

А. А. Шматов

Оценки при биголоморфных отображениях ограниченных областей*

Цель работы состоит в получении оценок для изменения объемов, углов при биголоморфных отображениях ограниченных областей пространства n комплексных переменных.

Эти оценки выражены в теоремах 1 и 2. Они получаются в результате сравнения между собой соответствующих величин, вычисленных в евклидовой метрике и в метрике Бергмана — инвариантной при биголоморфных отображениях.

§ 1. Вспомогательные рассуждения

Определение. Назовем комплексным m -объемом, заключенным между векторами $\Omega_k \{ \omega_1^{(k)}, \dots, \omega_m^{(k)} \}$ ($k=1, \dots, m$) в эрмитовой

метрике, определяемой элементом длины $ds^2 = \sum_{p,q=1}^n T_{p\bar{q}} dz_p d\bar{z}_q$, ве-

личину $\bar{v}_m$, где

$$\bar{v}_m^2 = \begin{vmatrix} \Omega_1 \bar{\Omega}_1 & \Omega_1 \bar{\Omega}_2 & \dots & \Omega_1 \bar{\Omega}_m \\ \Omega_2 \bar{\Omega}_1 & \Omega_2 \bar{\Omega}_2 & \dots & \Omega_2 \bar{\Omega}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_m \bar{\Omega}_1 & \Omega_m \bar{\Omega}_2 & \dots & \Omega_m \bar{\Omega}_m \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Здесь $\Omega_i \bar{\Omega}_j = \sum_{p,q=1}^n T_{p\bar{q}} \omega_p^{(i)} \bar{\omega}_q^{(j)}$ — скалярное произведение векторов Ω_i и Ω_j , а $T_{p\bar{q}} = \bar{T}_{q\bar{p}}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать этот объем в евклидовой и бергмановой ([1], стр. 418—421) метриках.

Для метрики Бергмана

* Работа доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

$$T_{pq} = \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_p \partial \bar{z}_q}, \quad (1.2)$$

где $K_{(D)}(z, \bar{z})$ — керифункция некоторой ограниченной области D , лежащей в пространстве C^n комплексных переменных $z_1, \dots, z_n$.

Для метрики Евклида

$$T_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{для } p \neq q, \\ 1 & \text{для } p = q \end{cases}$$

и в силу (1.2)

$$\Omega_i \bar{\Omega}_j = \sum_{p_i=1}^n \left| \omega_{p_i}^{(i)} \right|^2. \quad (1.3)$$

Индукцией по числу m получаем, что

$$\tilde{v}_m^2 = \sum_{p_i, q_i=1}^n \begin{vmatrix} T_{p_1 q_1} & T_{p_1 q_2} & \dots & T_{p_1 q_m} \\ T_{p_2 q_1} & T_{p_2 q_2} & \dots & T_{p_2 q_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{p_m q_1} & T_{p_m q_2} & \dots & T_{p_m q_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{p_1}^{(1)} \omega_{p_2}^{(1)} \dots \omega_{p_m}^{(1)} \\ \omega_{p_1}^{(2)} \omega_{p_2}^{(2)} \dots \omega_{p_m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p_1}^{(m)} \omega_{p_2}^{(m)} \dots \omega_{p_m}^{(m)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\omega}_{q_1}^{(1)} \bar{\omega}_{q_2}^{(1)} \dots \bar{\omega}_{q_m}^{(1)} \\ \bar{\omega}_{q_1}^{(2)} \bar{\omega}_{q_2}^{(2)} \dots \bar{\omega}_{q_m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\omega}_{q_1}^{(m)} \bar{\omega}_{q_2}^{(m)} \dots \bar{\omega}_{q_m}^{(m)} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

$i, j = 1, \dots, m$; $p_i < p_{i+1}$; $q_j < q_{j+1}$.

Для метрики Евклида в силу (1.3) и (1.4)

$$v_m^2 = \sum_{\substack{p_i=1 \\ i=1, \dots, m \\ p_i < p_{i+1}}}^n \left\| \begin{vmatrix} \omega_{p_1}^{(1)} \omega_{p_2}^{(1)} \dots \omega_{p_m}^{(1)} \\ \omega_{p_1}^{(2)} \omega_{p_2}^{(2)} \dots \omega_{p_m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p_1}^{(m)} \omega_{p_2}^{(m)} \dots \omega_{p_m}^{(m)} \end{vmatrix} \right\|^2. \quad (1.5)$$

Геометрический смысл комплексного m -объема усматривается следующим образом. Пусть $\theta_{m, 12 \dots (m-1)}$ — минимум первого аналитического угла θ ([1], стр. 421—422) между вектором Ω_m и аналитической $(m-1)$ -мерной гиперплоскостью, содержащей векторы $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{m-1}$, измеренного в эрмитовой метрике.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\tilde{v}_m^2 = |\Omega_1| |\Omega_2| \dots |\Omega_m| \cdot \sin \theta_{2,1} \cdot \sin \theta_{3,21} \dots \sin \theta_{m, 12 \dots (m-1)}. \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6) вытекает равенство

$$\sin^2 \theta_{m, 12 \dots (m-1)} = \frac{\tilde{v}_m^2}{\tilde{v}_{m-1}^2 \sum_{p_m, q_m=1}^n T_{p_m q_m} \omega_{p_m}^{(m)} \bar{\omega}_{q_m}^{(m)}}. \quad (1.7)$$

Равенство (1.6) является естественным обобщением на случай пространства G^n обычной формулы для объема, содержащегося между m векторами в пространстве n действительных переменных R^n .

Для метрики Евклида, в силу (1.3), (1.5) и (1.7), легко получаем

$$\sin^2 F_{m, 12 \dots (m-1)} = \frac{\bar{v}_m^2}{v_{m-1}^2 \sum_{p_m=1}^n |\omega_{p_m}^{(m)}|^2}. \quad (1.8)$$

Здесь $F_{m, 12 \dots (m-1)}$ — соответствующий угол, измеренный в евклидовой метрике.

Рассмотрим определитель

$$\delta_{m+1} = \begin{vmatrix} K & \sum_{q_1=1}^n \bar{\omega}_{q_1}^{(1)} K_{q_1}' & \dots & \sum_{q_m=1}^n \bar{\omega}_{q_m}^{(m)} K_{q_m}' \\ \sum_{p_1=1}^n \omega_{p_1}^{(1)} K_{p_1}' & \sum_{p_1, q_1=1}^n \omega_{p_1}^{(1)} \bar{\omega}_{q_1}^{(1)} K_{p_1 q_1}' & \dots & \sum_{p_1, q_m=1}^n \omega_{p_1}^{(1)} \bar{\omega}_{q_m}^{(m)} K_{p_1 q_m}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{p_m=1}^n \omega_{p_m}^{(m)} K_{p_m}' & \sum_{p_m, q_1=1}^n \omega_{p_m}^{(m)} \bar{\omega}_{q_1}^{(1)} K_{p_m q_1}' & \dots & \sum_{p_m, q_m=1}^n \omega_{p_m}^{(m)} \bar{\omega}_{q_m}^{(m)} K_{p_m q_m}' \end{vmatrix}.$$

где $K_{pq}' = \frac{\partial^2 K}{\partial z_p \partial \bar{z}_q}$, K — кернфункция области D .

Вычисления показывают, что формула (1.4), для комплексного m -объема $\bar{v}_m$ в случае метрики Бергмана, равносильна формуле

$$\bar{v}_m^2 K^{m+1} = \delta_{m+1}. \quad (1.9)$$

Это соотношение вытекает из равенства (1.2). Оно также справедливо для любой метрики Келера с потенциалом, равным $\ln K$ (где K может и не быть кернфункцией какой-либо области).

В дальнейшем нам понадобятся значения величин $T_{pq(D)}, \bar{v}_{m(D)}$, вычисленных в бергмановой метрике для гипершара

$$\left\{ \sum_{k=1}^n |z_k|^2 < R^2 \right\}.$$

Соответствующие вычисления показывают, что кернфункция этого гипершара

$$K_R = \frac{n! R^{2n}}{\pi^n \left(R^2 - \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{n+1}}.$$

Отсюда получаем, что в начале координат

$$K_{(R)} = \frac{n!}{\pi^n R^{2n}}, \quad T_{pq(R)} = \begin{cases} 0 & \text{для } p \neq q, \\ \frac{n+1}{R^2} & \text{для } p = q. \end{cases} \quad (1.10)$$

Из равенства (1.4) и (1.10) вытекает равенство

$$\tilde{v}_{m(R)}^2 = \left(\frac{n+1}{R^2} \right)^m \cdot v_m^2. \quad (1.11)$$

Теперь рассмотрим класс $L_2(D)$ функций $f(z)$, голоморфных в области D , для которых $\|f\|_D = \int_D |f|^2 d\omega < \infty$. Здесь $d\omega$ — элемент объема.

Будем искать минимум $\|f\|_D$ для функций $f \in L_2(D)$, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$1) \quad f(z^0) = 1;$$

$$2) \quad f(z^0) = 0; \quad \sum_{p_1=1}^n \omega_{p_1}^{(1)} \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_{p_1}} = 1;$$

.....

$$m+1) \quad f(z^0) = 0; \quad \sum_{p_1=1}^n \omega_{p_1}^{(1)} \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_{p_1}} = 0; \quad \dots; \quad \sum_{p_m=1}^n \omega_{p_m}^{(m)} \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_{p_m}} = 1.$$

Здесь $\omega_{p_i}^{(i)}$ — составляющие, рассмотренных нами выше, векторов.

Соответствующие вычисления показывают, что этот минимум, который мы обозначим через J_k , имеет следующие значения

$$J_1 = \frac{1}{K}; \quad J_2 = \frac{1}{K \sum_{p_1, q_1=1}^n T_{p_1 q_1} \omega_{p_1}^{(1)} \omega_{q_1}^{(1)}}; \\ J_3 = \frac{\sum_{p_1, q_1=1}^n T_{p_1 q_1} \omega_{p_1}^{(1)} \omega_{q_1}^{(1)}}{K \tilde{v}_2^2}; \quad \dots; \quad J_{m+1} = \frac{\tilde{v}_{m-1}^2}{K \cdot \tilde{v}_m^2}. \quad (1.12)$$

Все вычисления ведутся в точке $P(z^0)$. В вычислениях используется равенство (1.9).

В частных случаях для величин J_1 и J_2 мы получаем ранее известные формулы ([1], стр. 128, 134).

§ 2. Оценки при биголоморфных отображениях ограниченных областей

Возьмем внутри ограниченной области D произвольную точку $P(z^*)$. Поместим в этой точке начало координат.

Пусть h — наименьшее, а H — наибольшее расстояния от точки P до границы области D .

Рассмотрим систему функций

$$W_k = f_k(z_1, \dots, z_n) \quad (k=1, \dots, n), \quad (2.1)$$

голоморфных в этой области D пространства C^n . При помощи этой системы осуществим голоморфное отображение области D на область D^* . Пусть P^* — образ точки P в области D^* . Пусть далее h^* — наименьшее расстояние от точки P^* до границы области D^* , H^* — наибольшее расстояние от точки P^* до границы области D^* .

Оказываются справедливыми следующие теоремы.

Теорема 1. При биголоморфном отображении

$$W_k = f_k(z_1, \dots, z_n) \quad (k=1, \dots, n)$$

ограниченной области D на область D^* , имеет место неравенство

$$\left(\frac{h \cdot h^*}{H \cdot H^*}\right)^{mn} \left(\frac{h^*}{H}\right)^m \cdot v_m < v_m^* < \left(\frac{H^* \cdot H}{h \cdot h^*}\right)^{mn} \left(\frac{H^*}{h}\right)^m \cdot v_m. \quad (2.2)$$

Здесь v_m^* — величина объема после отображения.

Теорема 2. При биголоморфном отображении

$$W_k = f_k(z_1, \dots, z_n) \quad (k=1, \dots, n)$$

ограниченной области D на область D^* , имеет место неравенство

$$\left(\frac{h \cdot h^*}{H \cdot H^*}\right)^{m(2n-1)} \cdot \sin F_{m, 12 \dots (m-1)} < \sin F_{m, 12 \dots (m-1)}^* < \left(\frac{H \cdot H^*}{h \cdot h^*}\right)^{m(2n-1)} \cdot \sin F_{m, 12 \dots (m-1)}. \quad (2.3)$$

Здесь $\sin F_{m, 12 \dots (m-1)}^*$ — величина $\sin F_{m, 12 \dots (m-1)}$ после отображения.

Доказательство 1.

Известно, что если $J_{m,n}^{(A)}$ и $J_{m,n}^{(B)}$ — решения минимальных задач с одними и теми же дополнительными условиями, а область A лежит внутри области B , то имеет место неравенство ([1], стр. 156)

$$J_{m,n}^{(A)} < J_{m,n}^{(B)}. \quad (2.4)$$

Обозначим через (h) гипершар с центром в точке P радиуса h и через (H) гипершар с центром в точке P радиуса H .

В силу (1.12) и (2.4) получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{K_{(h)}} \leq \frac{1}{K_{(D)}} \leq \frac{1}{K_{(H)}}, \\
 & \frac{1}{K_{(h)} \sum_{p_i, q_i=1}^n T_{p_i, q_i(h)} \omega_{p_i}^{(1)} \omega_{q_i}^{(1)}} \leq \frac{1}{K_{(D)} \sum_{p_i, q_i=1}^n T_{p_i, q_i(D)} \omega_{p_i}^{(1)} \omega_{q_i}^{(1)}} \leq \frac{1}{K_{(H)} \sum_{p_i, q_i=1}^n T_{p_i, q_i(H)} \omega_{p_i}^{(1)} \omega_{q_i}^{(1)}}, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \frac{\tilde{v}_{m-1(h)}^2}{K_{(h)} \tilde{v}_{m(h)}^2} \leq \frac{\tilde{v}_{m-1(D)}^2}{K_{(D)} \tilde{v}_{m(D)}^2} \leq \frac{\tilde{v}_{m-1(H)}^2}{K_{(H)} \tilde{v}_{m(H)}^2}.
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из неравенств (2.5), пользуясь равенствами (1.10) и (1.11), получим неравенства

$$K_{(H)} \leq K_{(D)} \leq K_{(h)}, \quad (2.6)$$

$$K_{(H)} \frac{n+1}{H^2} \sum_{p_i=1}^n |\omega_{p_i}^{(1)}|^2 \leq K_{(D)} \sum_{p_i, q_i=1}^n T_{p_i, q_i(D)} \omega_{p_i}^{(1)} \omega_{q_i}^{(1)} \leq K_{(h)} \frac{n+1}{h^2} \sum_{p_i=1}^n |\omega_{p_i}^{(1)}|^2, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^{2n} \frac{n+1}{H^2} v_2^2}{\sum_{p_i=1}^n |\omega_{p_i}^{(1)}|^2} \leq \frac{\tilde{v}_{2(D)}^2}{\sum_{p_i, q_i=1}^n T_{p_i, q_i(D)} \omega_{p_i}^{(1)} \omega_{q_i}^{(1)}} \leq \frac{\left(\frac{H}{h}\right)^{2n} \frac{n+1}{h^2} v_2^2}{\sum_{p_i=1}^n |\omega_{p_i}^{(1)}|^2}.
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Сопоставляя неравенства (2.6), (2.7) и (2.8), получим неравенство

$$\left(\frac{h}{H}\right)^{4n} \left(\frac{h^2}{n+1}\right)^2 \tilde{v}_{2(D)}^2 \leq v_2^2 \leq \left(\frac{H}{h}\right)^{4n} \left(\frac{H^2}{n+1}\right)^2 \tilde{v}_{2(D)}^2. \quad (2.9)$$

Пусть оценка (2.9) верна для v_{m-1} , то есть имеет место

$$\left(\frac{h^{2n}}{H^{2n}}\right)^{m-1} \left(\frac{h^2}{n+1}\right)^{m-1} \tilde{v}_{m-1(D)}^2 \leq v_{m-1}^2 \leq \left(\frac{H^{2n}}{h^{2n}}\right)^{m-1} \left(\frac{H^2}{n+1}\right)^{m-1} \tilde{v}_{m-1(D)}^2. \quad (2.10)$$

Из последнего неравенства (2.5), пользуясь равенствами (1.10) и (1.11), получим неравенство

$$\frac{\left(\frac{h}{H}\right)^{2n} \frac{n+1}{H^2} \tilde{v}_{m-1(D)}^2}{\tilde{v}_{m(D)}^2} \leq \frac{v_{m-1}^2}{\tilde{v}_m^2} \leq \frac{\left(\frac{H}{h}\right)^{2n} \frac{n+1}{h^2} \tilde{v}_{m-1(D)}^2}{\tilde{v}_{m(D)}^2}. \quad (2.11)$$

Из неравенств (2.10) и (2.11) легко получим неравенство

$$\left(\frac{h}{H}\right)^{mn} \left(\frac{h}{\sqrt{n+1}}\right)^m \tilde{v}_{m(D)} \leq v_m \leq \left(\frac{H}{h}\right)^{mn} \left(\frac{H}{\sqrt{n+1}}\right)^m \tilde{v}_{m(D)}. \quad (2.12)$$

После отображения (2.1), неравенство (2.12) примет вид

$$\left(\frac{h^*}{H^*}\right)^{mn} \left(\frac{h^*}{\sqrt{n+1}}\right)^m \tilde{v}_{m(D)} \leq v_m^* \leq \left(\frac{H^*}{h^*}\right)^{mn} \left(\frac{H^*}{\sqrt{n+1}}\right)^m \tilde{v}_{m(D)}. \quad (2.13)$$

Здесь мы пользуемся тем, что величина $\tilde{v}_{m(D)}$, вычисленная в метрике Бергмана, инвариантна при биголоморфных отображениях.

Сопоставление неравенств (2.12) и (2.13) дает нужное нам неравенство (2.2), что и требовалось доказать.

Доказательство 2.

Из неравенств (2.6), (2.7) и (2.11), используя равенства (1.7) и (1.8), получим неравенство

$$\left(\frac{h}{H}\right)^{m(2n+1)} \cdot \sin \theta_{m, 12 \dots (m-1)} \leq \sin F_{m, 12 \dots (m-1)} \leq \left(\frac{H}{h}\right)^{m(2n+1)} \cdot \sin \theta_{m, 12 \dots (m-1)}. \quad (2.14)$$

После отображения (2.1), неравенство (2.14) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{h^*}{H^*}\right)^{m(2n+1)} \cdot \sin \theta_{m, 12 \dots (m-1)} &\leq \sin F_{m, 12 \dots (m-1)}^* \leq \\ &\leq \left(\frac{H^*}{h^*}\right)^{m(2n+1)} \cdot \sin \theta_{m, 12 \dots (m-1)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь использовано то, что величина $\sin \theta_{m, 12 \dots (m-1)}$, вычисленная в метрике Бергмана, инвариантна при биголоморфных отображениях.

Сопоставление неравенств (2.14) и (2.15) дает нужное нам неравенство (2.3), что и требовалось доказать.

Заметим, что для случая $n=2$ несколько иные оценки были в свое время получены Б. А. Фуксом ([1], стр. 455). Однако, наши оценки не совпадают с ними и в этом случае (при $n=2$).

Всесоюзный заочный
машиностроительный институт

Поступила 2 I 1961

Յ. Ս. Շահակյան

ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ՝ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅՅՆԵՐԻ ԲԻՀՈԼՈՄՈՐՖ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՖՈՒՄ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

$[\Omega_k(\omega_1^{(k)}, \dots, \omega_n^{(k)}), k=1, \dots, n]$ զեկտորների միջև պարիակված կոմպլեքս m -ժափալ է կոչվում էփկլիդեսի մետրիկայում հաշվված $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ տարրերի արտադրյալներից կազմված Գրամի դետերմինանտը: Աշխատության մեջ, սահմանափակ տիրույթների բինոյումորֆ արտապատկերումների դեպքում, ստացված են դետառատկանների կոմպլեքս m -ժափալների և $\sin F_{m, 12 \dots (m-1)}$ համար, որոնց $F_{m, 12 \dots (m-1)} \in \Omega_m$ զեկտորի և $\Omega_1, \dots, \Omega_{m-1}$ զեկտորների պարունակող $(m-1)$ -չափանի անալիտիկ հիպերհարթության միջև էփկլիդեսի մետրիկայում հաշվված առաջին անալիտիկ 0 անկյան [1] միջինում է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фукс Б. А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. ГИИЛ, М.—Л., 1948.
4. Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 3