ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 3, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Я. Попов

Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости

В настоящей работе предлагается прием построения приближенного решения линейных интегральных уравнений специального вида, встречаемых в некоторых плоских контактных задачах теории упругости. Предлагаемый прием существенно основан на одном новом методе решения линейных интегральных уравнений, принадлежащем М. Г. Крейну [1].

Этот метод эффектно был применен им к контактной задаче теории упругости для полуплоскости в одной из неопубликованных работ. Метод М. Г. Крейна нашел также весьма удачное применение в работе И. Е. Прокоповича [2] и в работах Н. Х. Арутюняна [3], [4].

§ 1. Рассмотрим задачу о вдавливании упругого тела (в частности, штампа) с постоянными E_1, μ_1 в упругое основание, осадки поверхностных точек которого от воздействия единичной силы, помещенной в начале координат, могут быть вычислены по формуле

$$v(x) = \frac{\theta_2}{\pi} v^*(x/h), \qquad v^*(z) = \int_0^\infty G(t) \frac{\cos zt}{t} dt, \tag{1.1}$$

где h, θ_2—некоторые положительные параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства основания, $G(t)$—некоторая нечетная непрерывная функция, обладающая свойством

$$G(0) = 0, \quad G(\infty) = 1. \tag{1.2}$$

Оказывается, что для большинства моделей упругих оснований справедливо (1.1) и (1.2). В том числе это справедливо и для модели в виде полупространства [5] или слоя с модулем упругости, меняющимся с глубиной по закону $E = E_0 e^{\gamma y}$, при этом $h = {}^1/_\gamma$. Заметим, что в случае однородного слоя, опирающегося на абсолютно жесткое основание

$$G(t) = 2\operatorname{sh}^2 t\,(\operatorname{sh} 2t + 2t)^{-1},$$

причем параметром h здесь является толщина слоя.

Следуя И. Я. Штаерману ([6], стр. 93), для названной выше задачи можно получить интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} p(t)\left[\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\ln\frac{1}{|t-x|}+\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}v^*\left(\frac{t-x}{h}\right)\right]dt=f(x),\quad |x|\leqslant a, \tag{1.3}$$

где

$$f(x)=\frac{c-f_1(x)-f_2(x)}{\theta_1+\theta_2},\qquad \theta_1=\frac{2(1-\mu_1^2)}{E_1}. \tag{1.4}$$

Здесь введены обозначения: a — полудлина участка контакта, $p(x)$ — контактное напряжение, c — некоторая произвольная постоянная, которая в случае вдавливания штампа представляет его просадку от действия центрально приложенной нагрузки, $y=f_1(x)$, $y=-f_2(x)$ — кривые, ограничивающие соответственно упругое тело и основание в плоскости xOy до деформации.

Полученное уравнение точно решить не удается. В виду этого, здесь предлагается его приближенное решение.

Принимая во внимание (1.2), можно тем или иным приемом получить разложение

$$v^*(z)=-\left(\ln|z|+\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m}z^{2m}\right) \tag{1.5}$$

и, следовательно, приближенно представить функцию $v^*(z)$ в виде

$$v^*(z)\approx-\left(\ln|z|+\sum_{m=0}^{N}c_{2m}z^{2m}\right), \tag{1.6}$$

где N — некоторое конечное целое число.

Введем обозначения

$$x=\xi h,\quad a=\alpha h,\quad hp(\xi h)=p^*(\xi),\quad f(\xi h)=f^*(\xi), \tag{1.7}$$

причем функцию $p^*(\xi)$ будем называть приведенным контактным напряжением. После замены переменной интегрирования $t=\tau h$ в (1.3) и подстановки туда приближенного выражения (1.6) для $v^*(z)$, придем к интегральному уравнению

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}p^*(\tau)\left[\ln|t-\xi|+\sum_{m=0}^{N}a_{2m}(\tau-\xi)^{2m}\right]d\tau=f^*(\xi),\quad |\xi|\leqslant\alpha. \tag{1.8}$$

$$a_0=\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\ln h+\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}c_0,\qquad a_{2m}=\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}c_m,\quad m=1,2,3\cdots \tag{1.9}$$

Если обе части полученного интегрального уравнения формально продифференцировать по ξ, то оно перейдет в сингулярное уравнение, которое рассматривалось Рейснером [7], М. Я. Беленьким [8], а также

Л. А. Галиным в связи с одной задачей теории фильтрации. В работе [9] дано приложение метода Рейснера [7] к одной контактной задаче для бесконечно длинного упругого цилиндра.

Мы будем строить точное решение интегрального уравнения (1.8) не переходя к сингулярному. Нам представляется, что предлагаемое здесь решение более удобно для получения приближенного решения рассматриваемой контактной задачи.

Существенным моментом в наших построениях является известный результат М. Г. Крейна [1], заключающийся (применительно к рассматриваемому случаю) в том, что для получения решения уравнения (1.8) с произвольной правой частью достаточно построить таковое для $f^*(\xi) \equiv 1$, т. е. решить более простое уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(\tau)\left[\ln|\tau-\xi| + \sum_{m=0}^{N} a_{-m}(\tau-\xi)^{2m}\right]d\tau = 1, \quad |\xi| < 1. \tag{1.10}$$

После этого решение уравнения (1.8) $p_+^*(\xi)$ для произвольной четной правой части $f_+^*(\xi)$ найдется по формуле

$$p_+^*(\xi) = \gamma(\alpha)\, g_\alpha(\xi) - \int_{\xi}^{\alpha} g_u(\xi)\frac{1}{M(u)} \times$$

$$\times \frac{d}{du}\left[\frac{M^2(u)}{M'(u)}\frac{d}{du}\int_0^u \frac{g_u(s) f_+^*(s)\, ds}{M(u)}\right]du, \tag{1.11}$$

а для произвольной нечетной правой части—по формуле

$$p_-^*(\xi) = -\frac{d}{d\xi}\int_{\xi}^{\alpha}\frac{g_u(\xi)}{M'(u)}du\int_0^u g_u(s) f^*(s)\, ds. \tag{1.12}$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{M'(\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\int_0^\alpha g_\alpha(s) f_+^*(s)\, ds, \tag{1.13}$$

$$M(\alpha) = \int_0^\alpha g_\alpha(s)\, ds. \tag{1.14}$$

§ 2. В этом параграфе будет построено точное решение уравнения (1.8).

Посредством замены

$$\xi = \alpha\xi', \quad \tau = \alpha\tau'; \quad b_0 = \ln\alpha + a_0 \quad b_{2m} = \alpha^{2m} a_{2m}, \quad m > 0,$$

$$\alpha g_\alpha(\alpha\tau') = \varphi(\tau'), \tag{2.1}$$

интегральное уравнение (1.10) можно преобразовать к следующему виду

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau')\left[\ln|\tau'-\xi'|+\sum_{m=0}^{N}b_{2m}(\tau'-\xi')^{2m}\right]d\tau'=1. \tag{2.2}$$

Будем разыскивать решение этого интегрального уравнения в виде ряда

$$\varphi(\xi')=(1-\xi'^2)^{-1/2}\sum_{m=0}^{N}B_{2m}T_{2m}(\xi'), \tag{2.3}$$

где B_{2m}—неизвестные коэффициенты, $T_n(z)=\cos n\arccos z$—полиномы Чебышева 1-го рода.

В дальнейшем неоднократно будет использовано свойство ортогональности полиномов Чебышева

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(\xi)\,T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi/2, & m=n\neq 0,\\ \pi, & m=n=0.\end{cases} \tag{2.4}$$

Будут также использованы следующие соотношения

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\frac{T_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\xi=\begin{cases}\frac{1}{n}T_n(\xi), & n=1,\ 2,\ 3,\\ \ln 2\cdot T_0(\xi), & n=0,\end{cases} \tag{2.5}$$

доказательство которых, исключая случай $n=0$, можно найти, например, в диссертации П. И. Клубина.

Здесь будет дано весьма простое (указанное мне М. Г. Крейном) доказательство соотношений (2.5) для случая $n>0$, а также доказательство для особого случая $n=0$.

1) *Случай* $n>0$. Посредством замены

$$\xi=\cos x,\quad \tau=\cos t \tag{2.6}$$

соотношение (2.5), требующее доказательства, преобразуется к виду

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln|\cos t-\cos x|\cos nt\,dt=\frac{1}{n}\cos nx. \tag{2.7}$$

Путем дальнейших очевидных преобразований над правой частью (2.7), устанавливается соотношение

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln|\cos x-\cos t|\cos nt dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln 2\left|\sin\frac{x-t}{2}\right|\cos nt dt. \tag{2.8}$$

Далее, приняв во внимание, что

$$2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = |1 - e^{i\varphi}|, \qquad -\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$$

получим

$$-\ln 2\left|\sin\frac{x-t}{2}\right| = \cos(x-t) + \frac{\cos 2(x-t)}{2} + \frac{\cos 3(x-t)}{3} + \cdots \tag{2.9}$$

Подставив правую часть (2.9) под интеграл правой части равенства (2.8) и приняв во внимание ортогональность тригонометрических функций, обнаружим справедливость (2.7).

2) *Случай* $n=0$. Известно [6], [10], что

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|\xi-\tau|}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{-1/2}\ln|\xi-\tau|\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{-1/2}\ln|\tau|\,d\tau.$$

Последний интеграл посредством замены $\tau = \sin t$ приводится к известному ([11], стр. 207) интегралу

$$\int_0^{\pi/2}\ln|\sin x|\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

откуда и следует справедливость соотношения (2.5) для $n=0$.

Наконец, нам еще потребуются значения следующего интеграла

$$I_n^{(m)}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(\tau-\xi)^{2n}\cdot\frac{T_{2m}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau, \quad m, n = 0, 1, 2, 3\cdots$$

Записанный интеграл для любых целых m и n путем замены (2.6) можно привести к некоторой линейной комбинации табличных интегралов. Приведем результаты вычислений

$$I_0^{(m)}(\xi)\begin{cases} T_0(\xi), & m=0,\\ 0, & m>0,\end{cases} \qquad I_1^{(m)}(\xi) = \begin{cases} T_0(\xi) + \frac{1}{2}T_2(\xi), & m=0,\\ \frac{1}{4}T_0(\xi), & m=1,\\ 0, & m>1,\end{cases}$$

$$I_2^{(m)}(\xi)=\begin{cases}\frac{9}{4}T_0(\xi)+2T_2(\xi)+\frac{1}{8}T_4(\xi), & m=0,\\ T_0(\xi)+\frac{3}{4}T_2(\xi), & m=1,\\ \frac{1}{16}T_0(\xi), & m=2,\\ 0, & m>2,\end{cases}$$

$$I_3^{(m)}(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{32}[200T_0(\xi)+225T_2(\xi)+36T_4(\xi)+T_6(\xi)], & m=0,\\ \frac{15}{4}\left[\frac{15}{16}T_0(\xi)+T_2(\xi)+\frac{1}{8}T_4(\xi)\right], & m=1,\\ \frac{15}{16}\left[\frac{3}{5}T_0(\xi)+\frac{1}{2}T_2(\xi)\right], & m=2,\\ \frac{1}{64}T_0(\xi), & m=3,\\ 0, & m>3,\end{cases}$$

$$I_4^{(m)}(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\frac{1225}{32}T_0(\xi)+49T_2(\xi)+\frac{511}{16}T_4(\xi)+T_6(\xi)+\frac{1}{64}T_8(\xi)\right], & m=0,\\ \frac{7}{2}\left[\frac{7}{2}T_0(\xi)+\frac{35}{8}T_2(\xi)+T_4(\xi)+\frac{1}{16}T_6(\xi)\right], & m=1,\\ \frac{7}{2}\left[\frac{7}{8}T_0(\xi)+T_2(\xi)+\frac{5}{32}T_4(\xi)\right], & m=2,\\ \frac{7}{4}\left[\frac{1}{7}T_0(\xi)+\frac{1}{8}T_2(\xi)\right], & m=3,\\ \frac{1}{256}T_0(\xi), & m=4,\\ 0, & m>4.\end{cases}$$

Подставим теперь (2.3) в (2.2) В результате использования приведенных выше соотношений, получим легко решаемую систему алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов B_{2m}.

Ниже приводятся значения последних для каждого из случаев $N=1, 2, 3, 4$. Общим для всех случаев соотношением будет

$$B_{2m}=A_{2m}\cdot\psi^{-1}(\alpha),\quad m=0,1,2\cdots;\quad A_0=1. \tag{2.9}$$

Случай $N=1$.

$$A_2=b_2,\quad A_{2m}=0,\quad m>1;\quad \psi(\alpha)=\ln\frac{2}{\alpha}-a_0-b_2-\frac{1}{4}b_2^2. \tag{2.10}$$

Случай $N=2$.

$$A_2=\frac{b_2+4b_4}{1-\frac{3}{2}b_4},\quad A_4=\frac{1}{2}b_4,\quad A_{2m}=0,\quad m>2,$$

$$\psi(\alpha)=\ln\frac{2}{\alpha}-a_0-b_2-\frac{9}{4}b_4-\frac{1}{32}b_4^2-A_2\left(\frac{1}{4}b_2+b_4\right).$$

Случай $N=3$.

$$A_2=\frac{32b_2+128b_4+450b_6+15b_4b_6+135b_6^2}{32-48b_4-240b_6-\frac{225}{4}b_6^2},$$

$$A_4=\frac{1}{2}b_4+\frac{9}{2}b_6+\frac{15}{8}b_6A_2,\quad A_6=\frac{3}{16}b_6,\quad A_{2m}=0,\quad m>3,$$

$$\psi(\alpha)=\ln\frac{2}{\alpha}-a_0-b_2-\frac{9}{4}b_4-\frac{25}{4}b_6-\frac{1}{32}b_4^2-\frac{9}{16}b_4b_6-$$

$$-\frac{2595}{1024}b_6^2-A_2\left(\frac{1}{4}b_2+b_4+\frac{225}{64}b_6+\frac{15}{28}b_4b_6+\frac{135}{128}b_6^2\right).$$

Случай $N=4$.

$$A_2=\frac{A_2^+}{A_2^-},\quad A_2^+=\left(16b_2+64b_4+225b_6+784b_8+\frac{21}{16}b_6+21b_8^2\right)(16-$$

$$-35b_8)+(30b_6+224b_8)(4b_4+36b_6+10b_8),$$

$$A_2^-=\left(16-24b_4-120b_6-490b_8-\frac{147}{16}b_8^2\right)(16-35b_6)-$$

$$-2(15b_6+112b_8)^2,\quad A_4=\frac{(8b_4+72b_6+1022b_8)+(30b_6+224b_8)A_2}{16-35b_8},$$

$$A_6=\frac{3}{16}(b_6+16b_8+7b_8A_2),\quad A_8=\frac{1}{16}b_8,\quad A_{2m}=0,\quad m>4,$$

$$\psi(\alpha)=\ln\frac{2}{\alpha}-a_0-b_2-\frac{9}{4}b_4+\frac{25}{4}b_6-\frac{1225}{64}b_8-$$

$$-(b_8/64)^2-\frac{1}{4}A_2\left(b_2+4b_4+\frac{225}{16}b_6+49b_8\right)-$$

$$-\frac{1}{16}A_4(b_4+9b_6+49b_8)-\frac{1}{64}A_6(b_6+16b_8).$$

Без всяких принципиальных затруднений можно получить решение уравнения (2.2) и для случаев $N>4$, а также в случае, когда ядро уравнения, кроме четных, содержит и нечетные степени $(t-\xi)$.

В соответствии с (2.3), (2.1) и (2.9) будем иметь

$$g_\alpha(\xi)=\frac{1}{\psi(\alpha)\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\cdot\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(\xi/\alpha). \tag{2.11}$$

Подставив (2.11) в (1.14) и используя четность функции $g_\alpha(\xi)$ по ξ, а также (2.4), получим

$$M(\alpha)=\frac{\pi}{2\psi(\alpha)} \tag{2.12}$$

и, следовательно, формулы М. Г. Крейна (1.11)—(1.13) в данном случае примут вид

$$p_+^*(\xi)=\frac{\gamma(\alpha)}{\psi(\alpha)\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(\xi/\alpha)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\xi}^{\alpha}\frac{\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(\xi/\alpha)}{\sqrt{u_2-\xi^2}}\cdot\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\psi'(u)}\cdot\frac{d}{du}\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(t)f_+(ut)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right]du, \tag{2.13}$$

$$p_-^*(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_{\xi}^{\alpha}\frac{\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(\xi/u)}{\psi'(u)\sqrt{u^2-\xi^2}}du\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(t)f_-^*(ut)}{\sqrt{1-t^2}}dt, \tag{2.14}$$

$$\gamma(\alpha)=-\frac{1}{\pi}\frac{\psi^2(\alpha)}{\psi'(\alpha)}\cdot\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\psi(\alpha)}\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(t)}{\sqrt{1-t^2}}f_+^*(\alpha t)\,dt. \tag{2.15}$$

Формулы (2.13), (2.14) и (2.15) полностью исчерпывают вопрос о решении интегрального уравнения (1.8).

§ 3. Применим формулы (2.13)—(2.15) к отдельным частным случаям задачи о контакте упругого тела с основанием типа (1.1). С этой целью предварительно установим две вспомогательные формулы.

Если на упругое тело (штамп) действует центральная сила P, то из условия равновесия следует, что

$$P=\int_{-a}^{a}p(x)\,dx=2\int_{0}^{\alpha}p_+^*(\xi)\,d\xi. \tag{3.1}$$

Подставив (2.15) в (3.1), после интегрирования получим

$$P=\frac{\pi\gamma(\alpha)}{\psi(\alpha)}+\frac{1}{\psi'(\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{m=0}^{N}A_{2m}T_{2m}(t)f_+^*(\alpha t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{3.2}$$

Здесь двукратно использованы соотношения (2.4) и при интегрировании второго члена изменен порядок интегрирования.

В случае действия момента должно выполняться условие

$$M = \int_{-a}^{a} xp(x)\,dx = 2h \int_{0}^{a} \xi p_{-}^{*}(\xi)\,d\xi. \tag{3.3}$$

Подставим правую часть (2.14) под знак последнего интеграла. Последующее интегрирование по частям, изменение порядка интегрирования и использование (2.4) дают

$$M = -h \int_{0}^{a} \frac{du}{\psi'(u)} \int_{-1}^{1} \frac{\sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(t)}{\sqrt{1-t^2}} f_{-}^{*}(tu)\,dt. \tag{3.4}$$

Рассмотрение отдельных примеров начнем со случая вдавливания штампа с плоским основанием, т. е. со случая, когда $\theta_1 = 0$, $f_1^{*}(\xi) = f_1(\xi h) = 0$. Будем всюду в дальнейшем считать, что $f_2^{*}(\xi) = f_2(\xi h) = 0$, т. е. поверхность основания, в которое вдавливается штамп (или упругое тело) — плоская. Следовательно, на основании (1.4), (1.7) в разбираемом случае $f_{+}^{*}(\xi) = c/\theta_2$ (считаем, что сила P, действующая на штамп, приложена центрально).

Из (2.15), на основании (2.4), следует $\gamma(\alpha) = c/\theta_2$. Нетрудно проверить, учитывая (2.4), что второй член правой части (2.13) пропадает и для приведенного контактного напряжения в этом случае будем иметь формулу

$$p^{*}(\xi) = \frac{c}{A_2 \psi(\alpha)\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(\xi/\alpha). \tag{3.5}$$

Приняв во внимание (3.2), найдем

$$c = \frac{1}{\pi} P\theta_2 \psi(\alpha). \tag{3.6}$$

В первом приближении ($N = 1$), из формулы (3.5) с учетом (2.10), (2.1), (1.9) получим

$$p(x) = \frac{1}{h} p^{*}(x/h) = \frac{P}{\pi} \frac{1 + \frac{c_2}{h^2}(2x^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{3.7}$$

Пусть теперь на штамп действует пара с моментом M. Обозначим угол поворота штампа через θ (связь штампа с упругим слоем предполагается двусторонней). В этом случае $f_{-}^{*}(\xi) = \frac{h\theta}{\theta_2}\xi$ и, следовательно, $f_{-}^{*}(\xi) = h\theta/\theta_2$. Приняв во внимание это, из (2.14) получим

$$p^*_-(\xi) = \frac{h\theta}{\theta_2} \cdot \frac{d}{d\xi'} \int_{\xi}^{a} \frac{\sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(\xi/u)}{\psi'(u)\sqrt{u^2-\xi^2}}\, du. \tag{3.8}$$

Учитывая значения A_{2m} и $\psi'(\alpha)$ для первого приближения (2.10) и вычисляя интеграл (3.8), найдем

$$p^*(\xi) = -\frac{h\theta}{\theta_2} \cdot \frac{d}{d\xi} \frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{1+c_2\alpha^2} = \frac{h\theta}{\theta_2(1+c_2\alpha^2)} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}. \tag{3.9}$$

Формула (3.4) при $N=1$ принимает вид

$$M = \frac{\pi h^2 \theta \alpha^2}{2\theta_2(1+\alpha^2 c_2)}.$$

Исключив из (3.9) θ, найдем

$$p(x) = \frac{2M}{\pi a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{3.10}$$

Если прижимающая штамп сила приложена к нему с эксцентриситетом ε, то на основании формул (3.7), (3.10) напряжение будет определяться формулой

$$p(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \left[1 + \frac{c^2}{h^2}(2x^2-a^2) + \frac{2\varepsilon}{a^2} x \right]. \tag{3.11}$$

В выражении (3.11) приравняв нулю числитель при $x=-a$, получим уравнение

$$1 + \frac{c_2}{h^2} a^2 - \frac{2\varepsilon}{a} = 0$$

из которого, с одной стороны можно определить предельное значение эксцентриситета

$$\varepsilon = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{c_2}{h^2} a^2\right),$$

не вызывающего отрыва штампа от основания и, с другой стороны можно определить полудлину участка контакта, если имеет место отрыв.

Рассмотрим теперь тот случай, когда первоначальное касание упругого тела происходит в одной точке. Будем сначала предполагать, что функция $f_1(x)$, определяющая конфигурацию упругого тела, имеет непрерывные первые и вторые производные в окрестности точки $x=0$.

Случай, когда это не имеет места, будет рассмотрен отдельно.

В виду малости упругих перемещений, область контакта будет малой и в этой области функцию можно представить в виде

$$f_1(x) = Ax^2, \quad A = \frac{1}{2} f_1''(0).$$

Следовательно, в этом случае

$$f_+''(\xi) = \frac{c - (\xi h)^2}{\theta_1 + \theta_2}$$

и согласно формуле (2.13) будем иметь

$$p^*(\xi) = \left[\gamma(\alpha) + \frac{c}{\theta_1 + \theta_2}\right] \psi^{-1}(\alpha)(\alpha^2 - \xi^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(\xi/\alpha) -$$

$$- \frac{Ah^2}{\pi(\theta_1 + \theta_2)} \int_{\xi}^{\alpha} \frac{\sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(\xi/u)}{\sqrt{u^2 - \xi^2}} \times$$

$$\times \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\psi'(u)} \cdot \frac{d}{du} \int_{1}^{1} \frac{\sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(t)(ut)^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}}\right] du. \tag{3.12}$$

Если считать конфигурацию вдавливаемого тела гладкой в достаточно большой окрестности точки $x = 0$, то контактное напряжение должно быть конечным, а потому из (3.12) следует, что

$$\gamma(\alpha) + \frac{c}{\theta_1 + \theta_2} = 0. \tag{3.13}$$

Учитывая (3.13), (2.4) и $2t^2 = T_2(t) + T_0(t)$, вместо (3.12) будем иметь

$$p^*(\xi) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Ah^2}{\theta_1 + \theta_2} \int_{\xi}^{\alpha} \frac{\sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(\xi/u)}{\sqrt{u^2 - \xi^2}} \times$$

$$\times \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du}\left(1 + \frac{1}{2} A_2\right) u^2\right] du. \tag{3.14}$$

Подставим (3.14) в (3.1). После изменения порядка интегрирования и использования (2.4) получим

$$P = \frac{A\pi h^2}{2(\theta_1 + \theta_2)} \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} u^2 \left(1 + \frac{1}{2} A_2\right)\right] du = \right.$$

$$\left. = \left[\frac{1}{\psi'(u)} \frac{d}{du} u^2 \left(1 + \frac{1}{2} A_2\right)\right]_0^{\alpha} \right\}. \tag{3.15}$$

Последнее уравнение служит для определения длины участка контакта.

Если ограничиться первым приближением (2.10), то уравнение (3.15) примет вид

$$P = \frac{A\pi h^2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{\alpha^2}{1 + a_2\alpha^2}. \tag{3.16}$$

Соответственно формула (3.14) преобразуется к виду

$$p^*(\xi) = \frac{2h^2A}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + a_2\alpha^2}. \tag{3.17}$$

Рассмотрим теперь случай вдавливания в упругое основание упругого тела в виде клина. В этом случае $f_1(x) = A'|x|$, где A' — котангенс угла между гранями клина. Попрежнему считая $f_2(x) = 0$, будем иметь

$$f_1(\xi) = \frac{c - Ah|\xi|}{\theta_1 + \theta_2}$$

и, следовательно, на основании (2.13) и конечности контактного напряжения на концах участка контакта, получим

$$p^*(\xi) = -\frac{Ah}{\pi(\theta_1 + \theta_2)} \int_{\xi}^{\alpha} \frac{\sum_{m=0}^{N} A_{2m} T_{2m}(\xi/u)}{\sqrt{u^2 - \xi^2}} \times$$

$$\times \frac{d}{du}\left[\frac{2}{\varphi'(u)} \cdot \frac{d}{du} \int_0^{\pi/2} |ut| \sum_{m=0}^{N} A_{2m} \cos 2mt\,dt\right] du. \tag{3.18}$$

Подставив (3.18) в (3.1) придем, как и ранее, к уравнению для определения длины участка контакта

$$P = -\frac{2Ah}{(\theta_1 + \theta_2)}\left[\frac{1}{\varphi'(u)} \cdot \frac{d}{du} \int_0^{\pi/2} ut \sum_{m=0}^{N} A_{2m} \cos 2mt\,dt\right]_0^{\alpha}. \tag{3.19}$$

Если довольствоваться первым приближением (2.9), то формулы (3.18) и (3.19) соответственно примут вид

$$p^*(\xi) = \frac{2Ah}{\pi(\theta_1 + \theta_2)} \int_{\xi}^{\alpha} \frac{1 - a_2u^2}{(1 + a_2u^2)^2} \cdot \frac{1 + 2a_2\xi^2 - a_2u^2}{\sqrt{u^2 - \xi^2}}\,du, \tag{3.20}$$

$$P = \frac{2Ah}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{\alpha}{1 + a_2\alpha^2}. \tag{3.21}$$

§ 4. Конкретизируем полученные выше общие результаты на примере упругого основания в виде однородного слоя с упругими постоянными μ_2, E_2. В этом случае

$$\theta_2 = \frac{2(1-\mu_2^2)}{E_2}; \quad v^*(z) = \int_0^\infty \frac{2\mathrm{sh}^2\tau}{2\tau + \mathrm{sh}2\tau} \cdot \frac{\cos\tau z}{\tau}\, d\tau. \tag{4.1}$$

Для получения разложения (1.5), в данном случае наиболее удобным, пожалуй, является прием, использованный в работе [9], основанный на том, что $G(\tau)$ очень быстро снизу приближается к единице, когда $\tau \to \infty$. Отклонение функции $G(\tau)$ в разбираемом случае от единицы уже при $\tau = 3{,}2$ составляет менее 2%.

В виду этого, с достаточной точностью справедливо равенство

$$v^*(z) = \int_0^{3,2} \frac{2\mathrm{sh}^2\tau}{2\tau + \mathrm{sh}2\tau} \cdot \frac{\cos\tau z}{\tau}\, d\tau + \int_{3,2}^\infty \frac{\cos\tau z}{\tau}\, d\tau,$$

откуда, воспользовавшись известным представлением для интегрального косинуса

$$\mathrm{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = 0{,}5772 + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\, dt,$$

получим

$$v^*(z) = -\ln z - 0{,}5772 - \ln 3{,}2 + \int_0^{3,2} \left[\frac{\mathrm{ch}2\tau - 1}{2\tau + \mathrm{sh}2\tau} \cos\tau z + 1 - \cos\tau z\right] \frac{d\tau}{\tau}.$$

Разложив $\cos\tau z$ в последней формуле в степенной ряд и вычислив получаемые при этом интегралы пользуясь, например, квадратурной формулой Гаусса, получим представление функции $v^*(z)$ в виде (1.5). Приведем здесь первые шесть коэффициентов разложения

$$\begin{gathered} c_0 = 0{,}3500; \quad c_2 = -0{,}4947; \quad c_4 = 0{,}1020; \\ c_6 = -0{,}01570; \quad c_8 = 0{,}001710; \quad c_{10} = -0{,}0001343. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Чтобы выяснить какое количество членов ряда (1.5) следует удерживать в том или ином случае для получения достаточно точного результата, вычислены значения функции $g_\alpha(\xi)$ в трех приближениях для случая $\theta_1 = 0$. Эти вычисления приводятся в таб.1, причем там даны значения не самой функции $g_\alpha(\xi)$, обращающейся в ∞ при $\xi = \alpha$, а значения функции

$$g_\alpha^*(\xi) = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}\, g_\alpha(\xi).$$

Приведенная таблица показывает, что при $\alpha = \dfrac{a}{h} \leqslant 0{,}5$ с достаточной для практики точностью можно ограничиться первым приближением ($N = 1$), поскольку отклонение его от последующих приближений не превосходит 5%.

Таблица I

$g_n^*(\xi)$ \ ξ		0	$0{,}2\alpha$	$0{,}4\alpha$	$0{,}6\alpha$	$0{,}8\alpha$	α
$\alpha = 0{,}5$	$N=1$	0,965	0,956	0,931	0,887	0,824	0,755
	$N=2$	0,956	0,947	0,930	0,895	0,842	0,785
	$N=3$	0,956	0,947	0,930	0,895	0,842	0,783
$\alpha = 0{,}75$	$N=1$	1,44	1,41	1,34	1,22	1,04	0,814
	$N=2$	1,41	1,39	1,33	1,23	1,14	1,00
	$N=3$	1,43	1,40	1,34	1,25	1,12	0,962

Приведем здесь формулы в первом приближении (следовательно, справедливые при $\frac{a}{h} \leqslant 0{,}5$) для некоторых случаев задачи о контакте упругого тела с упругим однородным слоем.

При действии на плоский ($f_1(x) = 0$, $\theta_1 = 0$) штамп центрально приложенной силы P контактное напряжение $p(x)$ и величина c внедрения штампа в упругий слой определяются формулами

$$p(x) = \frac{P}{\pi} \frac{1 - (2x^2 - a^2)\dfrac{0{,}495}{h^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \tag{4.3}$$

$$c = \frac{P\theta_2}{\pi}\left[\ln\frac{2h}{a} - 0{,}350 + 0{,}495\,(a/h)^2 - 0{,}0613\,(a/h)^4\right], \tag{4.4}$$

получаемыми из (3.7) и (3.6) с учетом (2.10) и (4.2).

Если же упругое тело ограничено кривой $f_1(x) = Ax^2$, то

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a = \left[\frac{A\pi}{P(\theta_1 + \theta_2)} + \frac{0{,}495\,\varkappa}{h^2}\right]^{-1/2},$$

$$\varkappa = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}. \tag{4.5}$$

Для случая вдавливания упругого тела в виде клина ($f_1(x) = A'|x|$) имеем

$$p(x) = \frac{2A'h}{\pi(\theta_1 + \theta_2)} \int\limits_{x/h}^{a/h} \frac{1 + 0{,}495\varkappa u^2}{(1 - 0{,}495\varkappa u^2)^2} \frac{1 - 0{,}495\varkappa\left(2\dfrac{x^2}{h^2} - u^2\right)}{\sqrt{u^2 - (x/h)^2}}\,du, \tag{4.6}$$

$$a = \frac{h\sqrt{A'^2h^2 + P^2(\theta_1 + \theta_2)\theta_2 \cdot 0{,}495} - A'h^2}{P\theta_2 \cdot 0{,}495}. \tag{4.7}$$

Формулы (4.5) и (4.6), (4.7) получены соответственно из (3.17), (3.16) и (3.20), (3.21) с учетом (2.1), (1.9) и (4.2).

В заключение заметим, что полученные здесь результаты можно обобщить на случай аналогичных контактных задач с учетом кулоновского трения.

Кроме того отметим, что задача о контакте плоского штампа с упругим однородным слоем другим методом исследована С. Е. Бирманом [12].

Новосибирский инженерно-строительный институт
имени В. В. Куйбышева

Поступила 18 III 1961

Գ. Ռ. Գրիգոր

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ առաձգականության տեսության որոշ հարթ կոնտակտային խնդիրներում հանդիպող հատուկ տիպի գծային ինտեգրալ հավասարումների մոտավոր լուծման կառուցման համար առաջարկվում է մի ձև։

Առաջարկված ձևը էապես հիմնված է գծային ինտեգրալ հավասարումների լուծման մի նոր եղանակի վրա, որը պատկանում է Մ. Գ. Կրեյնին [1]։

Այս եղանակը չտպագրված աշխատություններից մեկում, նրա կողմից էֆեկտիվ կերպով կիրառվել է կիսահարթության համար առաձգականության տեսության կոնտակտային մի խնդրում։

Մ. Գ. Կրեյնի եղանակը շատ հաջող կիրառություն է գտել նաև Ի. Ե. Պրոկոպովիչի [2] և Ն. Խ. Հարությունյանի [3, 4] աշխատություններում։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. „ДАН СССР", **100**, № 3, 1955.
2. *Прокопович И. Е.* Плоская контактная задача с учетом ползучести. „ПММ", **20**, в. 6, 1956.
3. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. „Известия АН АрмССР, серия физ-мат. наук", **12**, № 2, 1959.
4. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. „ПММ", **23**, в. 5, 1959.
5. *Попов Г. Я.* К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве. „Известия вузов, Стр-во и архитектура", № 11, 1959.
6. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М., 1949.
7. *Reissner E.* Solution of a class of singular integral Equation. „Bull. of the American math society", v, 51, 1945.
8. *Беленький М. Я.* Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. „ПММ", 16, в. 3, 1952.

9. *Воронин Т. А.* Контактные напряжения, возникающие при тугой посадке жесткой втулки на бесконечный цилиндр. „Известия АН СССР, ОТН", № 8, 1957.
10. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1953.
11. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
12. *Бирман С. Е.* Об осадке жесткого штампа на упругом слое, расположенном на несжимаемом основании. „ДАН СССР", 93, № 5, 1953.