ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 3, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

К. Б. Санджиева

Приближенный метод решения краевой задачи для уравнения $\Delta\Delta\varphi - \lambda^2\Delta\varphi = 0$

В настоящей работе дается метод приближенного решения первой основной краевой задачи в случае круговой области для уравнения

$$\Delta\Delta\varphi - \lambda^2\Delta\varphi = 0,$$

где λ — вещественная постоянная.

Для этой цели используются общее представление решений и некоторые результаты из теории краевых задач аналитических функций [1], [2]. Если в формуле общего представления решений вместо функции Римана брать ее приближения, то будем получать соответствующие приближения искомого решения. Ниже используются эти приближения и при их помощи строятся приближенные решения краевой задачи.

§ 1. Случай уравнения второго порядка

Предварительно рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$\Delta\varphi(x, y) - \alpha^2\varphi(x, y) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

α — действительная постоянная.

Известно, что общее линейное уравнение с частными производными 2-го порядка с постоянными коэффициентами всегда приводится к виду (1.1).

Задача А. Найти решение уравнения (1.1), регулярное в односвязной области G, по граничному условию.

$$[\varphi(x, y)]_\Gamma = f(s), \tag{1.2}$$

где $f(s)$ — заданная непрерывная функция.

В качестве области G возьмем единичный круг $|z| < 1$.

Общее представление решений уравнения (1.1) имеет вид [1]

$$\varphi(x, y) = \beta J_0(i\alpha r) + \operatorname{Re}\int_0^z \Phi(t) J_0\left(i\alpha\sqrt{\bar{z}(z-t)}\right) dt, \tag{1.3}$$

где $r = |z|$,

β — любая действительная постоянная,

$\Phi(z)$ — любая голоморфная в области G функция,

J_0 — функция Бесселя первого рода.

Функция Римана уравнения (1.1) имеет вид

$$J_0\left(\alpha i\sqrt{\bar{z}(z-t)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} [\bar{z}(z-t)]^k.$$

Подставив n-ое приближение функции Римана в (1.3), получим

$$\varphi_n(x, y) = \beta\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2} r\right)^{2k} + \operatorname{Re}\int_0^z \Phi_n(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} [\bar{z}(z-t)]^k dt.$$

Введем обозначения

$$\int_0^z \Phi_n(t)\, dt = \psi_0(z), \quad \int_0^z \psi_0(t)\, dt = \psi_1(z), \ldots,$$

$$\int_0^z \psi_{n-1}(t)\, dt = \psi_n(z)$$

и заметим, что

$$\psi_0(0) = 0, \ \psi_1(0) = 0, \ldots, \ \psi_n(0) = 0. \tag{1.4}$$

Пользуясь новыми обозначениями, а также формулами

$$\int_0^z \Phi_n(t)(z-t)^m dt = m!\psi_m(z),$$

получим

$$\varphi(x, y) = \beta\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2} r\right)^{2k} + \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \bar{z}^k \psi_k(z),$$

или

$$\varphi_n(x, y) = \beta\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2} r\right)^{2k} + \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \bar{z}^k \frac{d^{n-k}\psi_n(z)}{dz^{n-k}}.$$

Перейдем к решению граничной задачи.

Задача B. Найти, голоморфную в круге единичного радиуса, функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую граничному условию

$$\operatorname{Re}\left[\frac{d^n\varphi}{dz^n} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \bar{z}\frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-1}} + \cdots + \frac{\bar{z}^n}{n!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}\varphi\right]_\Gamma = \gamma(t),$$

где

$$\gamma(t) = f(t) - \beta \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} = f(t) - \beta M_0.$$

Так как на окружности единичного радиуса $\bar{z} = \frac{1}{z}$, то предыдущее равенство можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n} W(z)\right]_\Gamma = \gamma(t),$$

где $W(z)$ — голоморфная в круге функция, равная

$$W(z) = z^n \frac{d^n\psi}{dz^n} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}\psi. \tag{1.6}$$

Решая эту граничную задачу, находим [2]

$$W(z) = \frac{z^n}{2\pi i}\int_\Gamma \gamma(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t} + iCz^n +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_k\left(z - z^{(2n-k)}\right) + i\beta_k\left(z + z^{2n-k}\right)\right],$$

где C, α_k, β_k — произвольные вещественные постоянные.

Для определения $\psi(z)$ имеем неоднородное уравнение Эйлера (1.6) с особой точкой $z = 0$. Подстановкой $z = e^t$ оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$L\psi = \frac{d^n\psi}{dt^n} + C_1\frac{d^{n-1}\psi}{dt^{n-1}} + \cdots + C_n\psi = \frac{e^{nt}}{2\pi i}\int_\Gamma \gamma(\tau)\frac{\tau + e^t}{\tau - e^t}\frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ iCe^{nt} + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_k\left(e^{kt} - e^{(2n-k)t}\right) + i\beta_k\left(e^{kt} + e^{(2n-k)t}\right)\right].$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2(n-1)}\lambda + \cdots +$$

$$+ \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1) = 0.$$

Общее решение неоднородного уравнения слагается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение Эйлера имеет фундаментальную систему решений вида

$$z^\lambda (\ln z)^k,$$

где λ — корень характеристического уравнения, k — неотрицательное число, меньшее, чем кратность корня λ.

Простой подстановкой убеждаемся, что характеристическое уравнение не имеет целых положительных корней.

Таким образом мы видим, что однородное уравнение не имеет голоморфных, в круге $|z|<1$, решений. Докажем, что неоднородное уравнение имеет голоморфное решение. Уравнение (1.6) имеет частное решение

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{A_{n+k}}z^{n+k}+z^n\frac{iC-\beta M_0}{A_n}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\alpha_k\left(\frac{z^k}{A_k}-\frac{z^{2n-k}}{A_{2n-k}}\right)+i\beta_k\left(\frac{z^k}{A_k}+\frac{z^{2n-k}}{A_{2n-k}}\right)\right\},$$

где

$$A_k=\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2(n-1)}\cdot k+\cdots+$$

$$+k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1),$$

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(s)\,ds,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(s)e^{-iks}ds\quad(k=1,2\ldots).\tag{1.7}$$

Очевидно, $A_k\,(k=1,2\ldots)$ не обращаются в нуль.

Из (1.7) видно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{A_{n+k}}z^{n+k}$ сходится равномерно в круге $|z|<1$.

Следовательно

$$Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{A_{n+k}}z^{n+k}$$

голоморфна внутри круга $|z|<1$.

Таким образом, мы доказали существование единственного голоморфного решения уравнения (1.6). Оно имеет вид

$$\psi(z)=Q(z)+z^n\frac{iC-\beta M_0}{A_n}+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\alpha_k\left(\frac{z^k}{A_k}-\frac{z^{2n-k}}{A_{2n-k}}\right)+\right.$$

$$\left.+i\beta_k\left(\frac{z^k}{A_k}+\frac{z^{2n-k}}{A_{2n-k}}\right)\right\}.$$

$Q(z)$ — есть частное решение уравнения (1.6), где правой частью служит выражение

$$\frac{z^n}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}.$$

Из (1.8) видно, что $\psi(z)$ зависит от $2n+2$ произвольных действительных постоянных. Удовлетворяя условиям (1.4), определим однозначно все постоянные через значения $Q(z)$ и ее производных в точке $z=0$.

Продифференцируем (1.8) [заметим, что $Q(z)$ можно дифференцировать почленно, так как ряд сходится равномерно] и подставим $z=0$.

Так как

$$Q(0) = Q'(0) = \cdots = Q^{(n-1)}(0) = 0, \tag{1.9}$$

то

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k=0,\ 1, \ldots,\ n-1).$$

Далее

$$Q^{(n)}(0) + \frac{iC - \beta M_0}{A_n} = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds + iC - \beta M_0 = 0.$$

Отсюда

$$C = 0, \qquad \beta = \frac{1}{2\pi M_0}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds.$$

Таким образом

$$\Phi_n(z) = Q^{(n+1)}(z).$$

Следовательно, имеем

$$\varphi_n(x,\ y) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2} r\right)^{2k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds +$$

$$+ \operatorname{Re}\int_0^z Q^{(n+1)}(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} [\bar{z}(z-t)]^k dt.$$

Если в качестве граничной функции взять отрезок ряда Фурье, то, используя вышеприведенную формулу, получаем решение задачи А

$$\varphi(x,\ y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x,\ y) = \beta J_0(\alpha i r) +$$

$$+ 2\operatorname{Re}\int_0^z \left(\sum_{k=1}^{M} \delta_k k t^{k-1}\right) J_0\left(\alpha i \sqrt{\bar{z}(z-t)}\right) dt,$$

где

$$f(s) = \sum_{-M}^{M} \delta_k e^{iks},$$

$$\beta = \frac{\delta_0}{M_0},$$

$$\delta_k' = \frac{\delta_k}{k!}\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^k \frac{1}{J_k(i\alpha)}.$$

§ 2. Случай уравнения четвертого порядка

Пусть имеем уравнение

$$\Delta\Delta\varphi - \lambda^2\Delta\varphi = 0, \tag{2.1}$$

где λ — любое вещественное число.

Это уравнение используется при расчете пологих сферических оболочек [3].

Задача С. Найти в области G решение уравнения (2.1) по граничным условиям

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_\Gamma = f_1(s), \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_\Gamma = f_2(s),$$

где $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — заданные действительные непрерывные функции, имеющие по дуге непрерывные производные до четвертого порядка.

Пусть область G — единичный круг. Тогда для однозначности $\varphi(x, y)$ должно выполняться условие

$$\int_0^{2\pi} [-f_1(s)\sin s + f_2(s)\cos s]\, ds = 0. \tag{2.2}$$

При этих условиях решение задачи находится с точностью до аддитивной действительной постоянной. Если же известно значение $\varphi(x, y)$ в какой-нибудь точке, то находим единственное решение.

Обозначим $\Delta\varphi = u$. Тогда имеем

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0, \tag{2.1'}$$

$$4\varphi(x, y) = \int_0^z dt \int_0^{\bar z} u(t, \tau)\, d\tau + \gamma(z) + \overline{\gamma(z)}, \tag{2.3}$$

где $\gamma(z)$ — произвольная голоморфная в круге функция.

Как мы видели выше, n-ое приближение решения (2.1) можно записать в виде

$$u_n(x, y) = \beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}r\right)^{2k} + \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}\frac{\bar z^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k}\psi_n(z)}{dz^{n-k}}.$$

Тогда получим

$$4\varphi_n(x, y) = \int_0^z dt \int_0^{\bar z} d\tau \left[\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} t^k \tau^k + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\tau^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k}\psi_n(t)}{dt^{n-k}}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k}\overline{\psi_n(t)}}{d\tau^{n-k}}\Bigg]+$$

$$+\gamma_n(z)+\overline{\gamma_n(z)}. \tag{2.4}$$

Найдя производную по z

$$4\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{\bar{z}^{k+1}z^k}{k+1}+\frac{d\gamma_n}{dz}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\bar{z}^{k+1}}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k}\psi_n}{dz^{n-k}}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k-1}\overline{\psi_n(z)}}{d\bar{z}^{n-k-1}}$$

и подставив в граничное условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{2}[f_1(s)-if_2(s)],$$

будем иметь

$$4\mathrm{Re}\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=2f_1(s)=\mathrm{Re}\Bigg[\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{z^k\bar{z}^{k+1}}{k+1}+\frac{d\gamma_n}{dz}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\bar{z}^{k+1}}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k}\psi_n}{dz^{n-k}}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\bar{z}^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k-1}\psi_n}{dz^{n-k-1}}\Bigg]_\Gamma,$$

$$4\mathrm{Re}\,i\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=2f_2(s)=\mathrm{Re}\,i\Bigg[\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}z^k\frac{\bar{z}^{k+1}}{k+1}+\frac{d\gamma_n}{dz}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\bar{z}^{k+1}}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k}\psi_n}{dz^{n-k}}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\bar{z}^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k-1}\psi_n}{dz^{n-k-1}}\Bigg]_\Gamma.$$

Так как на окружности единичного радиуса $\bar{z}=\frac{1}{z}$, то предыдущие равенства можно записать в виде

$$2f_1(s)=\mathrm{Re}\,[z^{-(n+1)}W_1(z)]_\Gamma,$$

$$2f_2(s)=\mathrm{Re}\,[z^{-(n+1)}W_2(z)]_\Gamma,$$

где $W_1(z)$ и $W_2(z)$ — голоморфные в круге функции, которые находятся по формуле из § 1.

Таким образом, для определения искомых функций $\psi_n(z)$ и $\gamma_n(z)$ получаем два уравнения

$$W_1(z)+iW_2(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{n-k+1}}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{d^{n-k-1}\psi_n(z)}{dz^{n-k-1}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{n-k+1}}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\psi_{k+1}(z),$$

$$W_1(z) - iW_2(z) = 2\beta z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k!)^2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} + 2z^{n+1} \frac{d\gamma_n(z)}{dz} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{n-k}}{(k+1)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \frac{d^{n-k}\psi_n(z)}{dz^{n-k}}. \tag{2.5}$$

Возьмем первое из уравнений (2.5). Тогда имеем

$$\frac{W_1(z) + iW_2(z)}{z} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{n-k}}{k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \frac{d^{n-k}\psi_{n+1}(z)}{dz^{n-k}}. \tag{2.6}$$

Получили неоднородное уравнение Эйлера, изученное нами в § 1.

Голоморфное в круге решение (2.6) имеет вид

$$\psi_{n+1}(z) = Q(z) + \frac{iC - C'}{A_n} z^n + \sum_{k=0}^{n} \left\{ (\alpha_k + i\alpha_k') \left(\frac{z^{k-1}}{A_{k-1}} - \frac{z^{2n-k+1}}{A_{2n-k+1}} \right) + \right.$$

$$\left. + (i\beta_k - \beta_k') \left(\frac{z^{k-1}}{A_{k-1}} + \frac{z^{2n-k+1}}{A_{2n-k+1}} \right) \right\},$$

где C, C', α_k, α_k', β_k, β_k' — действительные постоянные, причем

$$\alpha_0 + i\alpha_0' + i\beta_0 - \beta_0' = 0;$$

$Q(z)$ — есть частное решение уравнения (2.6), когда левой частью служит выражение

$$\frac{z^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} [f_1(t) + if_2(t)] \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}.$$

Находим

$$\psi_n(z) = Q'(z) + \frac{n(iC - C')}{A_n} z^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)z^{k-2}}{A_{k-1}} \times$$

$$\times (\alpha_k + i\alpha_k' + i\beta_k - \beta_k') + \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k+1)}{A_{2n-k+1}} z^{2n-k} (-\alpha_k - i\alpha_k' + i\beta_k - \beta_k').$$

Далее, последовательно дифференцируя ψ_{n+1} $n+1$ — раз, используя условия (1.4), (1.9), получим

$$\alpha_k + i\alpha_k' + i\beta_k - \beta_k' = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

$$iC - C' + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(s) + if_2(s)]\, ds = 0,$$

$$-2\alpha_n + 2i\beta_n + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(s) + if_2(s)]\, e^{-is} ds = 0.$$

Отсюда, применяя условие (2.2), находим

$$\beta_n = 0, \quad \alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f_1(s)\cos s + f_2(s)\sin s]\, ds.$$

Из второго уравнения (2.5) имеем

$$2\frac{d\gamma_n(z)}{dz} = \frac{W_1(z) - iW_2(z) - 2\beta z^n M_1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^{n-k}}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k} \frac{d^{n-k}\psi_n(z)}{dz^{n-k}}}{z^{n+1}},$$

$$M_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}. \tag{2.7}$$

Функция $\frac{d\gamma_n(z)}{dz}$ голоморфна в нулевой точке. Поэтому должны выполняться следующие условия

$$\alpha_k - i\alpha'_k + i\beta_k + \beta'_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots n-1),$$

$$\alpha_n - i\alpha'_n + i\beta_n + \beta'_n - 2\beta M_1 = 0,$$

откуда

$$\alpha_k = \beta_k = \alpha'_k = \beta'_k = 0 \qquad (k=0, 1, \cdots n-1),$$

$$\beta_n = \alpha'_n = 0, \quad \beta = \frac{\alpha_n}{M_1}.$$

Таким образом,

$$\Phi_n(z) = Q^{(n+2)}(z).$$

Подставляя $\Phi_n(z)$ в (2.7), получим $\frac{d\gamma_n(z)}{dz}$.

Из (2.4) находим $\varphi_n(x, y)$ с точностью до аддитивной действительной постоянной.

Можно рассмотреть случай, когда граничные функции представлены в виде конечных сумм Фурье.

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И. Н. Векуа, а также И. И. Данилюку за ценные советы при написании работы.

Институт гид одинамики
Сибирского отделения АН СССР

Поступила 13 I 1961

Կ. Բ. Սանջիևա

ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐ ՄԵԹՈԴ՝ $\Delta\Delta\varphi - \lambda^2\Delta\varphi = 0$ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում է մեթոդ միավոր շրջանի ներսում

$$\Delta\Delta\varphi(x, y) - \lambda^2\Delta\varphi(x, y) = 0 \tag{1}$$

հավասարման մոտավոր լուծման համար՝

$$\left.\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\right|_{\Gamma} = f_1(s), \qquad \left.\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\right|_{\Gamma} = f_2(s) \tag{2}$$

եզրային պայմանների դեպքում։

Դրա համար օգտագործվում է Ի. Ն. Վեկուայի կողմից ստացված

$$\Delta\varphi(x, y) - \lambda^2\varphi = 0$$

հավասարման լուծման ընդհանուր ներկայացումը։

Հոդվածի սկզբում տրվում է

$$\Delta\varphi(x, y) - \lambda^2\varphi(x, y) = 0$$

հավասարման մոտավոր լուծումը

$$\varphi(x, y)_{\Gamma} = f(s)$$

եզրային պայմանի դեպքում։ Այնուհետև, օգտագործելով դրանից ստացված արդյունքը, տրվում է (1) հավասարման մոտավոր լուծումը (2) եզրային պայմանի դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, 1948.
2. *Векуа И. Н.* Система дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. „Математ. сб.", 31 (73): 2, 1952.
3. *Векуа И. Н.* Об одном методе расчета призматических оболочек. „Труды Тбил. математ. ин-та", 21, 1955.