ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 3, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

О методах суммирования интегралов (рядов), эквивалентных методу Рисса

Рассмотрим последовательность чисел

$$0=\gamma_0<\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\cdots\leqslant\gamma_n\leqslant\cdots$$

и функцию $h(x)$, определенную для $0\leqslant x<\infty$.

Определение 1. *Условимся говорить, что* $\int\limits_0^\infty h(x)\,dx$ *суммируем по методу* $(R,\ n,\ \gamma)$ *если существует*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\int\limits_0^\lambda x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dx_n\int\limits_0^{x_n}x_{n-1}^{\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}-1}dx_{n-1}\cdots\int\limits_0^{x_2}x_1^{\gamma_1-1}dx_1\int\limits_0^{x_1}h(x)\,dx}{\int\limits_0^\lambda x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dx_n\int\limits_0^{x_n}x_{n-1}^{\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}-1}dx_{n-1}\cdots\int\limits_0^{x_2}x_1^{\gamma_1-1}dx_1}=$$

$$=(R,\ n,\ \gamma)\int\limits_0^\infty h(x)\,dx. \tag{1}$$

Заметим, что в случае, когда $\gamma_\nu=\nu,\ \nu=0,1,2,\cdots$, вышеуказанный метод совпадает с известным методом суммирования порядка n по Риссу (см. [1], стр. 114).

С целью удобства исследования, представим левую часть (1) в другом виде.

Применением теоремы Дирихле о перестановке интегралов, в повторном интеграле получим

$$\int\limits_0^\lambda x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dx_n\cdots\int\limits_0^{x_1}h(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^\lambda h(x_0)\,dx_0\int\limits_{x_0}^\lambda x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}\,dx_n\cdots\int\limits_{x_0}^{x_2}x_1^{\gamma_1-1}dx_1. \tag{2}$$

С другой стороны имеем

$$
\int\limits_{x_0}^{\lambda} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}\,dx_n\cdots\int\limits_{x_0}^{x_2} x_1^{\gamma_1-1}\,dx_1=
$$

$$
=x_0^{\gamma_n}\int\limits_{1}^{\frac{\lambda}{x_0}} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}\,dx_n\cdots\int\limits_{1}^{x_2} x_1^{\gamma_1-1}\,dx_1. \tag{3}
$$

Последний интеграл представляется контурным интегралом

$$
x_0^{\gamma_n}\int\limits_{1}^{\frac{\lambda}{x_0}} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}\,dx_n\cdots\int\limits_{1}^{x_2} x_1^{\gamma_1-1}\,dx_1=
$$

$$
=\frac{(-1)^n x_0^{\gamma_n}}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{\lambda}{x_0}\right)^{-\zeta-\gamma_n}d\zeta}{\zeta(\zeta-\gamma_1)\cdots(\zeta-\gamma_n)}=
$$

$$
=\frac{(-1)^n\lambda^{\gamma_n}}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{\lambda}{x_0}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta-\gamma_\nu)}=\frac{\lambda^{\gamma_n}}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}, \tag{4}
$$

где контур C охватывает все нули знаменателя подинтегральной функции (см. [2], стр. 35).

Из (3) и (4) следует, что

$$
\int\limits_{x_0}^{\lambda} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}\,dx_n\int\limits_{x_0}^{x_n} x_{n-1}^{\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}-1}\,dx_{n-1}\cdots\int\limits_{x_0}^{x_2} x_1^{\gamma_1-1}\,dx_1=
$$

$$
=\frac{\lambda^{\gamma_n}}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}. \tag{5}
$$

С другой стороны, простое вычисление показывает, что

$$
\int\limits_{0}^{\lambda} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}\,dx_n\cdots\int\limits_{0}^{x_2} x_1^{\gamma_1-1}\,dx_1=\frac{\lambda^{\gamma_n}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}. \tag{6}
$$

Из (1), (5) и (6) следует, что определение 1 может быть высказано в следующем эквивалентном виде:

Определение 1'. *Условимся говорить, что* $\int\limits_0^{\infty} h(x)\,dx$ *суммируем методом* (R, n, γ), *если существует*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^{\lambda} h(x)\,\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}, \gamma\right)dx = (R, n, \gamma)\int\limits_0^{\infty} h(x)\,dx, \tag{1'}$$

где

$$\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}, \gamma\right) = \frac{\prod\limits_1^n \gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)},$$

а контур C охватывает нули знаменателя подинтегральной функции.

Наряду с последовательностью

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \tag{7}$$

рассмотрим последовательность

$$0 = \gamma_0' < \gamma_1' \leqslant \gamma_2' \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n' \tag{7'}$$

и введем еще обозначения

$$J_n(\lambda, \gamma) = \int\limits_0^{\lambda} h(x)\,\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}, \gamma\right)dx, \tag{8}$$

$$J_n(\lambda, \gamma') = \int\limits_0^{\lambda} h(x)\,\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}, \gamma'\right)dx \tag{8'}$$

$$Y_n(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\prod\limits_1^n \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}}{2\pi i}\int\limits_C \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\,d\zeta\int\limits_\alpha^\beta\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} J_n(x, \gamma)\,d\,\frac{x}{\lambda}, \tag{9}$$

$$Y_n(\alpha, \beta, \gamma') = \frac{\prod\limits_1^n \frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu}}{2\pi i}\int\limits_C \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu}{\zeta+\gamma_\nu'}\int\limits_\alpha^\beta\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} J_n(z, \gamma')\,d\,\frac{x}{\lambda}, \tag{9'}$$

где $0 \leqslant \alpha < \beta$ — произвольные числа.

Исследуем взаимную связь между функциями $J_n(\lambda, \gamma)$ и $J_n(\lambda, \gamma')$.

Теорема 1. *Для всякого* λ, $0<\lambda<\infty$ *справедливо равенство*

$$J_n(\lambda,\gamma)=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu}J_n(\lambda,\gamma')+Y_n(0,\lambda,\gamma') \tag{10}$$

и наоборот

$$J_n(\lambda,\gamma')=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma'_\nu}{\gamma_\nu}J_n(\lambda,\gamma)+Y_n(0,\lambda,\gamma). \tag{10'}$$

Доказательство. Имеем

$$J_n(\lambda,\gamma)=\int_0^\lambda h(x)\,\omega_n\left(\frac{x}{\lambda},\gamma\right)dx. \tag{11}$$

Обозначим

$$du=h(x)\,dx,\qquad v=\omega_n\left(\frac{x}{\lambda},\gamma\right),$$

$$u=\int_0^x h(x)\,dx,\quad dv=-\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C\frac{x^{-\zeta-1}\lambda^\zeta d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}dx$$

и проинтегрируем (11) по частям, зная, что при $n>1$, $v(\lambda)=0$ будем иметь

$$J_n(\lambda,\gamma)=\int_0^\lambda\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C\frac{x_1^{-\zeta-1}\lambda^\zeta d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}dx_1\int_0^{x_1}h(x)\,dx=$$

$$=\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C\frac{\lambda^\zeta d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\int_0^\lambda x_1^{-\zeta-1}dx_1\int_0^{x_1}h(x)\,dx,$$

где $\operatorname{Re}(-\zeta)>0$.

Для краткости обозначив

$$\lambda^{-\zeta}\prod_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)=A(\zeta),$$

будем иметь

$$J_n(\lambda,\gamma)=\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C\frac{d\zeta}{A(\zeta)}\int_0^\lambda x_1^{-\zeta-\gamma'_1}x_1^{\gamma'_1-1}\int_0^{\lambda}h(x)\,dx.$$

Последний интеграл снова проинтегрируем по частям, полагая

$$du = x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1\int_0^{x_1} h(x)\,dx, \qquad v = x_1^{-\zeta-\gamma_1'}A(\zeta)^{-1},$$

$$u = \int_0^{x} x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1\int_0^{x_1} h(x)\,dx, \qquad dv = -\frac{(\zeta+\gamma_1')\,x^{-\zeta-\gamma_1'-1}}{A(\zeta)}\,dx,$$

При $n > 2$ проинтегрированная часть будет равняться нулю, и мы получим

$$J_n(\lambda,\gamma) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C \frac{(\zeta+\gamma_1')}{A(\zeta)}\,d\zeta\int_0^{\lambda} x_2^{-\zeta-\gamma_1'-1}\,dx_2\int_0^{x_2} x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1\int_0^{x_1} h(x)\,dx.$$

Следующий шаг делается с тем расчетом, чтобы для u получить

$$u = \int_0^{x} x_2^{\gamma_2'-\gamma_1'-1}\,dx_2\int_0^{x_2} x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1\int_0^{x_1} h(x)\,dx.$$

Продолжая этот процесс, будем иметь

$$J_n(\lambda,\gamma) = \frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{0}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu')\,d\zeta}{A(\zeta)}\int_0^{\lambda} x_n^{-\zeta-\gamma_n'-1}\,dx_n\cdots$$

$$\cdots\int_0^{x_2} x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1\int_0^{x_1} h(x)\,dx =$$

$$= \frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu')}{A(\zeta)}\,d\zeta\int_0^{\lambda} x_n^{-\zeta-\gamma_n'}x_n^{\gamma_n'-\gamma_{n-1}'-1}\,dx_n\cdots$$

$$\cdots\int_0^{x_2} x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1\int_0^{x_1} h(x)\,dx.$$

Проинтегрируем еще раз последний интеграл, зная, что на этот раз проинтегрированная часть не обращается в нуль.

Тогда будем иметь

$$J_n(\lambda,\gamma) = \frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu')\,\lambda^{\zeta}x_{n+1}^{-\zeta-\gamma_n'}\,d\zeta}{\prod\limits_{1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\int_0^{x_{n+1}} x_n^{\gamma_n'-\gamma_{n-1}'-1}\,dx_n\cdots$$

$$\cdots \int_0^{x_2} x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1 \int_0^{x_1} h(x)\,dx \Bigg|_{x_{n+1}=0}^{\lambda} +$$

$$+\frac{\prod\limits_1^n \gamma_\nu}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\,d\zeta \int_0^{\lambda} \left(\frac{x_{n+1}}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} d\,\frac{x_{n+1}}{\lambda}\times$$

$$\times\, x_{n+1}^{-\gamma_n'} \int_0^{x_{n+1}} x_n^{\gamma_n'-\gamma_{n-1}'-1}\,dx_n \cdots \int_0^{x_1} h(x)\,dx,$$

или

$$J_n(\lambda,\gamma)=\prod_1^n \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu')}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\,d\zeta\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_1^n \gamma_\nu'}{\lambda^{\gamma_n'}}\int_0^{\lambda} x_n^{\gamma_n'-\gamma_{n-1}'-1}\,dx_n \cdots \int_0^{x_1} h(x)\,dx+$$

$$+\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\,d\zeta \int_C^{\lambda}\left(\frac{x_{n+1}}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} d\left(\frac{x_{n+1}}{\lambda}\right)\cdot\frac{\prod\limits_1^n \gamma_\nu'}{x_{n+1}^{\gamma_n'}}\times$$

$$\times\int_0^{x_{n+1}} x_n^{\gamma_n'-\gamma_{n-1}'-1}\,dx_n \cdots \int_0^{x_2} x_1^{\gamma_1'-1}\,dx_1 \int_0^{x_1} h(x)\,dx$$

или

$$J_n(\lambda,\gamma)=J_n(\lambda,\gamma')\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu')}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\,d\zeta+$$

$$+\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\,d\zeta \int_0^{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} J_n(x,\gamma')\,d\,\frac{x}{\lambda},$$

где контур C охватывает точки $\{-\gamma_\nu\}$, $\nu=1,2,\cdots,n$, и $\mathrm{Re}(\zeta)<0$ для всякого $\zeta\in C$.

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{d\zeta}{\zeta+\gamma_n} = 1,$$

следовательно,

$$J_n(\lambda, \gamma) = J_n(\lambda, \gamma') \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} +$$

$$+ \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} d\zeta \int\limits_0^\lambda J_n(x, \gamma') \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} \frac{dx}{\lambda}.$$

Этим, в силу (9′), первое утверждение теоремы доказано. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы.

Теорема 2. *Из существования*

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_n(\lambda, \gamma') = S$$

следует

$$\lim_{\lambda\to\infty} Y_n(0, \lambda) = \left(1 - \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu}\right) S. \qquad (12)$$

Сперва докажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма. *Для всякого* λ, $0 < \lambda < \infty$ *справедливо равенство*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} d\zeta \int\limits_0^\lambda \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} d\frac{x}{\lambda} = 1 - \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu}, \qquad (13)$$

где контур C, *как всегда, охватывает точки* $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_n$ *и* $\operatorname{Re}\zeta < 0$.

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} d\zeta \int\limits_0^\lambda \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1} d\frac{x}{\lambda} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{\nu=0}^{n} \frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad (14)$$

где контур C оставляет вне ограниченной им области точку $\zeta = 0$.

Очевидно, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \prod_{0}^{n} \frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

равняется сумме вычетов подинтегральной функции относительно точек $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$.

Это значит, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\frac{d\zeta}{\zeta}=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu'}{\gamma_\nu}-1. \tag{15}$$

В силу (12) и (15) равенство (13), а следовательно и лемма, доказаны.

Для доказательства теоремы 2 оценим разность

$$Y_n(0,\lambda)-S\left(1-\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\right).$$

Из (9) и (13) имеем

$$Y_n(0,\lambda)=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}d\zeta\int\limits_{0}^{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1}J_n(x,\gamma)\,d\frac{x}{\lambda},$$

$$1-\prod_{1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}d\zeta\int\limits_{0}^{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1}d\frac{x}{\lambda}.$$

Помножим второе из последних равенств на S и вычтем из первого. Тогда будем иметь

$$Y_n(0,\lambda)-S\left(1-\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\right)=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu'}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\zeta+\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}d\zeta\int\limits_{0}^{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta-1}[J_n(x,\gamma')-S]\frac{dx}{\lambda}. \tag{16}$$

Согласно условию теоремы, для всякого $\varepsilon>0$ можно указать числа A и λ, $0<A<\lambda<\infty$ такие, что будут справедливы неравенства

$$|J_n(x,\gamma')-S|<\varepsilon \tag{17}$$

когда $x>A=A(\varepsilon)$

и

$$\left|\int\limits_{0}^{A}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\mathrm{Re}\,\zeta-1}d\frac{x}{\lambda}\right|<\varepsilon,\qquad \mathrm{Re}\,\zeta<0. \tag{18}$$

Отметим также, что из существования предела $J_n(x,\gamma')$, когда $x\to+\infty$, следует существование абсолютной постоянной M, такой, что

$$|J_n(x,\gamma')-S|<M. \tag{19}$$

Из (16) с учетом (17), (18) и (19) получаем

$$\left|Y_n(0, \lambda) - S\left(1 - \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} \frac{1}{2\pi} \int_C \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\right| \cdot |d\zeta| \left\{\int_0^A \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\operatorname{Re}\zeta-1} |J_n(x, \gamma') - S| \frac{dx}{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \int_A^\lambda \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\operatorname{Re}\zeta-1} |J_n(x, \gamma') - S| \frac{dx}{\lambda}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} \frac{1}{2\pi} \int_C \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\right| \cdot |d\zeta| \left\{\varepsilon M + \varepsilon \int_0^\lambda \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\operatorname{Re}\zeta-1} \frac{dx}{\lambda}\right\} =$$

$$= \varepsilon M_1 \left(M - \frac{1}{\operatorname{Re}\zeta}\right) = \varepsilon_1, \qquad \operatorname{Re}\zeta < 0,$$

где

$$M_1 = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} \frac{1}{2\pi} \int_C \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\zeta+\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\right| \cdot |d\zeta|.$$

Этим показано, что при достаточно большом λ в условиях теоремы

$$\left|Y_n(0, \lambda) - S\left(1 - \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu}\right)\right| < \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\lambda) > 0$ — число сколь угодно малое.

Этим теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть последовательности* $\{\gamma_\nu\}$ *и* $\{\gamma'_\nu\}$ *удовлетворяют соответственно условиям (7) и (7'), тогда из существования*

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_n(\lambda, \gamma')$$

следует существование и

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_n(\lambda, \gamma),$$

причем они равны. Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство. Действительно, пусть

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_n(\lambda, \gamma') = S.$$

С другой стороны, из теоремы 1 имеем

$$J_n(\lambda, \gamma) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} J_n(\lambda, \gamma') + Y_n(0, \lambda).$$

Составим теперь

$$J_n(\lambda, \gamma) - S = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} J_n(\lambda, \gamma') - \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} S +$$

$$+ S\left(\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} - 1\right) + Y_n(0, \lambda).$$

Имеем

$$|J_n(\lambda, \gamma) - S| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu} |J_n(\lambda, \gamma') - S| +$$

$$+ \left| Y_n(0, \lambda) - S\left(1 - \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma'_\nu}\right) \right|.$$

Из существования

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_n(\lambda, \gamma') = S,$$

в силу теоремы 2 получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_n(\lambda, \gamma) - S = 0.$$

Этим теорема 3 доказана.

Доказанная теорема показывает, что мощность метода (R, n, γ) не зависит от последовательности чисел $\{\gamma_\nu\}$. Это значит, что метод (R, n, γ) и классический метод (R, n, k) Рисса (порядка n) совершенно равномощны, так как последний получается из (R, n, γ) при $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Действительно, при $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}, \gamma\right) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \nu)} = \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^n$$

и

$$J_n(\lambda, \nu) = \int_0^\lambda h(x) \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^n dx.$$

Рассмотрим теперь другой частный случай, когда

$$\gamma_0 = 0 < \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = \alpha.$$

Тогда будем иметь

$$J_n(\lambda, \alpha) = \int_0^\lambda h(x) \frac{\alpha^n}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta(\zeta + \alpha)^n} dx.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\zeta(\zeta+\alpha)^n}=\sum_{\zeta=0,\,\alpha}\operatorname{Res}\frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta}}{\zeta(\zeta+\alpha)^n}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^n}-\frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha}}{\alpha^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\alpha\ln\frac{\lambda}{x}\right)^k}{k!}.$$

Это значит, что

$$J_n(\lambda,\ \alpha)=\int\limits_0^{\lambda}h(x)\left[1-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\alpha\ln\frac{\lambda}{x}\right)^k}{k!}\right]dx. \tag{20}$$

Определение 2. *Условимся говорить, что интеграл*

$$\int\limits_0^{\infty}h(x)\,dx$$

суммируем по методу $(R^*,\ n,\ \alpha)$, *если существует*

$$\lim_{\lambda\to\infty}J_n(\lambda,\ \alpha),$$

где $J_n(\lambda,\ \alpha)$ *определено в (20).*

Из теоремы 3 и определения 2 следует

Теорема 4. *Для суммируемости*

$$\int\limits_0^{\infty}h(x)\,dx$$

по методу $(R^*,\ n,\ \alpha)$ *необходима и достаточна его суммируемость по методу Рисса порядка* n.

Если заметить еще, что

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\alpha\ln\frac{\lambda}{x}\right)^k}{k!}=\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha}-R_n\left(\alpha\ \ln\frac{\lambda}{x}\right),$$

где

$$R_n\left(\alpha\ln\frac{\lambda}{x}\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(\alpha\ln\frac{\lambda}{x}\right)^k}{k!}, \tag{21}$$

то теорему 4 можем сформулировать так:

Теорема 4'. *Для существования*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^{\lambda}h(x)\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha}R_n\left(\alpha\ln\frac{\lambda}{x}\right)dx,$$

где $R_n\left(\alpha \ln \frac{\lambda}{x}\right)$ *определено в (21),* $\alpha > 0$ — *произвольное число, необходима и достаточна суммируемость интеграла*

$$\int_0^{\infty} h(x)\,dx$$

по методу Рисса порядка n.

Рассмотрим теперь

$$J_n(\lambda, 1) = \int_0^{\lambda} h(x)\,dx \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta(\zeta+1)^n} = \int_0^{\lambda} h(x)\,v(x)\,dx. \tag{22}$$

Если обозначить

$$h_1(x) = \int_0^{x} h(t)\,dt$$

и заметить, что $v(\lambda) = 0$, то после интегрирования по частям будем иметь

$$J_n(\lambda, 1) = \int_0^{\lambda} h_1(x) \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x^{-\zeta-1}\lambda^{\zeta}\, d\zeta}{(\zeta+1)^n}\,dx =$$

$$= \int_0^{\lambda} h_1(x) \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta^n} \frac{dx}{\lambda}$$

или

$$J_n(\lambda, 1) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\lambda} h_1(x)\left(\ln\frac{\lambda}{x}\right)^{n-1}\frac{dx}{\lambda}. \tag{23}$$

Последнее равенство в силу теоремы 3 доказывает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Для существования*

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_n(\lambda, 1) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\lambda} h_1(x)\left(\ln\frac{\lambda}{x}\right)^{n-1}\frac{dx}{\lambda},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала $h_1'(x) = h(x)$, *а интеграл*

$$\int_0^{\infty} h(x)\,dx$$

был суммируем по Риссу порядка n.

Теорема 3 позволяет известную теорему Абелева типа (см. [3], стр. 160) для преобразования Лапласа сформулировать в более общих терминах, заменив в ней

$$\left(1-\frac{s}{t}\right)^n$$

через

$$\omega\left(\frac{s}{t},\ \gamma\right)=\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{s}{t}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)},$$

причем можно использовать также свободу выбора чисел γ_ν, $\nu=1, 2, \ldots, n$. В частности можно полагать $\gamma_\nu=\alpha$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, или сформулировать теорему для $h_1(x)$ в терминах (23).

Ереванский государственный университет

Поступила 29 IV 1960

Հ. Վ. Բադալյան

ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ (ՇԱՐՔԵՐԻ) ՀԱՆՐԱԳՈՒՄԱՐՄԱՆ՝ ՌԻՍՍԻ ՄԵԹՈԴԻՆ ՀԱՄԱՐԺԵՔ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիտարկվում է թվերի $0=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_n$ *հաջորդականությունը,* $0\leqslant x<\infty$ *միջակայքում որոշված* $h(x)$ *ֆունկցիան, ինչպես նաև*

$$\omega_n\left(\frac{x}{\lambda},\ \gamma\right)=\frac{\prod\limits_{1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)},$$

որտեղ C պարզ կոնտուրը ընդգրկում է ընդինտեգրալ ֆունկցիայի հայտարարի զրոների շրջակայքը։

Սահմանվում է ինտեգրալների հանրագումարման $(R,\ n,\ \gamma)$ *մեթոդը, այն է՝* $\int\limits_0^\infty h(x)\,dx$*-ը կկոչվի հանրագումարելի ըստ* $(R,\ n,\ \gamma)$ *մեթոդի, եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^\lambda h(x)\,\omega_n\left(\frac{x}{\lambda},\ \gamma\right)dx=(R,\ n,\ \gamma)\int\limits_0^\infty h(x)\,dx.$$

Ցույց է տրվում, որ $(R,\ n,\ \gamma)$ *մեթոդի հզորությունն անկախ է թվերի* $\{\gamma_\nu\}$ *հաջորդականությունից։*

Ստացված արդյունքը կիրառվում է Լապլասի ձևափոխության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. Издательство ИЛ, М., 1951.
2. *Бадалян Г. В.* Обобщенные факториальные ряды. „Сообщения Института математики и механики АН АрмССР", выпуск V, 1950.
3. *Ван Дер Поль Б.* и *Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. Издательство ИЛ, М., 1952.