ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 3, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. А. Гельфер

# Метод вариаций в конформном отображении*

1. Пусть $S_a(T)$ обозначает класс функций

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots, \tag{1.1}$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ и отображающих этот круг на области $D$, которые обладают следующими свойствами:

1) область $D$ не содержит точек, конгруентных по отношению к данной собственно-разрывной группе $\{T\}$ дробно-линейных преобразований;

2) область $D$ содержит фиксированную точку $c_0$, $c_0 = f(o)$, отличную от неподвижных и циклических точек преобразований группы $\{T\}$;

3) область $D$ не содержит данной системы конечных точек $a_1, \cdots, a_m$ и точек, им конгруентных по отношению к группе $\{T\}$.

Поставим следующую задачу.

Среди всех функций класса $S_a(T)$ определить функцию, для которой величина

$$J_f = \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta} \log \frac{f(z_0) - c_0}{z_0}\right\}^{**} \tag{1.2}$$

при фиксированных $z_0$ из круга $|z| < 1$ и вещественном $\theta$ имеет наибольшее значение.

Теорема 1. *Функция $w = f_0(z)$ класса $S_a(T)$, для которой функционал (1.2) достигает наибольшего значения, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$e^{i\theta} \frac{z_0(1 - |z_0|^2) f_0'(z_0)}{f_0(z_0) - c_0} \cdot \frac{1}{z(z_0 - z)(1 - \bar{z}_0 z) w'^2 p'^2(w)} = Q(w), \tag{1.3}$$

*где $Q(w)$ и $p(w)$ — автоморфные функции, принадлежащие группе $\{T\}$, $z = f_0^{-1}(w)$.*

---

* Работа доложена на V всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1950 г. в г. Ереване.

** Под $\log \frac{f(z_0) - c_0}{z_0}$ понимается значение той однозначной в $|z| < 1$ ветви функции $\log \frac{f(z) - c_0}{z}$, которая при $z = 0$ равна главному значению $\log c_1$.

Доказательство. Существование экстремальных функций следует из нормальности семейства $S_a(T)$. Пусть $w=f_0(z)$ — одна из экстремальных функций и $D_0$ — соответствующая экстремальная область. Воспользуемся вариационной формулой для функций класса $S_a(T)$. Она имеет следующий вид [1], формула (4)]

$$f^*(z)=f(z)+h\,[q(f(z))-q(c_0)]\,\frac{1}{p'(f(z))}\prod_{i=1}^{m+s}\frac{p(f(z))-p(a_i)}{p(f(z))-b_i}-$$

$$-hzf'(z)\sum_{k=1}^{\nu(m+s)+\mu}\frac{\beta_k}{z-z_k}+\bar{h}z^2f'(z)\sum_{k=1}^{\nu(m+s)+\mu}\frac{\bar{\beta}_k}{1-z_kz}+O(h^2),\ f(0)=c_0, \quad (1.4)$$

где $p(w)$ — простая, однозначная автоморфная функция, принадлежащая группе $[T]$; $a_i$ при $i=m+1,\cdots,m+s$ — корни уравнения $p'(w)=0$, лежащие в фундаментальной области группы; $b_i$ $(i=1,\cdots,m+s)$ — произвольные постоянные; $q(w)$ — простая, однозначная автоморфная функция, принадлежащая группе $[T]$ и не имеющая в фундаментальной области никаких особенностей, кроме $\mu$ простых полюсов в $\mu$ произвольно заданных точках $w_k$ $(k=\nu(m+s)+1,\cdots,\nu(m+s)+\mu)$, отличных от корней $w_k$ $(k=1,\cdots,\nu(m+s))$ уравнений $p(w)=b_i$ $(i=1,\cdots,m+s)$; $\nu$ — число полюсов функции $p(w)$ в фундаментальной области; $h$ — произвольное комплексное число; $\beta_k$ — вычеты функции

$$\frac{q(f(z))-q(c_0)}{zf'(z)\,p'(f(z))}\prod_{i=1}^{m+s}\frac{p(f(z))-p(a_i)}{p(f(z))-b_i}$$

в ее простых полюсах $z_k$, $f(z_k)=w_k$, $|z_k|<1$ $[k=1,\cdots,\nu(m+s)+\mu]$.

Будем иметь

$$\beta_k=\begin{cases}-\dfrac{\alpha_k}{z_kf'^2(z_k)\,p'(f(z_k))}\displaystyle\prod_{i=1}^{m+s}\frac{p(f(z_k))-p(a_i)}{p(f(z_k))-b_i}, & \alpha_k=-\lim\limits_{w\to w_k}\dfrac{q^2(w)}{q'(w)},\\ & \text{для } k=\nu(m+s)+1,\cdots,\nu(m+s)+\mu,\\[2ex] \dfrac{q(f(z_k))-q(c_0)}{z_kf'^2(z)\,p'^2(f(z_k))}\,\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{m+s}[p(f(z_k))-p(a_i)]}{\prod\limits_{i=1}^{m+s}[p(f(z_k))-b_i]} & \text{для } k=1,\cdots,\nu(m+s).\\ (p(f(z_k))\neq b_i) & \end{cases} \quad (1.5)$$

Применяя к экстремальной функции $w=f_0(z)$ вариационную формулу (1.4), получаем неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\log\frac{f^*(z_0)-c_0}{z_0}\right\}\leqslant\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\log\frac{f_0(z_0)-c_0}{z_0}\right\}.$$

Отсюда, учитывая произвольность аргумента $h$, получаем условие*

$$e^{i\theta}\left(\frac{q(f_0(z_0))-q(c_0)}{f_0(z_0)-c_0}\cdot\frac{1}{p'(f_0(z_0))}\prod_{i=1}^{m+s}\frac{p(f_0(z_0))-p(a_i)}{p(f_0(z_0))-b_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\sum_{k=1}^{\nu(m+s)+\mu}\frac{\beta_k}{z_0-z_k}\right)+e^{-i\theta}\left(\frac{\overline{z_0^2 f_0'(z_0)}}{f_0(z_0)-c_0}\right)\sum_{k=1}^{\nu(m+s)+\mu}\frac{\beta_k}{1-\bar{z}_0 z_k}=0. \quad (1.6)$$

В равенство (1.6) подставляем выражения (1.5), затем фиксируем в нем точки $z_1,\cdots,z_{\nu(m+s)+\mu-1}$, а точку $z_{\nu(m+s)+\mu}$ считаем переменной, обозначая ее в дальнейшем через $z$; $w=f_0(z)$, $w_k=f_0(z_k)$ $(k=1,\cdots,\nu(m+s)+\mu-1)$ Величины $q(w_k)$, $\alpha_k$, $q(f_0(z_0))$ и $q(c_0)$ при всех $k$ будут, вообще, содержать $f_0(z)$.

Положим

$$q(w_k)-q(c_0)=Q_k(w),\quad \alpha_k=\alpha_k(w),\quad q(f_0(z_0))-q(c_0)=Q_0(w).$$

Условие (1.6) примет следующий вид

$$\left[e^{i\theta}\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\cdot\frac{1}{z_0-z}-e^{-i\theta}\left(\frac{\overline{z_0^2 f_0'(z_0)}}{f_0(z_0)-c_0}\right)\frac{1}{1-z_0 z}\right]\frac{q^2(w)}{q'(w)zf_0^2(z)p'(w)}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{m+s}\frac{p(w)-p(a_i)}{p(w)-b_i}+\sum_{k=1}^{\nu(m+s)}A_k Q_k(w)+A_0 Q_0(w)+\sum_{k=\nu(m+s)+1}^{\nu(m+s)+\mu-1}B_k\alpha_k(w)=0. \quad (1.7)$$

где все $A_k$ и $B_k$ — постоянные. Автоморфную функцию $q(w)$ строим таким образом, чтобы функции $Q_k(w)$, $Q_0(w)$ и $\alpha_k(w)$ были автоморфными функциями по отношению к группе $\{T\}$. Между автоморфными функциями $p(w)$ и $q(w)$ существует алгебраическое соотношение $\Phi(p,q)=0$, откуда $\Phi_p'\cdot p'(w)+\Phi_q' q'(w)=0$, и уравнение (1.7) принимает вид

$$\left[e^{i\theta}\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\frac{1}{z_0-z}-e^{-i\theta}\left(\frac{\overline{z_0^2 f_0'(z_0)}}{f_0(z_0)-c_0}\right)\frac{1}{1-z_0 z}\right]\frac{1}{zw'^2p'^2(w)}=$$

$$=\left\{A_0 Q_0(w)+\sum_{k=1}^{\nu(m+s)}A_k Q_k(w)+\sum_{k=\nu(m+s)+1}^{\nu(m+s)+\mu-1}B_k\alpha_k(w)\right\}\cdot\frac{\Phi_p'}{\Phi_q'\cdot q^2(w)}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{m+s}\frac{p(w)-p(a_i)}{p(w)-b_i}. \quad (1.8)$$

Правая часть уравнения (1.8) есть автоморфная функция, принадлежащая группе $\{T\}$. Обозначим ее через $Q(w)$.

---

* Постоянные $b_i$ $(i=1,\ldots,m+s)$ выбираем так, чтобы все точки $w_k$ $(k=1,\ldots,\nu(m+s))$ оказались внутри области $D_0$.

Рассмотрим, далее, функцию $f_1(z) = f_0(e^{i\varphi}z)$, $f_1(z) \in S_a(T)$. Величина (1.2) для функции $f_1(z)$ при изменении $\varphi$ от 0 до $2\pi$ достигает своего максимума при $\varphi = 0$.

Следовательно

$$\left.\frac{\partial J_{f_1}}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0.$$

Но

$$\left.\frac{\partial J_{f_1}}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \operatorname{Re}\left\{ie^{i\theta}\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\right\} = -\operatorname{Im}\left\{e^{i\theta}\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\right\} = 0,$$

значит

$$e^{i\theta}\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0} = e^{-i\theta}\overline{\left(\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\right)}.$$

Отсюда, квадратная скобка, стоящая в левой части (1.8), будет равна

$$e^{i\theta}\frac{z_0(1-|z_0|^2)f_0'(z_0)}{[f_0(z_0)-c_0](z_0-z)(1-\bar{z}_0 z)}.$$

После подстановки уравнение (1.8) примет вид (1.3). Теорема доказана.

2. Теорема 2. *Область $D_0$, на которую экстремальная функция $w = f_0(z)$ отображает круг $|z| < 1$, обладает следующими свойствами:*

*1) область $D_0$ представляет собой односвязную фундаментальную область $S_0$ группы $\{T\}$ с разрезами, содержащую внутри себя точку $c_0$;*

*2) граница области $D_0$ состоит из конечного числа аналитических дуг, попарно конгруентных по отношению к группе $\{T\}$, и из кусочно-аналитических разрезов, идущих от границы $S_0$ и оканчивающихся в точках $a_1, \cdots, a_m$ или им конгруентных.*

Доказательство. Допустим, что существует такая точка $t$, внешняя по отношению к области $D_0$, для которой в $D_0$ нет точек, конгруентных по отношению к группе $\{T\}$. Выбирая полюсы автоморфной функции $q(w)$ в окрестности точки $t$ и вне $D_0$, и учитывая, что при этом вычеты $\beta_k$ для $k = \nu(m+s)+1, \cdots, \nu(m+s)+\mu$ обратятся в нуль, получим вместо (1.7) уравнение

$$A_0 Q_0(w) + \sum_{k=1}^{\nu(m+s)} A_k Q_k(w) = 0.$$

Это уравнение выполняется для всякого $w$ в окрестности внешней точки $t$ и, по принципу перманентности, оно будет иметь место во всей области существования автоморфных функций $Q_k(w)$ $(k = 0, 1, \cdots, \nu(m+s))$. Но в окрестности полюса левая часть неограниченно возрастает в то время, как правая часть остается конечной. Это противоречие доказывает утверждение *1)* теоремы.

Экстремальная функция $w = f_0(z)$ удовлетворяет в круге $|z| < 1$ дифференциальному уравнению (1.3). Правая часть этого уравнения представляет собой однозначную автоморфную функцию, имеющую во всякой фундаментальной области лишь конечное число полюсов. Отсюда заключаем, что уравнение (1.3) выполняется не только внутри круга $|z| < 1$, но и на окружности $|z| = 1$, за исключением конечного числа точек. Следовательно, граница $D_0$ состоит из конечного числа аналитических дуг.

Остается показать, что граница области $D_0$ не содержит разрезов, оканчивающихся в точках, отличных от точек $a_1, \cdots, a_m$ или им конгруентных.

Допустим, что разрез оканчивается в некоторой точке, отличной от точек $a_1, \cdots, a_m$. Укорачивая этот разрез на малую величину $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, получим новую область $D_1$, $D_0 \subset D_1$, принадлежащую рассматриваемому семейству. Пусть функция $f_1(z)$, $f_1(0) = c_0$, $f_1'(0) = f_0'(0)$, отображает круг $|z| < 1$ на область $D_1$. Функция $f_1(z) \in S_a(T)$. Положив $\psi(z) = f_1^{-1}(f_0(z))$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) > 0$, $|\psi(z)| < 1$, найдем, исходя из дифференциального уравнения Лёвнера [2, стр. 139, уравнение (2)],

$$\psi(z) = z - hz\frac{1+kz}{1-kz} + o(h), \quad h > 0,$$

$$h \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \ |k| = 1.$$

Отсюда получаем

$$f_0(z) = f_1(\psi(z)) = f_1(z) - hz\frac{1+kz}{1-kz}f_1'(z) + o(h),$$

$$f_1(z) = f_0(z) + hz\frac{1+kz}{1-kz}f_1'(z) + o(h),$$

и неравенство $J_{f_1} \leqslant J_{f_0}$ приводит к условию

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\vartheta}\frac{1+kz_0}{1-kz_0}\cdot\frac{z_0 f_1'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\right\} \leqslant 0. \tag{2.1}$$

Аналогично рассмотрев функцию $f_2(z) = f_0(\psi(z)) \in S_a(T)$, получим условие

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\vartheta}\frac{1+kz_0}{1-kz_0}\cdot\frac{z_0 f_1'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\right\} \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Устремляя $\varepsilon$ к нулю и сопоставляя неравенства (2.1) и (2.2), получаем

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\vartheta}\frac{1+k_0z_0}{1-k_0z_0}\cdot\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}\right\} = 0, \quad |k_0| = 1. \tag{2.3}$$

Положим

$$e^{i\theta}\frac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}=U+iV,\qquad \frac{1+k_0z_0}{1-k_0z_0}=u+iv.$$

Тогда соотношение (2.3) примет вид $Uu-Vv=0$. Но выше было показано, что $V=0$, кроме того $u\neq 0$, отсюда находим, что $U=0$, т. е. $e^{i\theta}\dfrac{z_0 f_0'(z_0)}{f_0(z_0)-c_0}=0$, что невозможно. Теорема доказана.

3. Остановимся на частном случае, когда группа $\{T\}$ представляет собой группу преобразований $w'=w+n_1\omega_1+n_2\omega_2$, где $\omega_1$ и $\omega_2$—постоянные, отношение которых не вещественно, а $n_1$ и $n_2$—любые целые числа.

Выбирая $c_0=0$ и полагая автоморфные функции $p(w)$ и $q(w)$ равными

$$p(w)=\wp'(w),$$

$$q(w)=[\zeta(w-w_{2m+1})-\zeta(w-w_{2m+2})]\,\wp'(w),$$

где $\wp(w)$, $\zeta(w)$ — функции Вейерштрасса, построенные на периодах $\omega_1$, $\omega_2$; а $w_{2m+1}$, $w_{2m+2}$ — произвольные точки, вместо (1.8) получим дифференциальное уравнение

$$e^{i\theta}\frac{z_0(1-|z|^2)f_0'(z_0)}{f_0(z_0)(z_0-z)(1-\bar{z}_0z)zw'^2}=\Big\{C+A[\zeta(w)-\zeta(w-f_0(z_0))]+$$

$$\sum_{k=1}^{2m}A_k[\zeta(w)-\zeta(w-f_0(z_k))]\Big\}\cdot\prod_{i=1}^{m}\frac{\wp(w)-b_i}{\wp(w)-\wp(a_i)},\tag{3.1}$$

где $w=f_0(z)$; $C$, $A$, $A_k$ $(k=1,\cdots,2m)$ — постоянные*.

Левая часть уравнения (3.1) не зависит от произвольных величин $b_i$ $(i=1,\cdots,m)$, следовательно и правая часть не должна от них зависеть. Но правая часть представляет собой эллиптическую функцию от $w$ с периодами $\omega_1$ и $\omega_2$, имеющую в фундаментальном параллелограмме лишь простые полюсы в точках $w=0$, $w=f_0(z_0)$, $w=\pm a_i$ $(i=1,\cdots,m)$. Отсюда, пользуясь известным выражением эллиптических функций через функции Вейерштрасса, для правой части уравнения (3.1) получим выражение

$$C_0+C_1\zeta(w)+C_2\zeta(w-f_0(z_0))+\sum_{i=1}^{m}A_i\zeta(w-a_i)+\sum_{i=1}^{m}B_i\zeta(w+a_i),$$

где $C_0$, $C_1$, $C_2$, $A_i$ и $B_i$ $(i=1,\cdots,m)$—постоянные, причем

$$C_1+C_2+\sum_{i=1}^{m}A_i+B_i=0.$$

* Здесь имеем $r=2$, $s=0$.

На основании теоремы 2 постоянные $B_i=0$ $(i=1,\cdots,m)$, и дифференциальное уравнение для экстремальной функции примет окончательный вид

$$e^{i\theta}\frac{z_0(1-|z_0|^2)f_0'(z_0)}{f_0(z_0)(z_0-z)(1-\bar{z}_0z)zw'^2}=$$

$$=C_0+C_1\zeta(w)+C_2\zeta(w-f_0(z_0))+\sum_{i=1}^{m}A_i\zeta(w-a_i), \qquad (3.2)$$

причем

$$C_1+C_2+\sum_{i=1}^{m}A_i=0, \qquad w=f_0(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots, \qquad |z|<1.$$

Сравнением коэффициентов при $\frac{1}{z}$ и $\frac{1}{z_0-z}$ в обеих частях (3.2), находим для постоянных $C_1$ и $C_2$ выражения

$$C_1=e^{i\theta}\frac{(1-|z_0|^2)f_0'(z_0)}{f_0(z_0)f_0'(0)}, \qquad C_2=-\frac{e^{i\theta}}{f_0(z_0)}. \qquad (3.3)$$

Положив

$$F(z,|z_0|)=\int_0^{\sqrt{\frac{z}{z_0}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-|z_0|^2t^2)}}$$

и интегрируя уравнение (3.2), получим

$$e^{-i\frac{\theta}{2}}\sqrt{\frac{f_0(z_0)}{z_0(1-|z_0|^2)f_0'(z_0)}}\times$$

$$\times\int_0^{f_0(z)}\sqrt{C_0+C_1\zeta(w)+C_2\zeta(w-f_0(z_0))+\sum_{i=1}^{m}A_i\zeta(w-a_i)}\,dw=$$

$$=2F(z,|z_0|). \qquad (3.4)$$

В предельном случае, при $\omega_1\to\infty$ и $\omega_2\to\infty$, получаем

$$\int_0^{f_0(z)}\sqrt{\frac{b_0+b_1w+\cdots+b_{m-1}w^{m-1}}{w(w-f_0(z))(w-a_1)\cdots(w-a_m)}}\,dw=F(z,|z_0|).$$

4. Рассмотрим класс $S(T)$ функций вида (1.1), $c_0=0$, регулярных в круге $|z|<1$ и однолистно отображающих этот круг на области $D$, обладающие свойствами 1) и 2) из п. 1, причем группа $\{T\}$—двояко-периодическая. Семейство $S(T)$ также нормально в круге $|z|<1$.

Дифференциальное уравнение для экстремальной функции нашей задачи в этом случае будет иметь вид

$$e^{i\theta}\frac{z_0(1-|z_0|^2)f_0'(z_0)}{f_0(z_0)}\cdot\frac{1}{z(1-\bar{z}_0z)(z-z_0)w'^2}=C_0+C_1\zeta(w)+C_2\zeta(w-f_0(z_0)),$$

где $C_1+C_2=0$. Приняв во внимание (3.3), найдем, что для экстремальной функции $f_0(z)$ выполняется соотношение

$$f_0(z_0)=\frac{f_0'(0)}{1-|z_0|^2}.$$

Горьковский инженерно-строительный институт
им. В. П. Чкалова

Поступила 2 I 1961

Ս. Ա. Գելֆեր

## ՎԱՐԻԱՑԻԱՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ԿՈՆՖՈՐՄ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՄԱՆ ՄԵՋ

### ԱՄՓՈՓՈՒՄ

*Դիտարկվում է $|z|<1$ շրջանում ռեգուլյար, այդ շրջանը $D$ տիրույթի վրա միաթերթ արտապատկերող հետևյալ հատկություններով օժտված $w=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ ֆունկցիաների $S_a(T)$ դասը։*

*1. $D$ տիրույթը չի պարունակում կատորակա-գծային ձևափոխությունների տրված սեփական – խզվող $\{T\}$ խմբի նկատմամբ կոնգրուենտ կետեր։*

*2. $D$ տիրույթը պարունակում է ֆիքսված $c_0$, $c_0=f(0)$ կետը, որը տարբեր է $\{T\}$ խմբի անշարժ ու ցիկլիկ կետերից։*

*3. $D$ տիրույթը չի պարունակում $a_1,\dots,a_m$ կետերի տվյալ սիստեմը և $\{T\}$ խմբի նկատմամբ նրանց հետ կոնգրուենտ կետեր։*

*Վարիացիոն մեթոդով հետազոտվում է $S_a(T)$ դասի $f(z)$ ֆունկցիայի համար*

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\log\frac{f(z_0)-c_0}{z_0}\right\}$$

*ֆունկցիոնալի էքսթրեմումի խնդիրը միավոր շրջանից տրված $z_0$-ի և երևան 0-ի դեպքում։*

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфер С. А.* О максимуме конформного радиуса фундаментальной области группы дробно-линейных преобразований, „Матем. сборн.", **52** (**94**): 1, 1960, 629—640.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М.—Л., 1952.