec{R}_1 \right).$$
 (2.5)

При воздействии оператора и на единицу, получим

$$\overline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{v}_0 \left[1 + \frac{1 - 2\mathbf{v}_0}{2\mathbf{v}_0} \int R_1(t, \tau) \, d\tau \right],$$
 (2.6)

Этой формулой следует пользоваться при налични опытных дзиных на поостую релаксацию, которой отвечает охарактеризованное выше ядро $R_1(t, \tau)$.

Если располагают опытными данными, связанными с процессом простой релаксации, которой отвечает ядро $R(t, \tau)$, то нужно применить другую формулу

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{v}_0 \left[1 + \frac{1 + v_0}{v_0} \int_0^t H(t, \tau) \, d\tau \right], \tag{2.7}$$

полученную исходя из того, что

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{1 + k_0 G} - 2 \right) = \frac{1 + \mathbf{v}_0}{1 - \frac{1 - 2\mathbf{v}_0}{3} \tilde{R}} - 1 = \mathbf{v}_0 \left(1 + \frac{1 + \mathbf{v}_0}{\mathbf{v}_0} \tilde{H} \right), \quad (2.8)$$

где ядро $H(t, \tau)$ оператора \tilde{H} представляет собою резольвенту ядра $(1 - 2v_0) R(t, \tau)/3.$

Пользуясь зависимостью \overline{E} = $2\overline{G}(1+\sqrt{2})$ и формулой (2.4), получия

$$\frac{1}{\overline{G}} = \frac{3}{\overline{E}} - k_0. \tag{2.9}$$

Подставив в (2.9) выръждняя для обратных операторов 1/6 и $1/\overline{E}$ из (2.2) и (2.3), получим

$$\overset{*}{P} = \frac{3}{2(1 + \gamma_0)} \overset{*}{P}_1, \qquad (2.10)$$

т е, операторы ползучести \tilde{P} при сдвиговой и \tilde{P}_1 при нормальної деформации соответственно пропорциональны.

Если принять во внимание, что ядра операторов ползучести \vec{P} и \vec{P}_1 являются резольвентами соотвелствующих ядер операторов резаксании \vec{R} и \vec{R}_1 , то благодаря зависимости (2.10) выражения для оператора \vec{v} (2.5) и (2.8) становятся чрезвычайно гибкими. Они могут быть выражены через любую из четырех указанных выше совогупностей опытных дзиных. Этот результат тем более важен, что во чногих задачах искомые напряжения выражаются только через коорлинатные элементы и оператор \vec{v} . Такого рода задача будет рассмотрена в п. З.

В заключение заметим, что, исключив чиз (2.5) и (2.8) и учитывая зависимости (2.2), (2.3) и (2.10), легко показать, что свойством, установленным выше для ч, обладают также остальные два оператора *E* и *G*. Последнее важно при определении перемещений.

 Для практического применения результатов, полученных в п. 1. конкретные ядра ползучести и релакскции должны возможно точнее отвечать результатам опытов, в частности — быть сингулярными, л взлимосвязь их интегральных операторов должна осуществляться с помощью простого правила.

Такими свойствами обладает экспоненциальная функция дробного порядка Работнова [14]

$$\Theta_{\alpha}(\beta;s) = s^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n s^{\alpha(1-\alpha)}}{\Gamma\left[(n+1)\left(1-\alpha\right)\right]},$$
(2.11)

гае Г-гамма-функция, s = t - z, а и 3-постоянные, причем 3>0, 0 < z < 1.

Ялро (2.11) и се резольвента принадлежат к одному классу функций Э., Это следует из зависимости между интегральными операторами, полученной Работновым

$$\frac{1}{1 - \chi \hat{\mathcal{B}}_{s}(-\beta)} = 1 + \chi \hat{\mathcal{B}}_{s}(\chi - \beta)$$

RULE

$$\frac{1}{1+\chi\tilde{\mathcal{B}}_{*}(\chi-\beta)} = 1-\chi\tilde{\mathcal{B}}_{*}(-\beta).$$
(2.12)

Из (2.12) видно насколько просто определяется $\Im_s(\chi - \beta; s)$ как резольвента ядра $\Im_s(-\beta; s)$ и наоборот — $\Im_s(-\beta, s)$, как резольвента ядра $\Im_s(\chi - \beta; s)$.

Чтобы придать параметрам у и 3 определенный физический смысл. положим

$$\beta = 1/\tau_1^{1-\pi}, \qquad \chi = (E_0 - E_{\infty})/E_0\tau^{1-\pi},$$

где E₂ — установившийся модуль нормальной упругости, т₁ — время релаксации, смысл которого будет определен далее. Так как мгновенный модуль $E_0 > E_*$, то $\gamma < \beta$.

Случай a = 0 соответствует _стандартному линейному телу* в аналитической трактовке Ишлинского [10] и Ржаницына [11].

Ядра ползучести и релаксации, отвечающие указанной деформации, будут соответственно

 $P_1(s) = \chi \partial_x (\chi - \beta; s), \quad R_1(s) = \chi \partial_x (-\beta; s).$

Для перехода к ядрам P(s) и R(s), характеризующим сдвиговую деформацию, можно воспользоватья формулой (2.10) с учетом (22) и (2.3).

Применение ядер класса Э, к задачам с конкретными числовыми данными, несмотря на очевидные их преимущества перед другими ядрами наследственности, ввиду медленной сходимости ряда (2.11), связано с кропотливыми вычислениями.

Чтобы в какой-то мере устранить этот дефект, предпримем аппроксимацию оператора Э, позволяющую представить его в замкнутом виде с достаточно хорошим приближением. Последнее весьма существенно, нбо при решении многих конкретных задач важно располагать не столько функцией Э., сколько ее интегральным оператором Э, воздействующим на единицу.

Пользуясь определением операции Э, (-k)-1, где к- параметр. получим

$$\overset{*}{\mathcal{D}}_{\mathfrak{a}}(-k) \cdot 1 = \int_{0}^{t} \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}(-k; t-\tau) \, d\tau = \int_{0}^{t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-k)^{s} s^{n(1-s)-s}}{\Gamma\left[(n+1)\left(1-\alpha\right)\right]} \, ds =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} (kt^{1-s})^{s+1}}{\Gamma\left[(n+1)\left(1-\alpha\right)+1\right]} = \frac{1}{k} \left[1 - E_{1-s}\left(-kt^{1-s}\right)\right].$$
(2.13)

где E_{μ} (— ξ) = $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^n}{\Gamma(n+\mu+1)}$ — функция Миттаг-Леффлера [12]

порядка и = 1 - а.

Фигурирующие в (2.13) ряды сходятся равномерно всюду. Функция Е (-- Е) моногонно убывает с ростом Е.

Легко заметить, что при ٤>0

$$e^{-i} < E_{\mu} (-i) < \frac{1}{1+i}.$$
 (2.14)

Здесь :- величина безразмерная.

Достаточно хорошей аппроксимацией функции Е_в (----;), как ре-зультат уточнения оценки (2.14), будет при приближении сверху $E_{\mu}(-\xi) \approx \frac{1}{1+\xi/\Gamma(-\alpha)}$, справедливой для $0 < \xi < 1$; при приближении снизу $E_{\mu}(-\xi) \approx e^{-\gamma_{0}\xi}$, гле $\gamma_{0} = (1-\alpha)^{1-\alpha}$, справедливой всюду, но достаточно точной лишь для $\xi < 10$.

Для $\xi > 10$ лучше пользоваться известной [13] аппроксиманией $E_{\mu}(-\xi) \approx \frac{1}{\xi \Gamma(x)}$.

Как показывают эксперименты [1], для различных материалов значение безразмерной величным α колеблется вокруг 0,7. Параметры χ и 3 меняются для различных материалов очень сильно. Их размерность $t^{\alpha-1}$, где t—время, выбранное в соответствующих единицах.

Если располагать номограммой, построенной по типу фиг. 1 так, что верхнюю и нижнюю крайние кривые можно считать практически отвечающими соответственно мгновенному и установившемуся состояниям, то по угловым коэффициентам двух прямых, отвечающих в зоне линейности упомянутым кривым, легко определить безразмерную величину $\lambda = (E_0 - E_x)/E_0$. Определив λ , можно найти время релексации τ_1 . Для этого достаточно воспользоваться правыми частями соотношений (2.12), при воздействии их соответственно на ε_{01} и τ_{01} . с учетом представления $\hat{\mathcal{G}}_{\pi}$ согласно (2.13) при $t = \tau_1$, в котором сначала следует положить $k = 3 = 1/\tau_1$, затем $k = 3 - \chi_0 = E_{\infty}/E_0 \tau_1^{1-\epsilon}$. Тогда первый результат приравняв $\sigma_i(\tau_1)$, а второй, естественно, $-\varepsilon_i(\tau_1)$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{i}(\tau_{1}) &= \sigma_{01} \left[1 - \lambda \left[1 - E_{1-z}(-1) \right] \right], \\ (\tau_{1}) &= \varepsilon_{01} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \left[1 - E_{1-z}(\lambda - 1) \right] \right\}. \end{aligned}$$
(2.15)

В формулах (2.15) $\sigma_i(\tau_1)$ и $\varepsilon_i(\tau_1)$, выраженные через известные величины, представляют собою координаты точки, лежащей на одной из кривых упомянутой номограммы, отвечающей моменту времени $t = \tau_1$, т. е. искомому времени релаксации. Если такой кривой на помограмме не окажется, то τ_1 может быть найдено путем интерполирования по блажайшим двум кривым, между которыми ляжет точка с упомянутыми координатами. Разумеется, что для более точного определения τ_1 необходимо, чтобы вертикальная прямая $\varepsilon_i = \varepsilon_{\infty 1}$ пересекалась в окрестности точки A_1 (см. фиг. 1) с возможно большим количеством линий семейства, отвечающих различным фиксированным моментам времени.

Si

При $E_0 = 1,7 \cdot 10^6 \ \kappa \epsilon / cm^2$ н $E_\infty = 1.0 \cdot 10^6 \ \kappa \epsilon / cm^2$ (согласно риг. 1 можно считать момент времени $t = 2000 \ чac$ отвечающим, с достаточной степенью точности, кривой установившегося состояния). получим $\lambda = 0.412$. Тогда при $\alpha = 0.7$ из (2.15), с учетом значений $E_{0,3}(-1) =$ = 0.490 и $E_{0,3}(-0.588) = 0.593$, следует, что $\sigma_i(\tau_1) = 0.80\sigma_{01}$ и $\varepsilon_i(\tau_1) =$ $= 1.286\varepsilon_{01}$. Так как $\sigma_{01} = 1000 \ \kappa \epsilon / cm^2$, $\varepsilon_{01} = 0.60 \cdot 10^{-3}$, то $\sigma_i(\tau_1) =$ $= 800 \ \kappa \epsilon / cm^3$, $\varepsilon_i(\tau_1) = 0.77 \cdot 10^{-3}$. Точка с этими координатами находится на кривой, отвечающей моменту времени примерно 200 час.

М. И. Розовский

Таким образом, время релаксации $\tau_1 \approx 200$ час. Разумеется, полученные числовые значения для λ и τ_1 имеют лишь иллюстративный характер, ибо фиг. 1 не приспособлена для точного определения τ_1 в зоне линейности.

3. Значительный интерес представляет вопрос о напряжениях, возникающих в пустотелом пилиндре большой длины в связи с его быстрым равномерным вращением вокруг своей оси. Причем, этот цилиндр равномерно нагрет так, что процесс ползучести приобретает существенное значение

Рассмотрим эту задачу в качестве иллюстрации полученных выше результатов.

Исходными физическими зависимостями здесь будут служить уравнения (2.1), которые в цилиндрических координатах примут вид

$$\overline{E}z_{\ell} = z_{\ell} - \overline{v} (z_{0} + \sigma_{z}), \qquad (r, 0, z), \qquad (2.16)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_0 + \varepsilon_z = k_0 \left(\sigma_r + \sigma_0 + \sigma_z\right), \quad (2.17)$$

По условиям симметрии касательные напряжения отсутствуют-Символ (r, 0, z) указывает, что остальные две зависимости получаются кругоной перестановкой индексов.

Для конкретности рассмотрим случай, когда врашающийся цилиндр свободен от внутренних и внешних давлений. Тогда, исходя из известного [7], надлежащим образом представленного нами, упругого решения соответствующей задачи, в результате применения принципа Вольтерра, получим

радиальное напряжение

$$\sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g} \left(2 + \frac{1}{1 - \gamma} \right) \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \tag{2.18}$$

окружное напряжение

$$r_{\psi} = \frac{\gamma^{10^2}}{8g} \left[\left(2 + \frac{1}{1 - \gamma} \right) \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) + \left(2 - \frac{3}{1 - \gamma} \right) r^5 \right].$$
 (2.19)

Если торцы цилиндра свободны, то нормальное напряжение

$$\sigma_{z} = \frac{\gamma \omega^{2}}{4g} \left(\frac{1}{1 - \bar{\gamma}} - 1 \right) (a^{2} + b^{2} - 2r^{2}), \qquad (2.20)$$

Если же концы цилиндра не могут расширяться, то $z_2 = 0$. Тогда из (2.16) следует, что $\sigma_2 = \tilde{v} (\sigma_e + \sigma_0)$. Пользуясь (2.18) и (2.19) получим

$$\sigma_{t} = \frac{\gamma w^{2}}{4g} \left[\left(1 - \frac{1}{1 - \bar{v}} \right) 2r^{2} - \left(1 - 2\bar{v} - \frac{1}{1 - \bar{v}} \right) (a^{2} + b^{2}) \right].$$
(2.21)

Здесь а-внутренний, b-внешний радиусы пустотелого цилиндра, т кг/см³-все единицы объема материала, в 1/сек-угловая скорость, g -гравитационная постоянная, r-полярный радиус-вектор.

Некоторые задачи теории неустановнишейся ползучести

Подставляя σ_r, σ₆ и σ₂ из (2.18)—(2.21) в (2.16), получим соотястствующие им деформации ε_r, ε₈ и ε₂.

Из (2.18)-(2.21) видно, что для фактического определения напряжений достаточно располагать результатами расшифровки двух провзведений $\sqrt[3]{1}$ и $(1 - \sqrt[3]{2})^{-1} \cdot 1$.

Выражения для $\overline{v} \cdot 1$ даны формулами (2.6) и (2.8), соответствующими двум типам опытных данных. Остается найти $(1-\overline{v})^{-1} \cdot 1$. Исходя из (2.6), получим

 $\frac{1}{1-\bar{v}} = \frac{1}{1-v_0} \frac{1}{1-\gamma_0} \frac{1}{\hat{R}} \cdot 1 = \frac{1+\gamma_0 \hat{H}_1}{1-\gamma_0} = \frac{1}{1-v_0} \left[1+\gamma_0 \int_0^t H_1(t,\tau) d\tau \right], (2.22)$

пле $H_1(t, \tau)$ —резольвента ядра $R_1(t, \tau), \tau_0 = (1 - 2v_0)/2(1 - v_0).$

Другое выражение для $(1-\bar{v})^{-1} \cdot 1$ можно получить, исходя из (2.8). Будем иметь

$$\frac{1}{1-\bar{v}} \cdot 1 = \frac{1}{1-v_0} \frac{1}{1-\mu_0} \overset{\circ}{\mathcal{H}} \cdot 1 = \frac{1+\mu_0}{1-v_0} \cdot 1 = \frac{1}{1-v_0} \left| 1+\mu_0 \int_0^t S(t,\tau) d\tau \right|,$$
(2.23)

где $S(t, \tau)$ —резольвента ядра $H(t, \tau), y_0 = (1 + v_0)/(1 - v_0).$

В случае конкретного ядра релаксацин $R_1(t,z) = \chi \Im_a(-\beta;t-z),$ будем иметь

$$\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{v}_0 + \frac{\chi \left(1 - 2\mathbf{v}_0\right)}{2\beta} \left[1 - E_{1-\epsilon} \left(-\beta t^{1-\epsilon}\right)\right], \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{1-v} \cdot 1 = \frac{1}{1-v_0} + \frac{\gamma_0 \chi}{(1-v_0)(\beta-\gamma_0 \chi)} \left[1 - E_{1-v} \left[(\gamma_0 \chi - \beta) t^{1-v} \right] \right].$$
(2.25)

Формула (2.24) получена непосредственно из (2.6) с учетом представления "•1 согласно (2.13). Формула (2.25) получена исходя из (2.22), первого соотношения (2.12) и представления (2.13).

Пользуясь предложенной в п. 2 аппроксимацией $E_{1-s}(-\xi)$, можно -1 и $(1-\xi)^{-1}$.1 выразить через элементарные функции.

Конкретные выражения для напряжений σ_r , σ_y и σ_z , отвечающие избранному выше ядру релаксации $R_1(t, \tau)$, получаются простой подстановкой $\tilde{v} \cdot 1$ и $(1 - \tilde{v})^{-1} \cdot 1$ из (2.24) и (2.25) в (2.18) — (2.21), тик как в последних операторы \tilde{v} и $(1 - \tilde{v})^{-1}$ умножаются на величины, не зависящие от времени.

Из асимптотического представления $E_{1-\alpha}(-\xi) \approx 1/\xi\Gamma(\alpha)$, приведенного в п. 2, следует, что $\lim_{\xi \to \infty} E_{1-\alpha}(-\xi) = 0$. Учитывая это, а также

то, что $\beta = 1/\tau_1^{1-a}$ и $\chi = \beta \lambda$, где $\lambda = (E_0 - E_\infty)/E_0$, получим из (2.24) и (2.25) установившиеся значения

$$(\overline{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{1})_{*} = \lim_{t \to \infty} (\overline{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{1}) = \mathbf{v}_{0} + \frac{\lambda(1-2\mathbf{v}_{0})}{2}, \qquad (2.26)$$

$$\left(\frac{1}{1-\nu} \cdot 1\right)_{\infty} = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{1-\nu} \cdot 1\right) = \frac{1}{1-\nu_0} + \frac{\lambda \gamma_0}{(1-\nu_0)(1-\lambda \gamma_0)}.$$
 (2.27)

Так как в (2.6), (2.8), (2.22) и (2.23) все подинтегральные выражения, согласно физическому смыслу ядер ползучести и релаксации, положительны, то выражения $\overline{v} \cdot 1$ и $(1 - \overline{v})^{-1} \cdot 1$ растут с течением времени.

Поэтому радиальное напряжение э, определяемое из (2.18), и нормальное напряжение э, определяемое из (2.20), растут с течением времени.

Обозначим $M_1 = a^2 + b^2 + a^2 b^2 r^{-2} - 3r^2$. Тогда, как легко установить, окружное напряжение σ_b возрастает при $M_1 > 0$ и убывает при $M_1 < 0$ с течением времени в любой точке цилиндра. При $M_1 = 0$ напряжение σ_b не зависит от времени. Последнее будет иметь место для точек поверхности $r = 6^{-0.5} a (1 + l + l \sqrt{1 + 14l + l^2})^{0.5}$. Это значение r несколько меньше 0.5 (a + b). Здесь $l = b^2/a^2$.

Разность напряжений σ_0 на внутренней и внешней поверхностях цилиндра $\Delta_0 = \sigma_0 (a, t) - \sigma_0 (b, t) = 4 (b^2 - a^2) (1 - \overline{v})^{-1}$ всегла положительна (также и для идеально упругого тела) и растет с течением времени.

Изменение напряжения σ_z во времени в случае (2.21), т. е. при $\varepsilon_z = 0$, качественно подобно временному изменению σ_b . А именно, обозначая $M_2 = a^2 + b^2 - 2r^2$, приходим к заключению, что при $M_2 > 0$ напряжение σ_z возрастает, а при $M_2 < 0$ —убывает. Величина σ_z остается неизменной при $r = a \sqrt[3]{0,5(1+1)}$, несколько большей 0,5 (a+b). Разность $\Delta_z = \sigma_x (a, t) - \sigma_z (b, t) = 2 (b^2 - a^2) \sqrt{(1-\sqrt{2})^{-1}}$ увеличивается при $t \to \infty$, оставаясь все время положительной.

Для количественной оценки Δ_8 и Δ_7 найдем их относительные увеличения по сравнению с Δ_{60} и Δ_{20} , отвечающим началу установившегося режима при t = 0 (в действительности, по истечении пускового времени 0,5—2 сек) с учетом (2.27), т. е. устремляя $t \to \infty$.

Получим

$$\delta_{\theta_{\infty}} = \frac{\Delta_{\theta_{\infty}} - \Delta_{\theta_{\theta}}}{\Delta_{\theta_{\infty}}} = \lambda_{\gamma_0}, \qquad \delta_{z_{\infty}} = \frac{\Delta_{z_{\infty}} - \Delta_{z_{\theta}}}{\Delta_{z_{\infty}}} = \frac{\lambda_{\gamma_0}}{\lambda_{\gamma_0} + \nu_0 (1 - \lambda_{\gamma_0})},$$

Так как 1— $\lambda_{\gamma_0} > 0$, то $\delta_{z \infty} > \delta_{\theta_\infty}$. В случае, например, $\lambda = 0.412$, найленного в п. 2, и $v_0 = 0.25$, следовательно, $\gamma_0 = 0.33$, будем иметь $\delta_{\theta_\infty} = 14^0/_0$, а $\delta_{z \infty} = 40^0/_0$, т. е. при переходе от внутренней к внешней поверхности цилиндра перепад нормальных напряжений почти в три раза больше перепада окружных напряжений.

Определение деформаций г, с, и с, нутем подстановки г, с, и

э, из (2.18) - (2.21) в (2.16), как легко заметить, связано с расшифровкой произведений $\overline{E}^{-1}(1-\overline{v})^{-1} \cdot 1$, $\overline{E}^{-1}\overline{v} \cdot 1$, $\overline{E}^{-1}\overline{v}^2 \cdot 1$. Выполним это исходя из ядра релаксации $R_1(t,\tau) = \chi \Im_s(-\beta; t-\tau)$, где $\chi = \lambda \tau_1^{s-1}$, $\beta = \tau_1^{s-1}$. Тогда, на основании зависимостей (2.3), (2.12) и (2.22), в которых $\tilde{R}_1 = \chi \tilde{\mathscr{I}}_s(-\beta)$, $\tilde{P}_1 = \chi \tilde{\mathscr{I}}_s(\chi - \beta)$ и $\tilde{H}_1 = \chi \tilde{\mathscr{I}}_s(\gamma_0 \chi - \beta)$, в результате применения правила умножения операторов \Im_s -функций Работнова [14]

$$\overset{*}{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{s}}(\xi)\overset{*}{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{s}}(\eta) = [\overset{*}{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{s}}(\xi) - \overset{*}{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{s}}(\eta)]/(\xi - \eta),$$

а также дальнейшего выражения $\tilde{\mathcal{P}}_{a}$, согласно (2.13), через функцию Миттаг-Леффлера $E_{a-1}\left(-\zeta\right)[3]$, получим

$$\frac{1}{\overline{E}(1-\overline{v})} \cdot 1 = \frac{(1+\widetilde{P}_1)(1+\gamma_0\widetilde{H})}{E_0(1-v_0)} \cdot 1 =$$
$$= \frac{|1+\chi\overset{*}{\mathcal{B}_a}(\chi-\beta)| |1+\gamma_0\chi\overset{*}{\mathcal{B}_a}(\gamma_0\chi-\beta)|}{E_0(1-v_0)} \cdot 1 =$$

$$=\frac{1}{E_0(1-v_0)}\left\{1+a_1\left[1-E_{1-a}\left(-bt^{1-a}\right)\right]+a_2\left[1-E_{1-a}\left(-b_2t^{1-a}\right)\right]\right\},$$

где $a_1 = \lambda/(1 - \gamma_0)(1 - \lambda), \quad a_2 = \gamma_0^2 \lambda/(1 - \gamma_0)(1 - \gamma_0 \lambda), \quad b_1 = (1 - \lambda)\gamma_1^{a-1}, \\ b_2 = (1 - \gamma_0 \lambda)\gamma_1^{a-1}, \quad (2.28)$

$$\frac{\frac{v}{E}}{E} \cdot 1 = \frac{v_0}{E_0} \left[1 + \gamma_1 \hat{R}_1 \right) \left(1 + \hat{P}_1 \right) \cdot 1 = \frac{v_0}{E_0} \left[1 + \chi \left(1 + \gamma_1 \right) \hat{\mathcal{B}}_2 (\chi - \beta) \right] \cdot 1 = \frac{v_0}{E_0} \left[1 + a_2 \left[1 - E_{1-2} \left(-b_1 t^{1-2} \right) \right] \right],$$

где

$$a_3 = \lambda (1 + \gamma_1)/(1 - \lambda), \quad \gamma_1 = (1 - 2\gamma_0)/2\gamma_0,$$

$$\frac{\mathbf{v}^{\mathbf{a}}}{\overline{E}} \cdot \mathbf{1} = \frac{\mathbf{v}_{0}}{E_{0}} \left[1 + \gamma_{0} \chi \overset{\mathbf{a}}{\mathfrak{I}}_{\alpha}(-\beta) \right] \left[1 + \chi \left(1 + \gamma_{1} \right) \overset{\mathbf{a}}{\mathfrak{I}}_{\alpha}(\chi - \beta) \right] \cdot 1 =$$

$$=\frac{v_0^2}{E_0}\Big\{1-\tilde{\gamma}_1^{2\lambda}\left[1-E_{1-\pi}\left(-\frac{t^{1-\pi}}{\tilde{\gamma}_1^{1-\pi}}\right)\right]+a_4\left[1-E_{1-\pi}\left(-b_1t^{1-2}\right)\right]\Big\},$$

rge $a_4 = \lambda (1 + \gamma_1)^2 / (1 - \lambda)$.

Все эти сложные операгорные представления растут с течением времени. Их установившиеся значения будут

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{E}(1-\overline{v})} \end{bmatrix}_{*} = \frac{1+a_{1}+a_{2}}{E_{0}(1-v_{0})}, \qquad \begin{bmatrix} \overline{v}\\ \overline{E} \end{bmatrix}_{*} = \frac{v_{0}(1+\lambda\gamma_{1})}{E_{0}(1-\lambda)},$$
$$\begin{bmatrix} \overline{v}^{2}\\ \overline{E} \end{bmatrix}_{*} = \frac{v_{0}^{2}(1+\gamma_{1}\lambda)^{2}}{E_{0}(1-\lambda)}.$$

Анализ формул (2.28) показывает, что, как правило, $a_2 \ll a_1$ и $\gamma_1^{2\lambda} \ll a_4$. Например, при найденном выше значения $\lambda = 0.412$ и $v_0 = 0.25$ имеем $a_2 = 0.07a_1$ и $\gamma_1^{2\lambda} = 0.15a_4$. Если торцы цилиндра свободны, то выражение $\overline{E}^{-1}\overline{v^2}$. 1 не будет использовано и, следовательно, слагаемые, содержащие в качестве коэффициентов значения $\gamma_0^{2\lambda}$ и a_4 , в расчеты вовсе не войдуг. Поэтому нижеследующая таблица значений $\overline{E}_{1,3}(-\overline{z})$, вычисленных с помощью ряда, определяющего эту функцию, может быть при практических расчетах использована для довольно большого промежутка времени, не превышиющего, однако, 7-8-кратного значения времени редаксации z_1 . Так, например, в случае стали, к которой относится фиг. 1, табличные значения могут применяться примерно до 1500 час равномерного вращения цилиндра.

| 4 | 0 | 0.1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0,9 | 1.0 |
|----------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| E0,3(-5) | 1 | 0,8985 | 0,8149 | 0.7450 | 0.6782 | 0.6246 | 0.5882 | 0,5504 | 0,5112 | 0,4922 | 0,4904 |

Пользуясь выведенными здесь формулами, получим, применительно к упомянутой стали, следующие значения относительного увеличения радиального перемешения u_r : $(u_{r\infty}-u_{r_*})/u_{r_*}$ в случае свободных торцов цилиндра равно $77^0/_0$ при r = a и $178^0/_0$ при r = b; в случае, когда торцы цилиндра не могут расширяться, это отношение равно $43^0/_0$ при r = a и $374^0/_0$ при r = b. Таким образом, фактор времени оказывает на перемещение бо́льшее влияние, чем на напряжения.

§ 3. Зона подобия

В зоне подобия (фиг. 1) кривые, отвечающие различным фиксированным моментам времени, на участке от начала координат до встречи с дугою окружности радиуса *ОВ*, конгрузнтны. Из этого следует, что в рассматриваемой зоне фактор времени не в ияет на форму соответствующих частей кривых деформирования. Последнее означает, что ядра релаксации и ползучести не будут загисеть от интенсивности напряжений *ч*.

Тогда исходные физические уравнения (1.4) и (1.5) примут (в дилиндрических координатах) вид

$$\circ_r - \sigma_{\theta} = (1 - \overset{*}{R})(\varepsilon_r - \varepsilon_{\theta}) \varphi(\varepsilon_i), \qquad 2\tau_{r\theta} = (1 - \overset{*}{R}) \gamma_{r\theta} \varphi(\varepsilon_i), \quad (r, \theta, z). \quad (3.1)$$

Легко заметить, что напряжения в этой зоне обладают следующей характерной особенностью. Если $(1 - \vec{R}) \neq (z_i) = \text{const}$ во времени, то независимость от времени любой одной компоненты нормальных напряжений приводит к независимости всех остальных компонент напряжений от времени. Эго вытекает из уравнений (3.1) и их следствия $\sigma_i = \frac{3}{2} (1 - \overset{*}{R}) z_i \neq (z_i).$

Проиллюстрируем последнее применительно к задаче о вращения цилиндра, рассмотренной в зоне линейности, предполагая материал цилиндра несжимаемым при всестороннем сжатив, т. е. при k₀ = 0.

Предположение о несжимаемости материала во всей зоне подобия означает, что при рассмотрении первой зоны как невыделенной части второй, пренебрегаем основной особенностью зоны линейности, состоящей в зависимости $(1-\bar{\nu})^{-1} \cdot 1$ от времени. Это допустимо в том случае, когда зона линейности составляет лишь малую часть зоны подобия. Последнее, в частности, зависит от температуры. Известно [1], например, что для стали при температуре, превышающей 500°С, коэффициент Пуассона ν_0 мало отличается от 0,5. В таких случаях, естественно, изменением объема можно пренебречь.

Рассмотрим случай, когда концы цилиндра не могут расширяться. При этом $\varepsilon_x = 0$. Тогда из условия несжимаемости следует $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$.

Так как

$$z_r = \partial u / \partial r, \qquad z_s = u / r.$$

то *u = c/r* (*c*-произвольная функция времени, подлежащая определению), откуда

 $\varepsilon_r = -\varepsilon_s = -c/r^2$ и, следовательно,

$$= c\sqrt{12}/3r^2, \qquad F(r,c) = cr^{-2}\sqrt{3} \neq (2c\sqrt{3}/3r^2).$$

Так как по условиям симметрии касательные напряжения отсутствуют, то из (3.1), с учетом вышесказанного, следует

$$\sigma_r - \sigma_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F(r,c)(1-\hat{R}).$$
 (3.2)

Подставляя (3.2) в уравнение равновесия

$$r\frac{\partial z_r}{\partial r} + \sigma_r - z_h + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} = 0$$
(3.3)

и интегрируя его затем по r, с учетом граничного условия $\sigma_r(a, t) = 0$, получим

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - \frac{\pi}{R}) \int_a^b F(q, c) \frac{dq}{q} + \frac{\gamma \omega^2}{2g} (a^2 - r^2).$$
(3.4)

Вообще говоря, как это видно из (3.4), радиальное напряжение зависит от времени, ибо c(t) есть функция времени, а оператор $\overset{*}{R}$ имеет по своей природе временной характер. Одиако, как это будет показано ниже, при $\varphi(z_i) = n z_i^m$, где *m* и *n*—постоянные, *z*, не будет изменяться во времени. Действительно, так как степенная функция F(p, c) может быть представлена в виде $F(p, c) = F_1(c) F_2(p)$, то учитывая, что при этом $2(m+1) p^{-1} dp = -F^{-1}(p, c) dF(p, c)$, получим

$$r = -\frac{(1-\bar{R})F_1}{(m+1)\sqrt{3}} [F_1(r) - F_2(a)] + \frac{7^{m^2}}{2g} (a^2 - r^2).$$
(3.5)

На основании второго граничного условия $\sigma_r(b, t) = 0$ из (3.5) следует

$$(1 - \overset{*}{R})F_{1}(c) = \frac{\gamma w^{2} (a^{2} - b^{2}) (m+1) \sqrt{3}}{2g \left[F_{2}(b) - F_{2}(a)\right]} = \text{const.}$$
(3.6)

Таким образом, $F_1(c)$ изменяется во времени так, что $(1-\tilde{R})F_1(c)$ ог времени не зависит. Подставляя в (3.5) вместо $(1-\tilde{R})F_1(c)$ его выражение из (3.6), а также учигывая. что $F_2(r) = 1.5n (2\sqrt{3}/3r^2)^{m+1}$, получим

$$\sigma_r = \frac{\gamma \omega^2 \left(b^2 - a^2\right) \left(a^{-2m-2} - r^{-2m-2}\right)}{2g \left(a^{-2m-2} - b^{-2m-2}\right)} + \frac{\gamma \omega^2}{2g} \left(a^2 - r^2\right). \tag{3.7}$$

Из (3.2) с учетом (3.6) следует, что с_r—с_s также не зависит от времени. Поэтому на основании (3.7) с_s не будет изменяться во времени. Исходя из (3.1) и учитывая найленные выражения компонентов деформаций, получим с_r—с_b=2 (с_r—с₂). Поэтому последняя из искомых компонент напряжений с₂ также не будет изменяться во времени. Будем иметь

$$\bar{z}_{0} = \frac{\gamma \omega^{2} \left(b^{2} - a^{2}\right) \left[a^{-2m-2} + (1+2m)r^{-2m-2}\right]}{2g \left(a^{-2m-2} - b^{-2m-2}\right)} + \frac{\gamma \omega^{2}}{2g} \left(a^{2} - r^{2}\right),
\sigma_{r} = \frac{\gamma \omega^{2} \left(b^{2} - a^{2}\right) \left(a^{-2m-2} + mr^{-2m-2}\right)}{2g \left(a^{-2m-2} - b^{-2m-2}\right)} + \frac{\gamma \omega^{2}}{2g} \left(a^{2} - r^{2}\right).$$
(3.8)

Из (3.7) и (3.8) следует, что напряжения не зависят от характеристики материала *п*. Это соответствует тому, что в зоне линейности выражения для напряжений не содержат модуля E_0 .

Анализ формул (3.8) показывает, что окружное напряжение с_в на внутренией поверхности цилиндра больше, чем на внешней. Эта разница напряжений растет с увеличением характеристики материала *m*, разумеется, при заданном отношении *b/a*. На внешней поверхности с_в = 2₃>0.

Радкальное перемещение будет изменяться с течением времени. Это следует из формулы Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести

$$u_r = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\gamma \omega^2 \left(m+1 \right) \left(b^2 - a^2 \right) b^{2m+2}}{2ng \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^m \left| \left(\frac{b}{a} \right)^{2m+2} - 1 \right|} \left[1 + \int_0^t P_1(t,\tau) \, d\tau \right] \right\}^{\frac{1}{m+1}}.$$
 (3.9)

Из (3.9) видно, что перемещение и, положительно, растет с течением времени t и убывает с ростом радиуса-вектора r.

Естественно, деформации «, н «, будут также зависеть от времени.

Для практического применения (3.9) заметим, что в зоне подобия, при принятом условии несжимаемости, операторы ядер ползучести при опытах на растяжение и кручение образцов равны, т. е. $\vec{P} = \vec{P}_{s}$.

В случае $\sigma_t = n \varepsilon_t^{m-1}$, результаты вычислений, применительно к кривым, изображенным на фиг. 1, показывают, что при t = 0 коэффициент $n = 46000 \ \kappa c/cm^2$, а показатель степени m + 1 = 0.5. Для последующих моментов времени значение *m* в зоне подобия остается стабильным, равным—0,5, тогда как, естественно, значения *n* уменьшаются. В силу стабильности фактора нелинейности *m* в зоне подобия можно в качестве ядра ползучести принять

$$P_1(t,z) = \chi \mathcal{P}_a(\chi - \beta; t - z),$$

где $\chi = \lambda \tau_1^{\alpha-1}$ и $\beta = \tau_1^{\alpha-1}$, т. е. оно конструктивно такое же, как и в зоне линейности. Однако время релаксации τ_1 следует здесь определять как момент времени, отвечающий кривой деформирования, на которую ляжет точка с координатами

$$\varepsilon_{i}(\tau_{1}) = \varepsilon_{02} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \left[1 - E_{1-\alpha} \left(\lambda - 1 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{m+1}},$$

$$\sigma_{i}(\tau_{1}) = \sigma_{02} \left[1 - \lambda \left[1 - E_{1-\alpha} \left(-1 \right) \right] \right].$$

Тогда время релаксации та в зоне подобия будет приближенно совпадать со временем релаксации в зоне линейности.

При таком ядре ползучести, перемещение u_r имеет установившееся значение. Его относительное увеличение (при $t \to \infty$) $\delta_r = (u_{r\infty} - u_{r_0}) u_{r\infty}^{-1} = 1 - (1 - \lambda)^{\frac{1}{m+1}}$. При данных, снятых с фиг. 1, $\delta_r = 65^0/_0$,

§ 4. Зона полного влияния фактора времени

 В этой наибольшей зоне кривые деформирования в целом не конгрузитны. Здесь фактор времени не только отклоняет кривые, изображенные на фиг. 1 от прямой Гука, отвечающей моменту времени t=0, но непрерывно изменяет форму кривых деформирования, т. е.

8 Известия АН, серия физ.-мат. наук. № 3

связь между «и и в не остается стабильной при переходе от одного момента времени к другому. Для различных материалов и температурных условий этот эффект различен. Естественно, он будет тем значительнее, чем ближе к началу координат расположена крайняя точка зоны подобия в л. лежащая на оси деформаций.

При решении прикладных задач в зоне полного влияния фактора времени, следует пользоваться общими уравнениями (1.4) н (1.5), учитывающими упомянутые физические особенности.

Эта зона характерна не только специфическими физическими особенностями, но и возникающими при решении прикладных задач значительными математическими трудностями, которые могут быть преодолены применением интегрально-операторного метода, являющегося дальнейшим обобщением (применительно к нелинейным задачам) полусимволического способа, предложенного автором [9], в основу которого положены идеи теории линейных функциональных операторов Вольтерра [15].

Для демонстрации эффективности этого метода, рассмотрим задачу о вращающемся цилиндре в постановке § 3, но исходя из общих физических уравнений (1.4), которые запишем в цилиндрических координатах

$$\sigma_{\mathbf{r}} - \sigma_{\boldsymbol{\theta}} = [1 - \boldsymbol{R}^{\star}(\sigma_{i})] (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\theta}}) \, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i}), \qquad (\mathbf{r}, \ \boldsymbol{\theta}, \ \boldsymbol{z}). \tag{4.1}$$

Из уравнения (4.1) следует

$$\sigma_i = \left[1 - \tilde{R}\left(\sigma_i\right)\right] F$$

нлн

$$\sigma_i \left[1 + \tilde{P}(\sigma_i) \right] = F. \tag{4.2}$$

Рассмотрим случай, когда

$$\overset{*}{P}(\mathfrak{o}_{l}) = \overset{*}{Q}\mathcal{D}(\mathfrak{o}_{l}). \tag{4.3}$$

Последнее, в частности, будет иметь место при

$$P(t,\tau;\sigma_i) = \chi_1 (t-\tau)^{n-1},$$

где

$$\chi_{1} = \tau_{1}^{-1} = \Phi(\sigma_{i}) = \tau_{0}^{-1} \exp\left[-(u_{0} - q\sigma_{i})/kT\right] \approx A + B\sigma_{i}, \quad (4.4)$$

a

 $A = (kT - u_0)/kTz_0, \quad B = q/kTz_0, \quad 0 < \alpha < 1.$

Таким образом, здесь чисто временной множитель $Q(t, \tau) = \chi_0(t-\tau)^{\alpha-1}$ представляет собою ядро типа Дюффинга [16]. Постоянные $\chi_0 = 1/\tau_0$ и α практически не изменяются в широком диапазоне температур. Смысл постоянных u_0 , q, k и T указан в § 1.

В результате подстановки в (4.2) вместо $\hat{P}(\sigma_l)$ его выражения (4.3) с учетом (4.4) и дальнейшего решения относительно σ_l , образованного таким образом уравнения, получим

114

Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести

$$\eta = \frac{-(A\tilde{Q} + 1) + (A\tilde{Q} + 1)\sqrt{1 + 4BF\tilde{Q}(A\tilde{Q} + 1)^{-2}}}{2B\tilde{Q}} = \Pi(\tilde{Q}). \quad (4.5)$$

Перед раликалом взят знак плюс потому, что sign $\sigma_i =$ sign F и, согласно фиг. 1, $\sigma_i > 0$. Формула (4.5) дает явное выражение σ_i как функции оператора $\overset{\bullet}{Q}$, ядро которого определено выше.

Так как из первого уравнения системы (4.1) следует

$$(z_r - \sigma_0)[1 + \hat{P}(\sigma_i)] = (\varepsilon_r - \varepsilon_0) \circ (\varepsilon_i) = cr^{-2}\sqrt{3} \circ (2c\sqrt{3}/3r^2) = F(r, c),$$

в вз (4.3), (4.4) и (4.5) следует $\overset{*}{P}(\tau_i) = \overset{*}{Q} [A + B\Pi(\overset{*}{Q})],$

TO

$$\sigma_r - \sigma_6 = F \hat{Q}^{-1} [A + B\Pi(\hat{Q})]^{-1}.$$
(4.6)

115

Согласно полусимволическому способу, надлежит правую часть разложить в рял по степеням $\overset{\circ}{Q}$ и далее следовать приему, указанному в статье [9]. Но такой путь решения рассматриваемой здесь задачи привелет к результатам, совершенно непригодным для физикочеханического анализа напряжений и деформаций. Поэтому здесь мы пойдем по другому пути.

Представим П (Q) в виде следующего ряда

$$\frac{F}{A\overset{*}{Q}+1} + \frac{A\overset{*}{Q}+1}{2B\overset{*}{Q}}\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} \left[\frac{4BF\overset{*}{Q}}{(A\overset{*}{Q}+1)^2}\right]'.$$
 (4.7)

Если в разложении (4.7) сохранить любое число i первых членов, то, как легко заметить, правая час.ь (4.6), после подстановки в нее (4.7), будет представлять собою правильную рациональную дробь относительно \tilde{Q} . После разложения этой дроби на элементарные, расшифровка последних с помощью ряда Неймана (т. е. путем привлечения понятия резольвенты) выполняется очень просто. Ввиду бысгрой сходимости ряда (4.7), ограничиваясь для простоты, первым слатаемым, получим

$$\sigma_{r} - \sigma_{k} = -\frac{2(A\tilde{Q} + 1)F}{[A^{c}\tilde{Q}^{3} + (2A + BF)\tilde{Q} + 1]V^{3}} = D\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k}\frac{1 - Aa_{k}}{a_{k}(1 + \tilde{Q}a_{k}^{-1})} = D\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k}\frac{1 - Aa_{k}}{a_{k}}[1 - q_{k}^{*}\tilde{B}_{a}(-q_{k})] = D\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k}\frac{1 - Aa_{k}}{a_{k}}E_{1-a}(-q_{k}t^{1-a}),$$
(4.8)

 $a_{k} = \frac{1}{2A^{2}} [2A + BF + (-1)^{k} \sqrt{4ABF + B^{2}F^{2}}],$ $D = 2F [3BF(4A + BF)]^{-0.5}, \quad (k = 1, 2).$ Появление в (4.8) оператора \mathcal{G}_* обусловлено взаимосвязью типа (2.12), существующей между оператором Абеля J_* (ядро которого $J(t, z) = (t - z)^{s-1} / \Gamma(z)$] и оператором \mathcal{G}_* , ядро которого \mathcal{G}_* —функция Работнова.

Последнее выражение $z_{r} - z_{b}$ представлено через функцию Миттаг-Леффлера на основании зависимости (2.12). Здесь $q_{k} = \chi_{0} \Gamma(\alpha) a_{k}^{-1}$.

Из уравнения равновесия (3.3), с учетом (4.8), при условии $\sigma_r(a, t) = 0$, следует

$$\sigma_{t} = -D \int_{a}^{t} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k} \frac{1 - Aa_{k}}{a_{k}} E_{1-s} (-q_{k}t^{1-s}) \frac{ds}{s} + \frac{\gamma \omega^{2}}{2g} (a^{2} - r^{2}).$$
(4.9)

Согласно принятой степенной зависимости σ_e = nu^{m+1}, будем иметь

$$F = 1.5n \ (2c \sqrt{3}/3p^{\mp})^{m+1}. \text{ Тогда } p^{-1} dp = (-1)^{k-1} \left[(m+1) \ DBa_k \right]^{-1} da_k.$$

Переходя теперь в (4.9) к переменным интегрирования a_k (k-1,2) с учетом последней зависимости между дифференциялами, получим

$$\sigma_{r} = D_{1} \sum_{k=1}^{2} \int_{a_{k}(\tau_{1})}^{a_{k}(\tau_{1})} \frac{1 - Aa_{k}}{a_{k}^{2}} E_{1-t}(-q_{k}t^{1-s}) da_{k} + \frac{\gamma \omega^{2}}{2g} (a^{2} - r^{2}), \qquad (4.10)$$

где

 $D_1 = 1/(m+1) B \sqrt{3}, \quad \tau_i = F(r, c), \quad \tau_{i1} = F(a, c) = 1,5m (2c) \sqrt{3}/3a^2)^{m+1},$

2. Учитывая, что при $q_k t^{1-*} < 1$, согласно указанной в § 2 аппроксимации, $E_{i-\epsilon} (-q_k t^{1-*}) \approx [1+q_k t^{1-*}/\Gamma(-\alpha)]^{-1}$, а также принимая но внимание граничное условне $\sigma_r(b, f) = 0$, приволящее к выражению $F(r, c) = F_1(c) F_2(r) = \theta (e^N - 1) r^{-2m-2} / (a^{-2m-2} - b^{-2m-2} e^N)$, где $e = b^2/a^2$, из (4.10) получим

$$o_r \approx \frac{AS+1}{AS(m+1)V3} \ln \frac{a^{-2m-2}-b^{-2m-2}}{r^{-2m-2}-b^{-2m-2}+e^{-N}(a^{-2m-2}-r^{-2m-2})}, \quad (4.11)$$

где

$$S = \frac{\chi_0 \Gamma(\alpha) t^{1-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}, \quad N = \frac{\gamma w^2 (b^2 - a^2) (m+1) BS V(3)}{2g (AS+1)}, \quad \theta = \frac{(1+AS)^2}{BS}$$

Учитывая принятую аппроксимацию E_{1-s} , указанное выше выражение F(r, c), а также условне $A^{\sharp}D(a_{2}-a_{1})\sqrt{3}=2F$, из (4.8) получим

$$\sigma_r = c_h \approx \frac{\chi_{10} \left(1 - e^{-N}\right) r^{-2m-2}}{e^{-N} \left(\chi_2 a^{-2m-2} - \chi_3 \theta r^{-2m-2}\right) + \chi_3 \theta r^{-2m-2}} + \frac{1}{2} e^{-2m-2} r^{-2m-2}}, \qquad (4.12)$$

The

$$\chi_{3} = 2\Gamma(\alpha) \left[A \mathbb{X}_{0} \Gamma(\alpha) - \Gamma(-\alpha) \right], \qquad \chi_{2} = \sqrt{3} \left[A \mathbb{X}_{0} \Gamma(\alpha) - \Gamma(-\alpha) \right]^{2}, \chi_{3} = B \mathbb{X}_{0} \Gamma(\alpha) \Gamma(-\alpha) \sqrt{3}.$$

Так как выражения σ_r и $\sigma_r - \sigma_0$ найдены, то, привлекая зависимость $2\sigma_z = \sigma_r + \sigma_0$, легко получить явные выражения σ_0 и σ_z .

Перемещение, соответствующее этому случаю, будет

$$u_r = \frac{\sqrt{3}}{2r} \left[\frac{26 \left(e^N - 1 \right)}{\frac{2n \left(a^{-2m-2} - e^N b^{-2m-2} \right)}{\left[\frac{m+1}{2m} \right]^{\frac{4}{m+1}}} \right]^{\frac{4}{m+1}}.$$
(4.13)

Здесь S, 0 и N положительны и растут с течением времени. Все компоненты напряжения имеют при $t \to \infty$ предельные значения $\sigma_{r=}$, $\sigma_{s=}$ и $\sigma_{z=}$,

 Прв q_nt^{1-a} > 1, пользуясь третьей анпроксимацией E_{1-a}, припеденной в § 2, получим

$$E_{1-a}(-q_k t^{1-a}) \approx a_k |\chi_0 \Gamma^2(\alpha) | t^{1-a} |^{-1} .$$
(4.14)

Тогда, принимая во внимание, что при такой аппроксимации

$$= (m+1)\sqrt{3}\gamma_0 \omega^2 (b^2 - a^2) A\chi_0 \Gamma^2(\alpha) t^{1-\alpha} r^{-2m-2} |2g(a^{-2m-2} - b^{-2m-2})|^{-1},$$

142.5

получим выражения компонентов напряжения σ_r, σ_g и σ_z, в точности совпадающие с соответствующими выраженнями σ_r, σ_g и σ_z, определяемыми формулами (3.7) и (3.8), характерными для зоны подобия. Точность этого результата зависит от того, насколько величина $q_k t^{1-s}$ больше ещинцы.

Радиальное перемещение, отвечающее аппроксимации (4.14), будет

$$u_r = \frac{\sqrt{3}}{2r} \left[\frac{(m+1)\gamma_0 \omega^2 (b^2 - a^2) A\chi_0}{ng (a^{-2m-2} - b^{-2m-2}) \sqrt{3}} \frac{t^{1-\alpha}}{\sqrt{3}} \right]^{\frac{1}{m+1}}.$$
 (4.15)

Перемещение (3.9), определенное в зоне подобия, совпадает с (4.15) при соответствующем выражении в (3.9) ядра ползучести P₁(t, z).

При $1 < q_k t^{1-n} < 10$ можно воспользоваться второй аппроксиизцией E_{1-n} , предложенной в § 2. Тогда σ_r , σ_g , σ_z и u_r будут выражены через интегрально-показательную функцию $Ei(-\eta)$. При этом, водобно результатам, полученным в п. 2 этого параграфа, все искоиме величины σ_r , σ_g , σ_z и u_r будут зависеть от времени.

4. Характерной особенностью всех найденных в этом параграфе выражений F(r, c) и a_k , следовательно, и q_k , является то, что $\lim_{t\to\infty} F(r, c) \cdot a_k^{-1}$ от времени не зависит, ибо F(r, c) и a_k растут с течением времени t как t^{1-s} . Поэтому выполнение принятых выше условий относительно величины $q_k t^{1-s}$ от времени t фактически не

М. И. Розовский

зависит. Условия применимости соответствующей аппроксимации предопределяются, главным образом, физическими характеристиками A и B, зависящими от энергии активации u₀, температуры, коэффициента нелинейности q и нараметра y₀, и, в меньшей мере, от геометрических факторов-радиусов цилиндра a и b.

Если для конкретного материала не известны упомянутые величины (в частности, — энергия активации u_0), от когорых зависят величины A и B, то по опытным данным, непосредственно снимаемым с номограммы типа фиг. 1, можно определить величины им пропорциональные, а именно A_{χ_0} и B_{χ_0} . Для этого следует взять две точки $M_1(\varepsilon_1, \sigma_1)$ и $M_2(\varepsilon_2, \sigma_2)$, лежащие на кривой, отвечающие моменту времени $t = t_1 \neq 0$, причем такие, что $\varepsilon_{02} < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $\sigma_{02} < \sigma_1 < \sigma_2$. Тогда A_{χ_0} и B_{χ_0} будут определяться из системы двух уравнечий

$$F(z_k) - \sigma_k = (A\chi_0 + \sigma_k B\chi_0) \sigma_k a^{-1} t_1^{\pi}, \qquad (k=1,2), \tag{4.16}$$

образованных путем привлечения завчсимости $F(\varepsilon_i) = \sigma_i [1 + (A + B\sigma_i) \overset{*}{Q}]$.Последняя является следствием исходных физических уравнений (4.1) при $\overset{*}{P}(\sigma_i) = (A + B\sigma_i) \overset{*}{Q}$, в которых вместо ε_i и σ_i полставлены координаты упомянутых двух точек, а оператор $\overset{*}{Q}$ ·1, отвечающий принятому здесь выражению $Q(t, \tau) = \chi_0 (t - \tau)^{\alpha-1}$, определен для момента времени t_1 . Система (4.16) имеет единственное решение, ибо ее определитель не равен нулю. Для более точного определения значений $A\chi_0$ и $B\chi_0$ необходимо использовать систему (4.16) для различных точек и моментов времени и затем применить какой-либо способ усреднения.

Анализ полученных выше формул (4.11), (4.12), (4.13) н (4.15), определяющих напряжения и перемещения, показывает, что в них параметры A, B и χ_0 фигурируют только в виде париых произведений $A\chi_0$ и $B\chi_0$ или AS и BS, где $S = \chi_0 \Gamma(\alpha) t^{1-\alpha}/\Gamma(-\alpha)$. Отсюда следует, что значения $A\chi_0$ и $B\chi_0$, определяемые из системы (4.16), позволяют выразить полученные в этом параграфе результаты через легко определяемые данные опытов на простую ползучесть образцов. Чтобы примерно установить порядок величин $A\chi_0$ и $B\chi_0$, возьмем на фиг. 1 точки $M_1(3\cdot10^{-3}; 2125)$ и $M_2(4\cdot10^{-3}; 2325)$, расположенные на кривой, отвечающей t = 200 час. Функция, отвечающая моменту времени t = 0, имеет вид $F(z_1) = 46000z_1^{0.5}; \alpha = 0.7$. Тогда, в результате решения системы (4.16), получим $A\chi_0 = -8.75\cdot10^{-3}; B\chi_0 = 5.62\cdot10^{-6}$.

5. В заключение отметим, что во всех рассмотренных выше зонах фактор времени оказывает большее вличние на перемещения, чем на напряжения. В этой зоне, в отличие от результатов, полученных в §§ 2 и 3, перемещение и, как это видно из (4.13) и (4.15), не имеет установившегося значения. Характерная особенность кривых (4.13) и (4.15) в координатной системе "перемещение-время" состой в том, что они не имеют асимитот. Это значит, что здесь отсутствует

Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести

тенденция к течению с постоянной скоростью, столь характерная для результатов, следуемых из теорий ползучести максвелловского типа. Такой характер изменения перемещений во времени, определяемых формулами (4.13) и (4.15), объясняется, главным образом, видом временного множителя $Q(t, \tau) = \chi_0 (t - \tau)^{s-1}$ нелинейного (относительно σ_i) ядра ползучести $P_1(t, \tau; \sigma_i) = \Phi(\sigma_i) Q(t, \tau)$, принятого в настоящем параграфе.

Диспролстровский горный институт

Поступила 8 VI 1959

U. F. Bungmaluh

ՈՉ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

UUTOROAFU

Բարդ լարվածային վիճակի ճամար Նյուների սողջի և ռելաջոացիայի տեսանյան ընդճանար ֆիդիկական ոչ գծային ինաևդրալ ճավասարումները, որոնք կառուցվել են Յո. Ն. Ռարոտնովի [1], Ն. Խ. Հարավվունյանի [2] և ճեղինակի [3] կողմից, ճաշվի են առնում մարմինների լարվածային դեֆորմացիոն վիճակի վրա մամանակի դործոնի ազգեցունյան ճիմնական առանձնաճատկունյունները։

Ներկա հոդվածում ցույց է արված, որ ժամանակային ինտեղրայ օպերատորների կիրառման միջոցով կարևլի է բացահայտել դեֆորմացման նկարադրվող պրոցեսների որոշ նոր ֆիզիկական առանձնահատկունյուններ, ինչպես նաև, կոնկրեա խնդիր լուծելիս, ստանալ որակական ու քանակական հետաղոտանվան համար հարմար ձևի վերջնական արդյունքներ։ Մասնավորապես, այդ հիմ քի վրա փոխադարձ կապ է սահմանված Պուտոսոնի ժամանակային դործակցի և սողջի ու ռելաթսացիայի միջակներն միջն, որոնք որոշվում են նմաշների ձղման ու ոլորման փորձնական ավյալներով, ինչպես նաև կաապոված է նրանի մասնանչված բնունադերի անայիդը։

Հետաղոտունվունը հեշտացնելու համար առանձնացված են դեֆորմացման երեք բնորոշ գոտիներ՝ պարգ արտահայտված ֆիզիկական առանձնահատկուն[ուններով։

Ալստեղ ղարդացված մենոդի էֆեկտիվունյունը, կոնկրետունյան ծամար, ցուցադրված է իր առանդրի շուրջը արադ պատվող երկար սնամեջ գլանի սոդրի խնդրի նկատմամը, որը զգալի ծետա ըրքրունքյուն է ներկալացնում մերննաշինունյան ճամար։

Հհատորոտությունը կատարված է դեֆորոքացման մատճանչված երեք գոտիճերի համար։

Ստացված արդյուն քները առանց սկզրուն քային փոփոխությունների կարող են կիրառվել առանց քասիմ ետրիկ ուրիչ շատ մարմինների սողջի ու ռելարսացիայի պրոցեսներն ուսումնասիրելիս, ճամենայն դեպս այն դեպքերում, երբ գլխավոր լարումները միմյանց ճետ կապված են (3.3) տիպի առնչությամը։

119

ЛИТЕРАТУРА

- Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теорин ползучести. "Вестник МГУ*, № 10, 1948.
- Арутюнян Н. Х. Некоторые попросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
- Розовский М. И. О целинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряжениом состоянии. "Журн. техн. физики», 25. в. 13, 1985.
- 4. Ильюшин А. Л. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
- Гуревич Г. М. О законе деформирования твердых и жидких тел. "Журн. техи. физики". 17. в. 12, 1947.
- Ting Suike, Grain Boundary Model and the Mechanism of Viscous Intererystalline Slip, "Journal Appl. Physik*, 20, № 3, 1949.
- Пономарев С. Д. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз, М., 1952.
- 8. Volterra V. Lesons sur les fonctions de lignes, Paris, 1913.
- Розовский М. И. Полусимволический способ решения некоторых задач теория ползучести. "Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук". 3. № 5, 1956.
- Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержия при наличии линейного закона последействия и релаксации. "ПММ", 4. в. 1, 1940.
- Ржанацын А. Р. Некогорые попросы механики систем, деформирующихся во премени, Гостехнадат. М., 1949.
- Wiman A. Über den Fundamentalsatz der Teorie der Functionen F_n (x). "Acia Matematica", 29, 191, 1905.
- 13. Buhl A. Serie analytiques Mem. scienses Mathemat., Paris, 7, 1925.
- Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием "ПММ", 12, п. І. 1948.
- 15. Volterra V. Theory of Functionales. London, 1931.
- Duffing G. Forschung an der Gebit des Ingenteurwesens, 2, Nr 3, 1931.