

В. С. Тоноян

Изгиб призматического стержня с поперечным сечением в виде эллиптического кольцевого сектора

Рассматривается изгиб призматического стержня, поперечное сечение которого ограничено двумя конфокальными эллипсами и ветвью гиперболы (фиг. 1). Боковая поверхность стержня свободна от нагрузки. Одно из торцовых сечений зашпелено, а ко второму—приложена распределенная нагрузка, статически эквивалентная одной силе, перпендикулярной к оси симметрии. Функция напряжений найдена в виде бесконечного ряда [1], [2]. Выведены формулы для определения напряжений и центра изгиба. Изгиб стержня для ряда профилей с одной осью симметрии, когда изгибающая сила направлена параллельно к ней, рассматривался Моханом [4]—[6] и Косиро-Куроки [9]. Мохан рассмотрел: 1) профили в виде эллиптического полукольца, 2) сечения, ограниченные двумя гиперболами, эллипсом и прямой. Он рассмотрел также изгиб стержня из анизотропного материала, сечение которого ограничено двумя конфокальными эллипсами и двумя отрезками прямой. Куроки рассмотрел сечения, ограниченные: 1) двумя конфокальными эллипсами и гиперболой, 2) эллипсом и гиперболой, 3) двумя гиперболами и эллипсом. Изгиб балки из ортотропного материала с поперечным сечением, ограниченным эллипсом и его большой осью, когда изгибающая сила перпендикулярна к оси упругой симметрии, рассматривался в работе Чакраворти [7].

§ 1. Постановка задачи

Пусть внешняя изгибающая сила Q приложена на свободном конце стержня параллельно оси y и проходит через центр изгиба, т. е. изгиб не сопровождается кручением. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению [3]

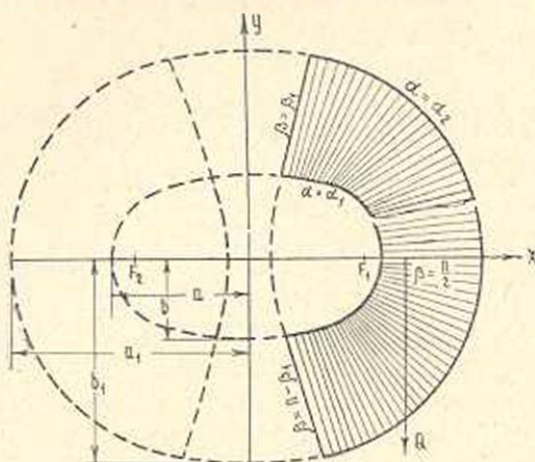
$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{Qz(x-x_0)}{(1+\sigma)J} - \frac{Q}{2J} f'(x), \quad (1.1)$$

где x_0 —координата центра тяжести сечения, J —момент инерции поперечного сечения относительно оси x , $f(x)$ —произвольная функция, σ —коэффициент Пуассона.

На контуре сечения функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{Q}{2J} [y^2 - f(x)] \frac{dx}{ds}. \quad (1.2)$$

В силу симметрии области сечения, функцию $F(x, y)$ определяем только в верхней половине области сечения (фиг. 1). Чтобы опре-



Фиг. 1.

деленная в этой части области сечения функция $F(x, y)$ представляла решение для рассматриваемой задачи, на оси симметрии области, согласно мембранной аналогии, нормальная производная функции $F(x, y)$ должна равняться нулю.

Положим

$$f(x) = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (1.3)$$

где a и b — большая и малая полуоси внутреннего эллипса, и перейдем к эллиптическим координатам

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \\ y &= c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда уравнение (1.1) и условие (1.2) примут вид

$$\nabla^2 F(\alpha, \beta) = \frac{A_1 Q c^3}{4J} (\sin \beta \operatorname{ch} 3\alpha + \sin 3\beta \operatorname{ch} \alpha) - \frac{B_1 c^2 Q}{2J} (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{Q c^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{2J} \left(\frac{\operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta}{\operatorname{ch}^2 \alpha_1} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha \cos^2 \beta}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1} - 1 \right) \frac{d(\operatorname{ch} \alpha \sin \beta)}{ds}, \quad (1.6)$$

где

$$A_1 = A_2 + \operatorname{th}^2 \alpha_1, \quad B_1 = A_2 x_0, \quad A_2 = \frac{\sigma}{1 + \sigma}, \quad (1.7)$$

$$a = c \operatorname{ch} \alpha_1, \quad b = c \operatorname{sh} \alpha_1. \quad (1.8)$$

Напряжения τ_{xz} и τ_{yz} выражаются через функцию напряжений соотношениями

$$\tau_{xz} = g \left[-\frac{\partial F}{\partial \beta} + \frac{Qc^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{2J} \left(\frac{\operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta}{\operatorname{ch}^2 \alpha_1} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha \cos^2 \beta}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1} - 1 \right) \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \right], \quad (1.9)$$

$$\tau_{yz} = g \left[-\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{Qc^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{2J} \left(\frac{\operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta}{\operatorname{ch}^2 \alpha_1} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha \cos^2 \beta}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1} - 1 \right) \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \right],$$

где

$$g = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta}}. \quad (1.10)$$

В эллиптических координатах функция $F(\alpha, \beta)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям

$$F(\alpha_1, \beta) = 0, \quad F(\alpha_2, \beta) = f_1(\beta), \quad (1.11)$$

$$F(\alpha, \beta_1) = f_2(\alpha), \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \beta} \right|_{\beta = \frac{\pi}{2}} = 0, \quad (1.12)$$

где

$$f_1(\beta) = \frac{Qc^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2}{2J} \left[\frac{\sin \beta (\sin^2 \beta - 3 \operatorname{ch}^2 \alpha_1) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_2)}{3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1} + C_1 \right], \quad (1.13)$$

$$f_2(\alpha) = \frac{Qc^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \sin \beta_1}{2J} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha (\operatorname{ch}^2 \alpha - 3 \operatorname{ch}^2 \alpha_1) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1)}{3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1} + C_2 \right], \quad (1.14)$$

$$C_1 = \frac{\sin \beta_1}{3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2} \left[\operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) - \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1) \right], \quad (1.15)$$

$$C_2 = \frac{\operatorname{ch} \alpha_1}{3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1). \quad (1.16)$$

Следуя Г. А. Гринбергу [8], функцию $F(\alpha, \beta)$ ищем в виде ряда [1], [2]

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\beta) \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1) \quad (\alpha_1 < \alpha < \alpha_2), \quad (1.17)$$

где

$$\gamma_k = \frac{k\pi}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (1.18)$$

$$\varphi_k(\beta) = \frac{2}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha, \beta) \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1) d\alpha. \quad (1.19)$$

§ 2. Определение функции напряжений

Умножив уравнение (1.5) на $\frac{2}{\alpha_2 - \alpha_1} \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1)$ и проинтегри-

ровав полученное выражение по α в пределах от α_1 до α_2 , для определения функции $\varphi_k(\beta)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_k''(\beta) - \gamma_k^2 \varphi_k(\beta) = & -\frac{2(-1)^{k+1} \gamma_k}{\alpha_2 - \alpha_1} f_1(\beta) - \frac{B_1 Q c^2}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \times \\ & \times \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\gamma_k} \cos 2\beta - \frac{B_1 Q c^2}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{[\operatorname{ch} 2\alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 2\alpha_2] \gamma_k}{\gamma_k^2 + 4} + \\ & + \frac{A_1 Q c^3}{2J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{[\operatorname{ch} 3\alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 3\alpha_2] \gamma_k}{\gamma_k^2 + 9} \sin \beta + \\ & + \frac{A_1 Q c^3}{2J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{[\operatorname{ch} \alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \alpha_2] \gamma_k}{\gamma_k^2 + 1} \sin 3\beta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом использованы выражение (1.9) и условие (1.11). Согласно (1.12), (1.19) функция $\varphi_k(\beta)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \varphi_k(\beta_1) = & \frac{Q c^3 \sin \beta_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)}{24J(\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{ch}^2 \alpha_1} \times \\ & \times \left\{ \frac{[\operatorname{ch} 3\alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 3\alpha_2] \gamma_k}{\gamma_k^2 + 9} - 3(1 + 2\operatorname{ch} 2\alpha_1) \frac{[\operatorname{ch} \alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \alpha_2] \gamma_k}{\gamma_k^2 + 1} \right\} + \\ & + C_2 \frac{Q c^3 \sin \beta_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\gamma_k}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Принтегрировав уравнение (2.1) и удовлетворив условиям (2.2), для функции $\varphi_k(\beta)$ получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \varphi_k(\beta) = & -\frac{(-1)^{k+1} Q c^3 \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_2)}{12J(\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{ch}^2 \alpha_1} \times \\ & \times \left[\sin 3\beta - \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 9} + 3(1 + 2\operatorname{ch} 2\alpha_1) \sin \beta \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + 1} \right] - \\ & - C_1 \frac{(-1)^{k+1} Q c^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2}{J(\alpha_2 - \alpha_1) \gamma_k} + \\ & + \frac{B_1 Q c^2}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{[(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta) + (-1)^{k+1} (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta)]}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} - \\ & - \frac{A_1 Q c^3}{2J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{[\operatorname{ch} 3\alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} 3\alpha_2] \gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)} \sin \beta - \\ & - \frac{A_1 Q c^3}{2J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{[\operatorname{ch} \alpha_1 + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \alpha_2] \gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)} \sin 3\beta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3Qc^3 \sin \beta_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{1}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 9)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} + \\
& + \frac{3Qc^3 \sin \beta_1 \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{1}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 9)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} - \\
& - \frac{B_1 Qc^2}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{[(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) + (-1)^{k+1} (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)]}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \times \\
& \times \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} + \frac{A_2 Qc^3}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{\sin \beta_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) \gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 9)} \times \\
& \times \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} + \frac{A_2 Qc^3}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{\sin \beta_1 \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1) \gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 9)} \times \\
& \times \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} \left(\beta_1 < \beta < \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Подставив значения (2.3) в (1.17), получим выражение для функции напряжений

$$\begin{aligned}
F(\alpha, \beta) = & C_1 \frac{Qc^3 \operatorname{ch} \alpha_2 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{2J} \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{Qc^3 \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_2)}{24J \operatorname{ch}^2 \alpha_1} \times \\
& \times \left[\sin 3\beta \frac{\operatorname{sh} 3(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh} 3(\alpha_2 - \alpha_1)} + 3(1 + 2\operatorname{ch} 2\alpha_1) \sin \beta \frac{\operatorname{sh}(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh}(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] + \\
& + \frac{B_1 Qc^2}{8J} \left\{ \cos 2\beta \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{ch}(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] + \right. \\
& + \left. \frac{(\alpha_2 - \alpha) \operatorname{ch} 2\alpha_1 + (\alpha - \alpha_1) \operatorname{ch} 2\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_1 \operatorname{sh} 2(\alpha_2 - \alpha) + \operatorname{ch} 2\alpha_2 \operatorname{sh} 2(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh} 2(\alpha_2 - \alpha_1)} \right\} - \\
& - \frac{A_1 Qc^3}{J} \sin \beta \left\{ \operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) \left[\frac{\operatorname{sh}(\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh}(\alpha_2 - \alpha_1)} - \frac{\operatorname{sh} 3(\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh} 3(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] + \right. \\
& + \left. \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1) \left[\frac{\operatorname{sh}(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh}(\alpha_2 - \alpha_1)} - \frac{\operatorname{sh} 3(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sh} 3(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3Qc^3 \sin \beta_1}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1)}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 9)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} \times \\
& \times [\operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)] - \\
& - \frac{B_1 Qc^2}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1)}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} \times \\
& \times [(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) + (-1)^{k+1} (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)] + \\
& + \frac{A_2 Qc^3 \sin \beta_1}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \sin \gamma_k (\alpha - \alpha_1)}{(\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 9)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} \times \\
& \times [\operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) + (-1)^{k+1} \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)] \\
& \left(\alpha_1 < \alpha < \alpha_2, \quad \beta_1 < \beta \leq \frac{\pi}{2} \right). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

§ 3. Определение координаты центра изгиба

Координата центра изгиба определяется из выражения

$$\bar{x} = -\frac{M}{Q}, \quad M = \int_{\Omega} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy, \tag{3.1}$$

где M — момент от касательных напряжений, вычисленный относительно начала координат. Перейдя к эллиптическим координатам, получим

$$\begin{aligned}
M = & -\frac{c^2}{2} \oint_{\Gamma_0} F(\alpha, \beta) [\sin 2\beta d\alpha - \operatorname{sh} 2\alpha d\beta] + \\
& + c^2 \iint_{\Omega} F(\alpha, \beta) [\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta] d\alpha d\beta + \frac{Qc^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{4J} \iint_{\Omega} \operatorname{ch} \alpha \sin \beta (\operatorname{ch} 2\alpha + \\
& + \cos 2\beta) \left[\frac{\operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta}{\operatorname{ch}^2 \alpha_1} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha \cos^2 \beta}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1} - 1 \right] d\alpha d\beta,
\end{aligned}$$

или

$$M = -c^2 \oint_{\Gamma_0^*} F(\alpha, \beta) [\sin 2\beta d\alpha - \operatorname{sh} 2\alpha d\beta] +$$

$$+ 2c^2 \iint_{\Omega} F(\alpha, \beta) [\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta] d\alpha d\beta + \frac{Qc^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{4J} \int_{\Gamma_0} \operatorname{ch} \alpha \sin \beta (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta) \left[\frac{\operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta}{\operatorname{ch}^2 \alpha_1} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha \cos^2 \beta}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1} - 1 \right] d\alpha d\beta, \quad (3.2)$$

где Ω — область сечения стержня, Γ_0 — контур сечения, Ω^* — половина области сечения, Γ_0^* — контур половины сечения.

Подставив выражение $F(\alpha, \beta)$ из (2.4) в (3.2), после интегрирования получим

$$\begin{aligned} \frac{MJ}{Qc^3} = & D + N + R + \frac{6 \sin \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\gamma_k}{2} (\pi - 2\beta_1)}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 4) (\gamma_k^2 + 9)} \times \\ & \times [\operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)^2 + \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)^2 + \\ & + (-1)^{k+1} (\operatorname{ch} \alpha_1 + \operatorname{ch} \alpha_2) (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)] - \\ & - \frac{2B_1}{c(\alpha_2 - \alpha_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\gamma_k}{2} (\pi - 2\beta_1)}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} [(\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)^2 + (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)^2 + \\ & + 2(-1)^{k+1} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)] + \\ & + \frac{2A_2 \sin \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \operatorname{th} \frac{\gamma_k}{2} (\pi - 2\beta_1)}{(\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 4) (\gamma_k^2 + 9)} [\operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)^2 + \\ & + \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)^2 + (-1)^{k+1} (\operatorname{ch} \alpha_1 + \operatorname{ch} \alpha_2) \times \\ & \times (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1) (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)], \quad (3.3) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} D = & \frac{\sin \beta_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta_1)}{180} \left\{ 30 (\pi - 3\beta_1) \operatorname{sh} 2\alpha_2 - 60 (\alpha_2 - \alpha_1) \sin 2\beta_1 - \right. \\ & - \frac{15}{2} (\pi - 2\beta_1) \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_2 - \operatorname{ch} 2\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} + 45 \operatorname{th} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) - 9 \operatorname{th} (\alpha_2 - \alpha_1) + \\ & + \operatorname{th} \frac{3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{5 \sin 2\beta_1}{4 \operatorname{ch}^2 \alpha_1} [(\operatorname{sh} 3\alpha_2 - \operatorname{sh} 3\alpha_1) - \\ & - 9 (1 + 2 \operatorname{ch} 2\alpha_1) (\operatorname{sh} \alpha_2 - \operatorname{sh} \alpha_1)] \left. \right\} - \frac{\sin \beta_1 \operatorname{ch} \alpha_2 (\operatorname{ch} 2\alpha_2 + \cos 2\beta_1)}{180} \times \\ & \times \left\{ 30 (\pi - 2\beta_1) \operatorname{sh} 2\alpha_2 - \frac{15}{2} (\pi - 2\beta_1) \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_2 - \operatorname{ch} 2\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \right. \end{aligned}$$

$$+ (6\cos^2\beta_1 - 5) \cos^2\beta_1 (\operatorname{ch}x_1 + \operatorname{ch}x_2) \Bigg|, \quad (3.6)$$

$$x_0 = \frac{4c}{3} \frac{\cos\beta_1 (\operatorname{sh}x_2 - \operatorname{sh}x_1) (\operatorname{sh}^2x_2 + \operatorname{sh}x_2\operatorname{sh}x_1 + \operatorname{sh}^2x_1 + \cos^2\beta_1)}{\frac{1}{2}(\pi - 2\beta_1) (\operatorname{sh}2x_2 - \operatorname{sh}2x_1) - (x_2 - x_1) \sin 2\beta_1}, \quad (3.7)$$

$$J = \frac{\pi - 2\beta_1}{64} [\operatorname{sh}4x_2 - \operatorname{sh}4x_1 - 2(\operatorname{sh}2x_2 - \operatorname{sh}2x_1)] - \\ - \frac{\sin 2\beta_1}{64} [\operatorname{sh}4x_2 - \operatorname{sh}4x_1 - 4(x_2 - x_1)] - \frac{\sin 4\beta_1}{64} [\operatorname{sh}2x_2 - \operatorname{sh}2x_1 - 2(x_2 - x_1)]. \quad (3.8)$$

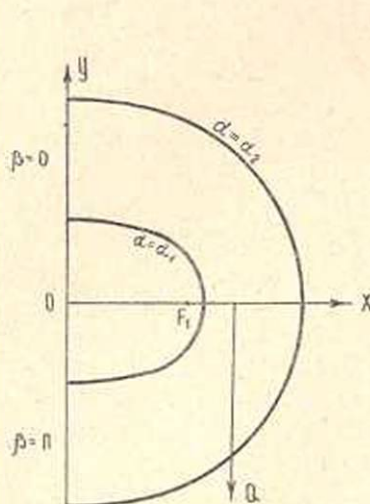
§ 4. Частные случаи

Переходя к пределу в (2.4) при $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$, получим выражение функции напряжений при изгибе для стержня с поперечным сечением в виде эллиптического полукольца (фиг. 2) и эллиптического кольца с трещиной (фиг. 3).

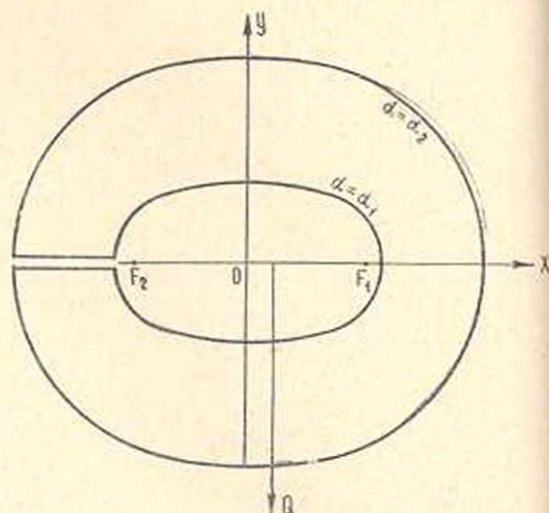
Из (3.3), при $\beta_1 = 0$, получим формулу для крутящего момента при изгибе стержня с поперечным сечением в виде эллиптического полукольца (фиг. 2)

$$\frac{MJ}{Qc^3} = - \frac{\operatorname{ch}x_2 (\operatorname{sh}^2x_1 - \operatorname{sh}^2x_2)}{360\operatorname{ch}^2x_1} \left\{ \left[6\operatorname{ch}2x_2\operatorname{cth}3(x_2 - x_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{6\operatorname{ch}2x_1}{\operatorname{sh}3(x_2 - x_1)} + \operatorname{sh}2x_2 \right] + 24\operatorname{th} \frac{3}{2}(x_2 - x_1) + 15(1 + 2\operatorname{ch}2x_1) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{2\operatorname{ch}2x_1}{\operatorname{sh}(x_2 - x_1)} - 2\operatorname{ch}2x_2\operatorname{cth}(x_2 - x_1) + 7\operatorname{sh}2x_2 - 2\operatorname{th} \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{30\operatorname{ch}^2x_1} \{ \operatorname{sh}x_2 (\operatorname{ch}2x_2 + 1) [\operatorname{sh}^2x_2 - 3\operatorname{sh}^2x_1 + \operatorname{sh}^2x_1 (3\operatorname{sh}^2x_2 - 5\operatorname{sh}^2x_1)] + \\ + 2\operatorname{sh}^3x_1 (\operatorname{ch}2x_1 + 1)^2 \} - \frac{4A_1}{45} \left\{ \operatorname{ch}x_1 (3\operatorname{sh}^2x_1 + 1) \left[\operatorname{ch}2x_2 \times \right. \right. \\ \left. \times \left(\frac{5}{\operatorname{sh}(x_2 - x_1)} + \frac{9}{\operatorname{sh}3(x_2 - x_1)} \right) - \operatorname{ch}2x_1 [5\operatorname{cth}(x_2 - x_1) + 9\operatorname{cth}3(x_2 - x_1)] - \right. \\ \left. - 16\operatorname{sh}2x_1 \right] + \operatorname{ch}x_2 (3\operatorname{sh}^2x_2 + 1) \left[\operatorname{ch}2x_1 \left(\frac{5}{\operatorname{sh}(x_2 - x_1)} + \frac{9}{\operatorname{sh}3(x_2 - x_1)} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{ch}2x_2 [5\operatorname{cth}(x_2 - x_1) + 9\operatorname{cth}3(x_2 - x_1)] + 16\operatorname{sh}2x_2 \right] + \\ \left. + \left[3\operatorname{th} \frac{1}{2}(x_2 - x_1) - \operatorname{th} \frac{3}{2}(x_2 - x_1) \right] \right\} (\operatorname{ch}x_1 + \operatorname{ch}x_2) -$$

$$-5(\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh}^2 z_1 + \operatorname{ch} z_2 \operatorname{sh}^2 z_2)] \Bigg] + \frac{\pi B_1}{32c} \left[\operatorname{sh} 4z_2 - \operatorname{sh} 4z_1 - \right. \\ \left. - \frac{2}{z_2 - z_1} (\operatorname{ch} 2z_2 - \operatorname{ch} 2z_1)^2 - 4 \operatorname{th} (z_2 - z_1) \right] - \frac{8B_1}{c(z_2 - z_1)} \times$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\gamma_k \pi}{2}}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)^2} [\operatorname{ch}^2 z_1 + \operatorname{ch}^2 z_2 + 2(-1)^{k+1} \operatorname{ch}^2 z_1 \operatorname{ch}^2 z_2]. \quad (4.1)$$

Для этого случая, из (3.7) и (3.8), соответствующим предельным переходом, будем иметь

$$x_0 = \frac{8c}{3\pi} \frac{(\operatorname{sh} z_2 - \operatorname{sh} z_1) (\operatorname{sh}^2 z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 + \operatorname{ch}^2 z_1)}{\operatorname{sh} 2z_2 - \operatorname{sh} 2z_1} \quad (4.2)$$

и

$$J = \frac{\pi}{64} [\operatorname{sh} 4z_2 - \operatorname{sh} 4z_1 - 2 [\operatorname{sh} 2z_2 - \operatorname{sh} 2z_1]]. \quad (4.3)$$

Из (3.3), при $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$, получим формулу для крутящего момента при изгибе стержня с поперечным сечением в виде эллиптического кольца с трещиной (фиг. 3)

$$\frac{MJ}{Qc^5} = -\frac{\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh}^2 z_1}{90} \left[60\pi \operatorname{sh} 2z_2 - 15\pi \frac{\operatorname{ch} 2z_2 - \operatorname{ch} 2z_1}{z_2 - z_1} + 45 \operatorname{th} \frac{1}{2} (z_2 - z_1) - \right. \\ \left. - 9 \operatorname{th} (z_2 - z_1) + \operatorname{th} \frac{3}{2} (z_2 - z_1) \right] + \frac{\operatorname{ch} z_2 \operatorname{sh}^2 z_2}{90} \left[60\pi - \right. \\ \left. - 15\pi \frac{\operatorname{ch} 2z_2 - \operatorname{ch} 2z_1}{z_2 - z_1} - 45 \operatorname{th} \frac{1}{2} (z_2 - z_1) + 9 \operatorname{th} (z_2 - z_1) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{3}{2} (x_2 - x_1) \right] - \frac{24}{x_2 - x_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \gamma_k \pi}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 4) (\gamma_k^2 + 9)} [\operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh}^4 x_1 + \\
& + \operatorname{ch} x_2 \operatorname{sh}^4 x_2 + (-1)^{k+1} (\operatorname{ch} x_1 + \operatorname{ch} x_2) \operatorname{sh}^2 x_1 \operatorname{sh}^2 x_2] - \\
& - \frac{8A_2}{x_2 - x_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \operatorname{th} \gamma_k \pi}{(\gamma_k^2 + 1) (\gamma_k^2 + 4) (\gamma_k^2 + 9)} [\operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh}^4 x_1 + \operatorname{ch} x_2 \operatorname{sh}^4 x_2 + \\
& + (-1)^{k+1} (\operatorname{ch} x_1 + \operatorname{ch} x_2) \operatorname{sh}^2 x_1 \operatorname{sh}^2 x_2]. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Для этого случая, из (3.7) и (3.8), соответствующим предельным переходом, будем иметь

$$x_0 = 0, \quad J = \frac{\pi}{32} [\operatorname{sh} 4x_2 - \operatorname{sh} 4x_1 - 2 (\operatorname{sh} 2x_2 - \operatorname{sh} 2x_1)]. \quad (4.5)$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 I 1961

Վ. Ս. Տոնոյան

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՏԵՍԲ ՈՒՆԵՑՈՂ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ԶՈՂԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է սիմետրիայի մեկ առանցք ունեցող համա-
ֆոկալ էլիպտիկոյի և հիպերբոլայի ճյուղով սահմանափակված լայնական
կտրվածքով ձողի ծառմը: Ենթադրվում է, որ ձողի մի ծայրը ամրացված
է, իսկ մյուս ծայրում կիրառված են բաշխված ուժեր, որոնք ստատիկորեն
համարժեք են մեկ ուժի, որը ուղղահայաց է սիմետրիայի առանցքին: Լար-
ման ֆունկցիան որոնված է անվերջ շարքի տեսքով: Արտածված են ծաման
կենտրոնը և լարումները որոշելու համար բանաձևեր:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. Л. Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде криволинейного уголка. ДАН АрмССР, 31, № 1, 1961.
2. Абрамян Б. Л., Тоноян В. С. Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с выточками. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 5, 1960.
3. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. Mohan R. Some simple problems of flexure.—Part I. Z. angew. Math. and Mech., 1956, 30, № 11—12, 427—432.
5. Mohan R. Some flexure problems—Part II. Proc. Rajasthan Acad. Sci., 1956, 6, July 6—16.
6. Mohan R. Flexure of a beam of non-isotropic material having a section bounded by two confocal ellipses and a straight edge. Proc. Rajasthan Acad. Sci., 1955, 5, May, 15—22.

7. *Chakravorti A.* Centre of flexure of a beam of orthotropic material having a Section bounded by an ellipse and its major axis. „Z. Angew. Math. and Mech.“, 1959, 39, № 7—8, 309—313.
8. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948. См. также „Известия АН СССР, серия физическая“, 10, № 2, 1946.
9. *Koshiro Kuroki.* Shearing stresses of elliptic pipe and bar With Notches. „Proc. of the 2nd Japan National Congress for App. Mech.“, 1952, 73—77.