ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 3, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. А. Талалян

О сходимости рядов Фурье к ∞

До сих пор неизвестно, существует ли тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

сходящийся к $+\infty$ на множестве положительной меры. В связи с этим представляет интерес исследовать вопрос о том, на каких множествах меры нуль может общий тригонометрический ряд или тригонометрический ряд, являющийся рядом Фурье, сходиться к $+\infty$[1]. Нижеприводимая теорема представляет собой некоторый частный результат в этом направлении.

Теорема. *Для наперед заданного числа $p\geqslant 1$ существуют функция $f(x)$, принадлежащая классу $L_p[-\pi,\pi]$, и множество $A\subset[-\pi,\pi]$ такие, что*

а) пересечение множества A с любым интервалом, лежащим в $(-\pi,\pi)$, содержит непустое совершенное подмножество;

в) ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $+\infty$ в каждой точке множества A, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=+\infty$$

для всех $x\in A$, где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,\quad (k=0,1,2,\cdots);$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\quad (k=1,2,\cdots).$$

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}$ такую, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<+\infty. \tag{1}$$

При построении функции $f(x)$ и множества A мы будем пользоваться тем фактом, что для любых чисел a, b, x и n имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b \frac{\sin n(t-x)}{t-x} \, dt \right| < 2\pi. \tag{2}$$

Первый шаг. Через $\Delta_1^{(1)}$ обозначим какой-нибудь интервал (с центром, совпадающим с нулевой точкой), лежащий внутри интервала $(-\pi, \pi)$.

Положим

$$f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in \Delta_1^{(1)}, \\ 0, & \text{при} \quad x \overline{\in} \Delta_1^{(1)}. \end{cases} \tag{3}$$

Возьмем какой-нибудь замкнутый интервал $\delta_1^{(1)}$, лежащий внутри интервала $\Delta_1^{(1)}$, центр которого совпадает с центром интервала $\Delta_1^{(1)}$, и выберем натуральное число n_1 такое, чтобы имело место неравенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1^{(1)}(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} \, dt > \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x \in \delta_1^{(1)}, \quad n \geqslant n_1. \tag{4}$$

Это можно сделать в силу того, что выражение в правой части (4) при $n \to \infty$ равномерно сходится к 1 на любом интервале, лежащем внутри интервала $\Delta_1^{(1)}$.

i-ый шаг. Предположим, что i-ым шагом определены функции $f_k^{(i)}(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant k_i)$, интервалы $\Delta_k^{(i)}$, замкнутые интервалы $\delta_k^{(i)} \subset \Delta_k^{(i)}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_i)$ и натуральное число n_i так, что выполняются следующие условия:

1) интервалы $\Delta_k^{(i)}$ лежат в интервале $(-\pi, \pi)$ попарно, не пересекаются и не имеют общих концов;

2) $\delta_k^{(i)} \subset \Delta_k^{(i)}$ и центр интервала $\delta_k^{(i)}$ совпадает с центром интервала $\Delta_k^{(i)}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_i)$;

3) $$f_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in \Delta_k^{(i)}, \\ 0, & \text{при} \quad x \overline{\in} \Delta_k^{(i)}; \end{cases} \tag{5}$$

4) $$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} \, dt > \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x \in \delta_k^{(i)}, \ n \geqslant n_i. \tag{6}$$

Функции $i+1$-го шага определяем следующим образом.

Рассмотрим интервалы $\delta_k^{(i)}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_i)$ и дополнительные к ним интервалы, составляющие множество $(-\pi, \pi) - \sum_{k=1}^{k_i} \delta_k^{(i)}$.

Перенумеруем все эти интервалы слева направо и обозначим их через $(\alpha_k^{(i)}, \beta_k^{(i)})$, $1 \leqslant k \leqslant 2k_i + 1$.

Внутри каждого из интервалов $\left(\alpha_k^{(i)}, \frac{\alpha_k^{(i)}+\beta_k^{(i)}}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha_k^{(i)}+\beta_k^{(i)}}{2}, \beta_k^{(i)}\right)$ возьмем по одному интервалу с центрами $\frac{\alpha_k^{(i)}+\frac{\alpha_k^{(i)}+\beta_k^{(i)}}{2}}{2}$ и $\frac{\frac{\alpha_k^{(i)}+\beta_k^{(i)}}{2}+\beta_k^{(i)}}{2}$.

Полученные интервалы перенумеруем слева направо и обозначим их через $\Delta_k^{(i+1)}$, $1 \leqslant k \leqslant k_{i+1}$ [очевидно $k_{i+1} = 2(2k_i + 1)$].

Положим

$$f_k^{(i+1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in \Delta_k^{(i+1)}, \\ 0, & \text{при} \quad x \overline{\in} \Delta_k^{(i+1)}. \end{cases} \quad (1 \leqslant k \leqslant k_{i+1}). \tag{6}$$

Легко видеть, что интервалы $\Delta_k^{(i+1)}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_{i+1})$ можно предположить выбранными настолько малыми, чтобы выполнялись следующие условия:

I) интервалы $\Delta_k^{(i+1)}$ попарно не пересекаются и не имеют общих концов;

II) для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant k_{i+1})$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i+1)}(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{k_{i+1}} \tag{7}$$

для любого $x \in \Delta_j^{(i+1)}$, $j \neq k$;

III) для любого k имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i+1)}(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{k_{i+1}} \tag{8}$$

для любого $x \in (-\pi, \pi)$ и $1 \leqslant n \leqslant n_i$;

IV)
$$\sum_{k=1}^{k_{i+1}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_k^{(i+1)}(x)|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon_{i+1}. \tag{9}$$

Далее, внутри каждого интервала $\Delta_k^{(i+1)}$ возьмем замкнутый интервал $\delta_k^{(i+1)}$, центр которого совпадает с центром интервала $\Delta_k^{(i+1)}$, и после этого выберем натуральное число n_{i+1} такое, чтобы выполнялись неравенства

V)
$$n_{i+1} > n_i. \tag{10}$$

VI $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i+1)}(t)\,\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt > \frac{1}{2}$$

при $x \in \delta_k^{(i+1)}$, $n \geqslant n_{i+1}$ $(k = 1, 2, \cdots, k_{i+1})$. (11)

Отметим также, что в силу определения интервалов $\Delta_k^{(i+1)}$ и $\delta_k^{(i+1)}$ имеем

VII) $\delta_k^{(i)} \subset \Delta_k^{(i)}$, $1 \leqslant k \leqslant k_i$ и внутри каждого интервала $\delta_k^{(i)}$ лежат два интервала $\delta_{j_k}^{(i+1)}$, $\delta_{j_{k+1}}^{(i+1)}$ из $i+1$-ой группы, где j_k некоторое число $1 \leqslant j_k < k_{i+1}$. Остальные интервалы $i+1$-ой группы лежат вне $\delta_k^{(i)}$.

Условию II) можно удовлетворить в силу того, что k_{i+1} фиксированное число и для любого k имеем оценку

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i+1)}(t)\,\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_k^{(i+1)}} \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right| \leqslant |\Delta_k^{(i+1)}| \cdot \frac{1}{\rho_k^{(i+1)}} \qquad (12)$$

при $x \in \Delta_j^{(i+1)}$, $j \neq k$,

где $\rho_k^{(i+1)}$ есть расстояние множеств $\Delta_k^{(i+1)}$ и $\sum\limits_{j \neq k} \Delta_j^{(i+1)}$.

Ясно, что число в правой части можно сделать сколь угодно малым за счет малости длин интервалов $\Delta_k^{(i+1)}$.

Условиям III) и IV) тоже можно удовлетворить за счет малости длин интервалов $\Delta_k^{(i+1)}$.

Очевидно, можно удовлетворить также остальным условиям. Таким образом мы определим функции $f_k^{(i)}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant k_i$, $i \geqslant 1$, для которых выполнены условия I, $\cdots$, VII) при любом $i \geqslant 1$.

Положим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_i} f_k^{(i)}(x), \qquad (13)$$

$$A = \sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=i}^{\infty}\left(\delta_1^{(j)} + \delta_2^{(j)} + \cdots + \delta_{k_j}^{(j)}\right). \qquad (14)$$

В (13) и (14) предполагается $k_1 = 1$.

Докажем, что определенные таким образом функция $f(x)$ и множество A удовлетворяют условиям теоремы.

Пусть $x_0 \in A$. Предположим, что i_0 наименьший индекс, для которого $x_0 \in \prod\limits_{j=i_0}^{\infty}\left(\delta_1^{(j)} + \delta_2^{(j)} + \cdots + \delta_{k_j}^{(j)}\right)$.

Из определения интервалов $\delta_k^{(i)}$ (см. условие VII) видно, что существует единственная последовательность вложенных интервалов, начинающаяся некоторым интервалом i_0-ой группы, для которой число x_0 является общей точкой всех интервалов этой последовательности. Эти интервалы можно записать в виде

$$\delta_{\nu_{i_0}}^{(i_0)},\ \delta_{\nu_{i_0+1}}^{(i_0+1)}, \cdots \delta_{\nu_i}^{(i)}, \cdots, \tag{15}$$

где

$$1 \leqslant \nu_i \leqslant k_i, \quad i = i_0 + 1, \quad i_0 + 2, \cdots.$$

Итак, имеем

$$\delta_{\nu_{i_0}}^{(i_0)} \supset \delta_{\nu_{i_0+1}}^{(i_0+1)} \supset \cdots \supset \delta_{\nu_i}^{(i)} \supset \cdots \tag{16}$$

и

$$x_0 \in \delta_{\nu_j}^{(j)}, \quad j = i_0, \ i_0 + 1, \cdots. \tag{17}$$

Из неравенств (1) и (9) и из определения функции $f(x)$ [см. (13)] вытекает, что $f(x) \in L_p[-\pi, \pi]$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt \tag{18}$$

для любого $n = 1, 2, \cdots$.

Заметим, что в силу неравенства (2) и определения функций $f_k^{(i)}(x)$ [см. (5)] будем иметь

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt\right| < M_0 \tag{19}$$

для любого $n = 1, 2, \cdots \left(\text{можно, например, положить } M_0 = 2\sum_{i=1}^{i_0} k_i\right)$.

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{i=i_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt. \tag{20}$$

Пусть n—натуральное число, большее чем n_{i_0+1}. Тогда для некоторого $j \geqslant i_0 + 1$ имеем

$$n_j < n \leqslant n_{j+1}, \tag{21}$$

где n_j числа, фигурирующие в условиях III), V) и VI).

Из условия II) и из того, что по построению $\delta_k^{(i)} \subset \Delta_k^{(i)}$ [см. условие VII)], принимая во внимание (17), получаем

$$\left|\sum_{k \neq \nu_i}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt\right| < \varepsilon_i \tag{22}$$

для всех $n = 1, 2, \cdots$; $i \geqslant i_0$.

Далее, при $i_0 \leqslant i \leqslant j$ в силу (21), (17) и условий V) и VI) будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\nu_i}^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt > \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует

$$\sum_{i=i_0}^{j}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt > \frac{1}{2}(j-i_0)-\sum_{i=i_0}^{\infty}\varepsilon_i. \tag{24}$$

Далее, так как в силу неравенства (2) имеем

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\nu_{j+1}}^{(j+1)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt\right| < 2,$$

то, принимая во внимание (22), где положено $i=j+1$, будем иметь

$$\left|\sum_{k=1}^{k_{j+1}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(j+1)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt\right| < \varepsilon_{j+1}+2. \tag{25}$$

Наконец, в силу (21) и условия III) [принимая во внимание условие V)] для любого $i > j+1$ имеем

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\nu_i}^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt\right| < \varepsilon_i. \tag{26}$$

Из (26) и (22) следует

$$\left|\sum_{i=j+2}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt\right| < 2\sum_{i=j+2}^{\infty}\varepsilon_i. \tag{27}$$

Так как при $n\to\infty$ число j, удовлетворяющее неравенству (21), тоже стремится к $+\infty$, то из (19), (24), (25) и (17) следует, что

$$\sum_{i=}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k^{(i)}(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt \to +\infty \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Таким образом, в силу (18) для любой точки $x_0 \in A$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(t-x_0)}{t-x_0}\,dt = +\infty. \tag{28}$$

Остается показать, что множество A удовлетворяет условию а), фигурирующему в формулировке теоремы.

В самом деле, из построения интервалов $\Delta_k^{(i)}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_i)$ $i = 1, 2, \cdots$ видно, что внутри каждого интервала $\delta \subset (-\pi, \pi)$ лежит некоторый интервал $\Delta_{\mu_{i_0}}^{(i_0)}$ $(1 \leqslant \mu_{i_0} \leqslant k_{i_0})$. Тогда $\delta_{\mu_{i_0}}^{(i_0)} \subset \delta$.

Так как в силу условия VII) внутри каждого интервала $\delta_k^{(i)}$ i-ой группы лежат два непересекающихся интервала $i+1$-ой группы и так как все интервалы $\delta_k^{(i)}$ замкнуты, то ясно, что множество

$$\delta_{\mu_{i_0}}^{(i_0)} \cdot \prod_{i=i_0+1}^{\infty} \left(\delta_1^{(i)} + \delta_2^{(i)} + \cdots + \delta_{k_i}^{(i)}\right)$$

есть непустое совершенное множество, входящее в пересечение $A \cdot \delta$. Таким образом, множество A удовлетворяет условию а) и теорема доказана.

Из приведенного построения легко усмотреть, что функцию $f(x)$ можно было бы определить так, чтобы она принадлежала одновременно всем классам $L_p[-\pi, \pi]$, $p > 1$. Более того, для любой, сколь угодно быстро возрастающей монотонной функции $\varphi(u)$, определенной на $[0, +\infty)$, можно определить функцию $f(x)$ такую, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x)|)\, dx < +\infty$$

и ряд Фурье которой сходится к $+\infty$ на множестве, имеющем совершенную порцию в любом интервале $\delta \subset (-\pi, \pi)$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 II 1961

Ա. Ա. Թալալյան

ՖՈՒՐՅԵԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ԴԵՊԻ ∞ ԶՈՒԳԱՄԻՏԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա աշխատության մեջ բերված է $L_p[-\pi, \pi]$, $p > 1$, դասին պատկանող ֆունկցիայի օրինակ, որի Ֆուրյեի շարքը զուգամիտում է դեպի ∞ ամեն մի ինտերվալում կատարյալ մաս ունեցող բազմության վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ульянов П. Л.* О расходимости рядов Фурье. „Успехи математических наук“, 12, вып. 3, стр. 75—132.